



高等学校精品规划教材

数字信号处理

主 编 徐 进
副主编 郑德聪 谭 峰 孙玉文

SHUZI XINHAO CHULI



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等学校精品规划教材

数字信号处理

主 编 徐 进

副主编 郑德聪 谭 峰 孙玉文



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书属于数字信号处理方面的基本理论和分析的教材,内容新颖,深入浅出,既有一定的深度,又有较强的实际应用意义,是《高等学校精品规划教材》之一。全书共分九章,介绍了数字信号处理的基础理论知识,时域离散信号和系统的描述方法,线性常系数差分方程。序列的傅里叶变换(FT)、Z变换、离散傅里叶变换(DFT)、时域离散信号和系统进行频域分析的方法、快速傅里叶变换、滤波器的基本理论和设计方法、数字信号处理的技术实现以及上机试验。

本书可作为高校本、专科教材,也可供科技人员参考或自学。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理 / 徐进主编. —北京:中国水利水电出版社, 2005

高等学校精品规划教材

ISBN 7-5084-3107-3

I. 数... II. 徐... III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第088975号

书 名	高等学校精品规划教材 数字信号处理
作 者	主编 徐进 副主编 郑德聪 谭峰 孙玉文
出版 发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266(总机)、68331835(营销中心)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	787mm×1092mm 16开本 15印张 356千字
版 次	2006年1月第1版 2006年1月第1次印刷
印 数	0001—4000册
定 价	24.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

信息化已经成为社会发展的大趋势，随着计算机技术和信息技术的飞速发展，数字信号处理技术在信息处理方面的重要作用日益突出，本书属于数字信号处理方面的基本理论和分析的教材，是《高等学校精品规划教材》之一。

本教材主要内容分成三部分，第一部分包括第一、二、三、四章，是数字信号处理的基础理论知识，描述了时域离散信号和系统的描述方法、模拟信号数字处理的方法。重要的数学变换工具有：序列的傅里叶变换（FT）、Z变换、离散傅里叶变换（DFT）以及它们对时域离散信号和系统进行频域分析的方法。还介绍了快速傅里叶变换。第二部分包括第五、六、七章，主要学习滤波器的基本理论和设计方法，包括 IIR 数字滤波器、FIR 数字滤波器、特殊数字滤波器、状态变量分析法。第三部分包括第八、九章，主要介绍了数字信号处理的技术实现，软硬件实现方法，以及试验环节。各章节都有相应的习题，本教材参考学时为 54 学时。

参加本书编写的人员有：南京农业大学徐进、孙玉文，山西农业大学郑德聪，黑龙江八一农垦大学谭峰，淮阴工学院赵正敏，淮海工学院李丰林，河北农业大学陈丽，江苏大学许波。本书由徐进任主编，郑德聪、谭峰、孙玉文任副主编。

本书在撰写过程中，参阅了大量的国内外资料，对所引文献作者表示感谢。

由于时间仓促，书中内容难免有不当之处，恳请读者批评指正。

作 者

2006 年 1 月

目 录

前言

第一章 离散时间信号和系统	1
第一节 概述	1
第二节 离散时间信号——序列	1
第三节 连续时间信号的采样	6
第四节 离散时间系统	11
习题	19
第二章 Z 变换	22
第一节 Z 变换的定义及收敛域	22
第二节 Z 反变换	24
第三节 Z 变换的性质和定理	32
第四节 拉氏变换、傅氏变换与 Z 变换	37
第五节 离散时间系统的频域分析	40
习题	46
第三章 离散傅里叶变换	50
第一节 概述	50
第二节 傅里叶变换的几种可能形式	50
第三节 周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)	53
第四节 离散傅里叶级数的性质	55
第五节 离散傅里叶变换 (DFT) ——有限长序列的离散频域表示	58
第六节 离散傅里叶变换的性质	60
第七节 抽样 Z 变换——频域抽样理论	73
第八节 利用 DFT 计算模拟信号的傅里叶变换 (级数) 对	77
第九节 序列的抽取与插值	84
习题	93
第四章 快速傅里叶变换	95
第一节 概述	95
第二节 直接计算 DFT 的问题及改进的途径	95
第三节 按时间抽选 (DIT) 的基-2FFT 算法 (库利-图基算法)	96
第四节 按频率抽选 (DIF) 的基-2FFT 算法 (桑德-图基算法)	107

