1980

全国高等学校统一招生试题解答

津人民出版社

1980年全国高等学校
统一招生试题解答

天 津 人 民 出 版 社

1980年全国高等学校
统一招生试题解答
本 社 编
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道124号）
天津新华印刷一厂印刷 天津市新华书店发行
*
开本787×1092毫米 1/32 印张3 字数：60,000
一九八〇年十一月第一版
一九八〇年十一月第一次印刷
印数：1—400,000
统一书号：7072·1182
定价：0.25元

前　言

一、1980年全国高等学校统一招生的各科试题，侧重在考查考生对基础知识和基本技能的掌握以及灵活运用的情况。我们把它汇编成册，供应届毕业生和准备参加高考的青年复习参考。

二、为了便于阅读，我们采取试题与解答同时给出的编辑方法。各科填充题直接以黑体字填在空白处；英语试题的填充题比较简单，留给读者自己填写。

三、部分理科试题，除标准答案外，另予以多种解法，供读者参考；某些选择题的解答并附有说明，阐述理由，以使读者知其所以然。这些部分由杨连成、储礼悌、贾庆禄供稿，张士瑛、潘友于、朱翰云审订。

目　　录

数　　学

（理工农医类）

一、将多项式 x^5y-9xy^5 分别在下列范围内分解因式：

（1）有理数范围；（2）实数范围；（3）复数范围．

［解］（1）x^5y-9xy^5

$$=xy(x^4-9y^4)=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2);$$

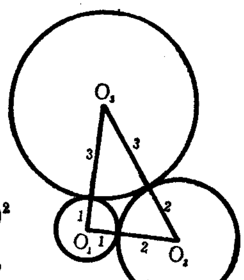
（2）x^5y-9xy^5

$$=xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y);$$

（3）x^5y-9xy^5

$$=xy(x+\sqrt{3}yi)(x-\sqrt{3}yi)(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y).$$

二、半径为1、2、3的三个圆两两外切，证明：以这