第五节	离散傅里叶反变换 (IDFT) 的快速计算方法	112
第六节	数字信号处理的实现	113
	习题	127
第五章	数字滤波器的基本结构	129
第一节	数字滤波器的结构表示法	129
第二节	无限长单位冲激响应 (IIR) 的基本结构	131
第三节	有限长单位冲激响应 (FIR) 滤波器的基本结构	135
	习题	141
第六章	无限长单位冲激响应数字滤波器的设计	144
第一节	引言	144
第二节	冲激响应不变法	145
第三节	阶跃响应不变法	149
第四节	双线性变换法	151
第五节	IIR 滤波器的频率变换法	153
第六节	IIR 滤波器的直接设计法	159
	习题	161
第七章	有限长单位冲激响应 (FIR) 数字滤波器的设计	163
第一节	概述	163
第二节	线性相位 FIR 滤波器的条件和特点	163
第三节	窗函数法	171
第四节	频率采样设计法	178
第五节	IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	181
	习题	181
第八章	数字信号处理的实现	184
第一节	数字信号处理的软件实现	184
第二节	数字信号处理的硬件实现	187
第九章	实验	190
第一节	Matlab 语言简介	190
实验一	FFT 作谱分析	203
实验二	IIR 数字滤波器设计	204
实验三	FIR 数字滤波器设计	206
实验四	DSP 的 FFT 算法的实现	207
附录 A	数字信号学习网页导航	209
附录 B	本教程常用的公式	212
	数字信号处理自测题一	213
	数字信号处理自测题二	215

数字信号处理自测题三.....	217
数字信号处理自测题一答案.....	218
数字信号处理自测题二答案.....	223
数字信号处理自测题三答案.....	227
参考文献.....	231

第一章 离散时间信号和系统

第一节 概 述

本书研究的对象是数字信号的分析 and 处理。信号可以定义为一个载有信息的函数，一般表示为一个或多个自变量的函数。例如，语音信号被表示成时间的函数，静止的图像被表示成两个空间变量的亮度函数。习惯上把时间作为信号的数学表示式的自变量，由于自变量可以是连续的，也可以是离散的。因此，信号通常分为两大类：连续时间信号和离散时间信号。如果信号在整个连续时间集合上都是有定义的，那么这种信号称为连续信号。在这种情况下，信号的幅度可以是连续的或离散的。通常把时间连续、幅度也连续的信号称为模拟信号。离散时间信号是定义在离散时间点上的信号，它的幅度同样可以是连续的，也可以是离散的。时间离散、幅度也离散的信号称为数字信号。

系统定义为处理（或变换）信号的物理设备。或者进一步说，凡是能将信号变换成得到人们要求的各种设备或运算都称为系统。例如，可能是设计某些变换，把已经按某种组合在一起的两个或更多的信号分开；也可能是希望增强信号的某一分量或参数；或者可能是希望估计信号的一个或几个参数。处理信号的系统分类与信号的分类是相对应的。输入和输出都是连续时间信号的系统称为连续时间系统；输入和输出都是离散时间信号的系统称为离散时间系统；输入和输出都是模拟信号的系统称为模拟系统；而输入和输出都是数字信号的系统称为数字系统。

虽然数字信号处理与模拟信号处理有许多类似的地方，但它们之间也存在着明显和重要的差别。因此，在学习数字信号处理课程时，既要注意数字信号处理与模拟信号处理相似的地方，又要注意数字信号处理本身的特点，避免将模拟信号处理的某些结论强行用到数字信号处理中来，否则会干扰对数字信号处理的正确理解。

第二节 离散时间信号——序列

离散时间信号只在离散时间上给出函数值，是一个时间上不连续的序列，它既可以是实数，也可以是复数。如果将一个数字序列 x 的第 n 个数字表示为 $x(n)$ (n 为整数，表示离散时间)，那么离散时间信号可表示为

$$x = \{x(n)\} \quad -\infty < n < +\infty \quad (1-1)$$

虽然 $x(n)$ 表示序列的第 n 个数字，但是式(1-1)表示方法显得麻烦，因此，为了方便常将 $\{x(n)\}$ 简单的表示为 $x(n)$ 。离散时间信号(或简称序列)可用图形来描述，如图 1-1 所示。图中所示的序列 $x(n)$ 也可被看成一个数字集合，即 $x(n) = \{\dots, x(-1), x(0), x(1), \dots\}$ 。图中的横坐标表示虽为连续直线，但只在 n 为整数时才有意义。

离散时间信号常常可以对模拟信号进行等间隔采样得到。例如，对于一个连续时间信

号 $x_a(t)$ ，以每秒 $f_s = 1/T$ 个采样的速率采样而产生采样信号，它与 $x_a(t)$ 的关系如下

$$x(n) = x_a(nT)$$

然而，并不是所有的离散时间信号都是这样获得的，一些信号可以认为是自然产生的离散时间序列，如每日股票时常价格、人口统计数和仓库存量等。

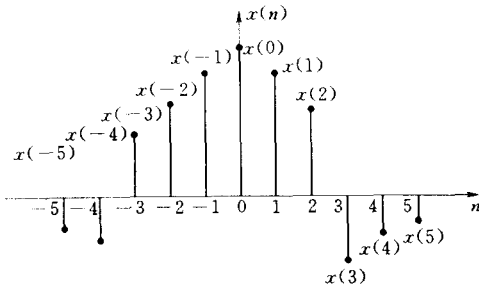


图 1-1 离散时间的图形表示

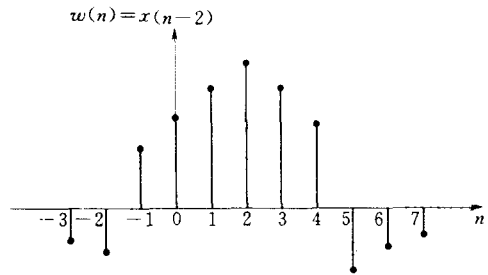


图 1-2 图 1-1 序列 $x(n)$ 的延时

一、序列的运算

在数字信号处理中常常遇到序列的移位、翻褶、相加、相乘、累加和差分等运算。

1. 序列的移位

如图 1-2 所示的序列 $x(n)$ ，其移位序列 $w(n)$ 为

$$w(n) = x(n - m)$$

当 m 为正时，则 $x(n - m)$ 是序列 $x(n)$ 逐项依次延时（右移） m 位而给出的一个新序列；当 m 为负时， $x(n - m)$ 是指依次超前（左移） m 位。图 1-2 显示了 $x(n)$ 序列的延时序列 $w(n) = x(n - 2)$ ，即 $m = 2$ 时的情况。

2. 序列的翻褶

如果序列为 $x(n)$ ，则 $x(-n)$ 是以 $n = 0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶， $x(n)$ 及 $x(-n)$ 如图 1-3 (a)、(b) 所示。

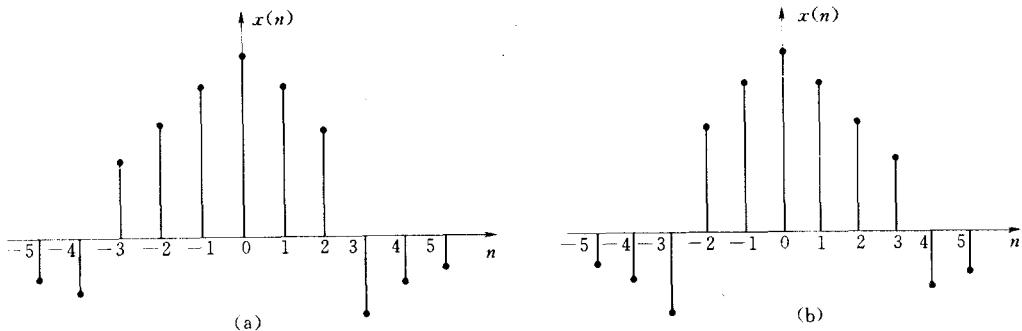


图 1-3 序列的翻褶

(a) $x(n)$ 的序列；(b) $x(-n)$ 的序列

3. 序列的和

两序列的和是指同序号 n 的序列值逐项对应相加而构成一个新序列。和序列 $z(n)$ 可表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

4. 序列的乘积

两序列相乘是指序号 n 的序列值逐项对应相乘。乘积序列 $f(n)$ 可表示为

$$f(n) = x(n)y(n)$$

5. 序列的标乘

序列 $x(n)$ 的标乘是指 $x(n)$ 的每个序列值乘以常数 c 。标乘序列 $f(n)$ 可表示为

$$f(n) = cx(n)$$

6. 累加

设某序列为 $x(n)$ ，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值 $y(n_0)$ 等于在这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 值与 n_0 以前所有 n 上的 $x(n)$ 之和。

7. 差分运算

前向差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

由此得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

二、几种序列

与连续时间信号一样，离散时间信号也有一些常用的基本形式，下面介绍离散时间信号或序列的基本形式。

1. 单位脉冲序列（离散冲激） $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

这个序列只在 $n = 0$ 处有一个单位值 1，其余点上皆为 0，因此也称“单位采样序列”，如图 1-4 所示， $\delta(n)$ 在离散时间系统中应用类似于连续信号时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$ ，但是，要注意它们之间的区别。事实上， $\delta(n)$ 是一个确定的物理量，而 $\delta(t)$ 不是确定的物理量，而是一种数学抽象。具体说， $\delta(t)$ 是一个宽度为 τ 、幅度为 $\frac{1}{\tau}$ 的脉冲，且在 $\tau \rightarrow 0$ 时脉冲幅度趋于 ∞ ，脉冲面积为 1；而 $\delta(n)$ 是在 $n = 0$ 时取值为 1，在其余离散时间点上取值为零的一个离散时间序列。

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

单位阶跃序列 $u(n)$ 如图 1-5 所示， $u(n)$ 在离散时间系统中的应用类似于连续时间系

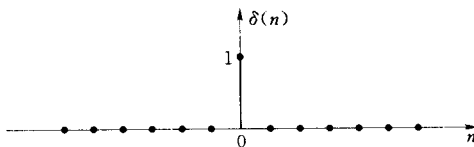


图 1-4 单位脉冲序列 $\delta(n)$

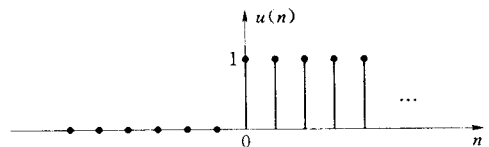


图 1-5 单位阶跃序列 $u(n)$

统中的单位阶跃函数 $u(t)$ 。不过, $u(t)$ 在 $t = 0$ 时通常不给予定义, 只在奇异函数中将 $u(0)$ 定义为 $\frac{1}{2}$, 而 $u(n)$ 在 $n = 0$ 时, 定义 $u(0) = 1$ 。

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-4)$$

这就是 $u(n)$ 的后向差分。

而

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots \quad (1-5)$$

令 $n-m = k$, 代入此式可得

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1-6)$$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列定义为

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-7)$$

矩形序列 $R_N(n)$ 如图 1-6 所示。

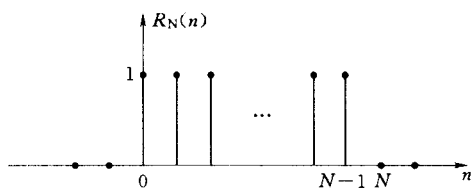


图 1-6 $R_N(n)$ 序列

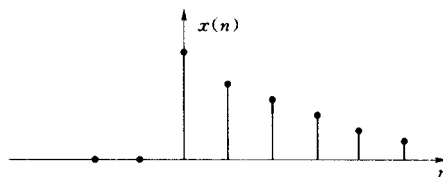


图 1-7 实指数序列

$R_N(n)$ 和 $\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1-8)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \dots + \delta[n-(N-1)] \quad (1-9)$$

4. 实指数序列

实指数序列定义为

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n < \infty \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

式中, a 是实数。当 $|a| < 1$ 时, 序列是收敛的; 当 $|a| > 1$ 时, 序列是发散的。 a 为负数时, 序列是摆动的, 如图 1-7 所示。

5. 复指数序列

序列值为复数的序列称为复指数序列。复指数序列的每个值具有实部和虚部两部分。

$$x(n) = Ae^{(a+j\omega)n}$$

或

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \quad (1-11)$$

式中, ω 为数字域频率, 单位为弧度。

式 (2-21) 还可写成

$$x(n) = A\cos\omega n + jA\sin\omega n \quad (1-12)$$

如果用极坐标表示, 则

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]} = Ae^{j\omega n}$$

因此有

$$\begin{aligned} |x(n)| &= A \\ \arg[x(n)] &= \omega n \end{aligned}$$

6. 正弦型序列

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi) \quad (1-13)$$

式中, A 为幅度; φ 为起始相位; ω 为数字域频率, 它反映了序列变化的速率。 $\omega = 0.1\pi$ 时, $x(n)$ 的序列如图 1-8 所示, 该序列值每 20 个重复一次循环。

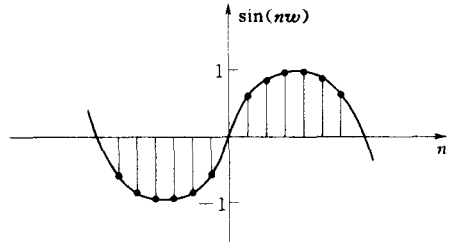


图 1-8 正弦序列 ($\omega=0.1\pi$)

三、序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 满足

$$x(n) = x(n + N) \quad (1-14)$$

则称 $x(n)$ 为周期序列, 最小周期为 N 。

现在讨论正弦序列的周期性。设

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$

则有

$$x(n + N) = A\sin[(n + N)\omega + \varphi] = A\sin(\omega n + N\omega + \varphi)$$

若 $N\omega = 2\pi k$, 当 k 为整数, 则

$$x(n) = x(n + N)$$

根据周期序列的定义可知, 这时的正弦序列为周期序列, 其周期为 $N = \frac{2\pi k}{\omega}$ (其中, N, k 为整数)。

显然, 存在下列几种情况:

(1) 当 $2\pi/\omega$ 为整数时, 正弦序列为周期序列, 且最小周期为 $2\pi/\omega$ 。

(2) 当 $2\pi/\omega$ 为有理数时, 正弦序列仍然是周期序列, 则

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{k}$$

式中, k, N 互为素数, 则 $\frac{2\pi}{\omega} k = \frac{N}{k} k = N$ 为最小正整数, 序列的最小周期为 N 。

(3) 当 $2\pi/\omega$ 为无理数时, 则任何 k 皆不能使 N 取整数, 这时的正弦序列不是周期序列。

同样, 指数为纯虚数的复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

下面, 我们来进一步讨论, 如果一个正弦序列是由一个连续信号采样而得到, 那么采样时

间间隔 T 连续正弦信号的周期之间应该是什么关系才能使所得到的采样序列仍然是周期序列?

设连续正弦信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$$

这一信号的频率为 f , 角频率 $\Omega = 2\pi f$, 信号的周期为 $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\Omega}$ 。

如果对连续周期信号 $x(t)$ 进行采样, 其采样时间间隔为 T , 采样后信号以 $x(n)$ 表示, 则

$$x(n) = x(t)|_{t=nT} = A\sin(\Omega nT + \varphi)$$

若令 ω 为数字域频率, 满足

$$\omega = \Omega T = \Omega \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

式中, f_s 为采样频率。可以看出, ω 是一个相对频率, 它是连续正弦信号的频率 f 对采样频率 f_s 的相对频率乘以 2π , 或说是连续正弦信号的角频率 Ω 对采样频率 f_s 的相对频率。用 ω 代替 ΩT , 可得

$$x(n) = A\sin(n\omega + \varphi)$$

这就是上面讨论的正弦序列。

下面我们来看 $2\pi/\omega$ 与 T 及 T_0 的关系, 从而讨论上面正弦序列的周期性的条件意味着什么?

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{1}{\Omega T} = 2\pi \frac{1}{2\pi f T} = \frac{1}{f T} = \frac{T_0}{T}$$

这表明, 若要 $2\pi/\omega$ 为整数, 就表示连续正弦信号的周期 T_0 应为采样时间间隔 T 的整数倍; 若要 $2\pi/\omega$ 为有理数, 就表示 T_0 与 T 是互为素数的整数, 且有

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{k} = \frac{T_0}{T} \quad (1-15)$$

式中, k 和 T 皆为整数, 从而有

$$NT = kT_0$$

即 N 个采样间隔应等于 k 个连续正弦信号的周期。

四、序列的能量

序列 $x(n)$ 的能量 E 定义为序列各样本的平方和, 即

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1-16)$$

式 (1-16) 定义的能量是归一化了的能量, 即信号在 1Ω 电阻上产生的能量。

第三节 连续时间信号的采样

在某些合理条件限制下, 一个连续时间信号能用其采样来完全给予表示, 连续时间信号的处理往往是通过对其采样得到的离散时间序列的处理来完成的。本节将详细讨论采样过程, 包括采样后, 信号的频谱将发生怎样的变换, 信号内容会不会丢失, 以及由离散信

号恢复成连续信号后应该具备哪些条件等。采样的这些性质对离散信号和系统的分析都是十分重要的。要了解这些性质，首先从采样过程的分析开始。

完成采样功能的器件称为采样器，采样器可以看作是一个每隔 T 秒闭合一次的电子开关 S ，开关每接通一次，便实现一次采样。在理想情况下，开关闭合时间无穷短。在实际采样器中，设开关闭合时间为 τ s, $\tau \ll T$ 。可以把采样过程看成是脉冲调幅过程， $x_a(t)$ 为调制信号，也就是输入的连续信号，被调制的脉冲载波是一串周期为 T ，宽度为 τ 的矩形脉冲信号，如图 1-9 (a) 所示，以 $p(t)$ 表示，因此有

$$x_p(t) = x_a(t)p(t)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时，便得到理想采样的情况，如图 1-9 (b) 所示。

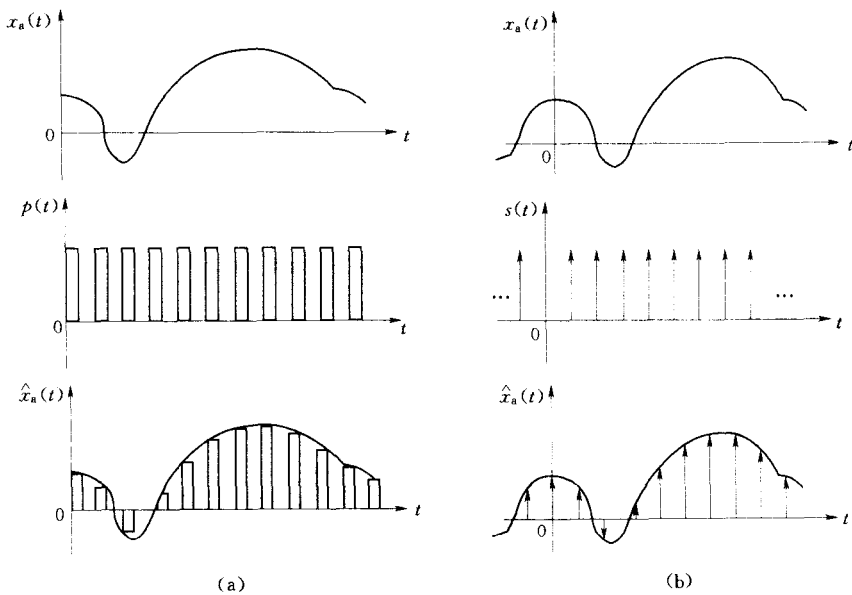


图 1-9 连续时间信号的采样

(a) 实际采样；(b) 理想采样

一、理想采样

理想采样就是假设采样开关闭合时间无限短，即 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况。此时，采样脉冲序列 $p(t)$ 变成冲激函数序列 $s(t)$ ，这些冲激函数准确地出现在采样瞬间，面积为 1。采样后，输出理想采样信号的面积（即积分幅度）则准确地等于输入信号 $x_a(t)$ 在采样瞬间的幅度，理想采样过程如图 1-9 (b) 所示，冲激函数序列 $s(t)$ 为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1-17)$$

以 $\hat{x}_a(t)$ 表示理想采样输出，以后我们以下标 a 表示连续信号（或模拟信号），如 $x_a(t)$ ，而以它的顶部符号（ \wedge ）表示它的理想采样，如 $\hat{x}_a(t)$ ，这样就可将理想采样表示为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)s(t) \quad (1-18)$$

把式 (1-17) 代入式 (1-18)，得

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t-nT) \quad (1-19)$$

由于 $\delta(t-nT)$ 只在 $t=nT$ 时不为零, 故

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \quad (1-20)$$

二、理想采样信号的频谱

现在来研究采样信号与模拟信号的频谱之间的关系。将 $s(t)$ 展成傅里叶级数, 得

$$s(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_r e^{jn_s t}$$

式中, $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为级数的基波频率, 系数 c_r 为

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) e^{-jn_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) e^{-jn_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-jn_s t} dt = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

于是 $s(t)$ 可表示为

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum e^{jn_s t} \quad (1-21)$$

$s(t)$ 的傅里叶变换为

$$s(j\Omega) = F\left(\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t}\right) = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \quad (1-22)$$

根据傅里叶变换的卷积定理, 可得出理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= F[x_a(t) \cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega) * \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \end{aligned} \quad (1-23)$$

由此可以看出, 理想采样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓, 周期为 Ω_s 。也就是说采样的频谱包括原信号频谱和无限个经过平移的原信号频谱, 这些频谱都要乘以系数 $\frac{1}{T}$, 如图 1-10 (a)、(b) 所示。

设原信号是最高频率为 Ω_0 的带限信号。从图 1-10 中可以看出, 当 $\Omega_s < 2\Omega_0$ 或 $f_s < 2f_0$ 时, 平移后的频谱必互相重叠, 重叠部分的频率成分的幅值与原信号不同, 如图 1-10 (d) 所示。这种现象称为“混叠”现象。如果原信号不是带限信号, 则“混叠”现象必然存在。在理想采样中, 为了使平移后的频谱不产生“混叠”失真, 则要求采样频率

必须大于两倍信号谱的最高频率 $\Omega_s > 2\Omega_0$ ，这就是奈奎斯特采样定理，即

$$f_s > 2f_0$$

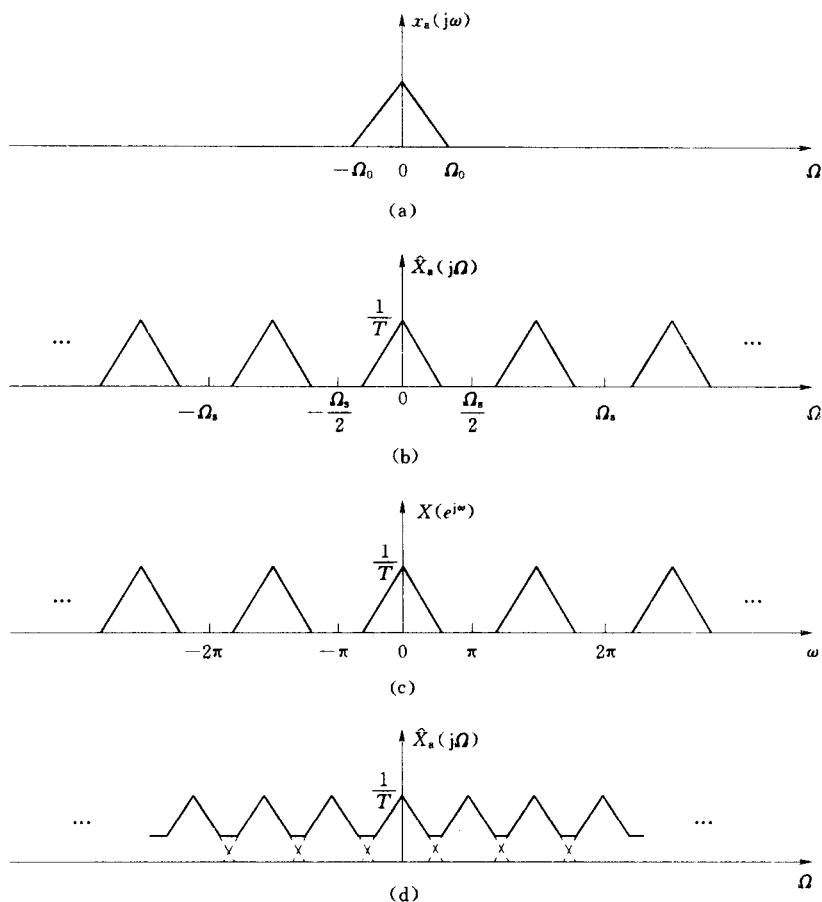


图 1-10 信号采样的频谱

采样频率的一半，即 $\Omega_s/2$ 称为折叠频率，等于信号最高频率两倍的采样频率（即 $\Omega_s = 2\Omega_0$ ）称为奈奎斯特频率。

三、采样信号的重建

如果理想采样满足奈奎斯特定理，即模拟信号谱的最高频率小于折叠频率

$$X_s(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega) & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

则采样后不产生频谱混叠，即有

$$\hat{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \quad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

故将采样信号通过一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器，这个理想低通滤波器应该只

让基带频谱通过，因而基带宽应等于折叠频率，此理想低通滤波器的频率特性为

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

采样信号通过这个滤波器后，就可滤出原模拟信号的频谱

$$Y_a = \hat{X}_a(j\Omega)H(j\Omega) = X_a(j\Omega) \quad (1-24)$$

因此，在输出端可以得到原模拟信号

$$y_a(t) = x_a(t)$$

下面讨论如何由采样值来恢复原来的模拟信号，即采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过 $H(j\Omega)$ 系统的响应特性。

理想低通滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \end{aligned}$$

由 $\hat{x}_a(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，即得理想低通滤波器的输出为

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau-nT) \right] h(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h(t-\tau) \delta(\tau-nT) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) h(t-nT) \end{aligned} \quad (1-25)$$

这里 $h(t-nT)$ 称为内插函数，即

$$h(t-nT) = \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1-26)$$

它的波形如图 1-11 所示，其特点为：在采样点 nT 上，函数值为 1；其余采样点上，函数值都为零。

由于 $y_a(t) = x_a(t)$ ，因此以上卷积结果也可以表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1-27)$$

式 (1-26) 称为采样内插公式，即信号的采样值 $x_a(nT)$ 经此公式而得到连续信号 $x_a(t)$ 。也就是说， $x_a(t)$ 等于各 $x_a(nT)$ 乘上对应的内插函数的总和。在每一采样点上，只有该点所对应的内插函数不为零，这使得各采样点上的信号值不变，而采样点之间的信号则由加权内插函数波形的延伸叠加而成，如图 1-12 所示。这个公式说明了，只要采样频率高于两倍信号的最高频率，则整个连续信号就可以完全用它的采样值来代替，而不会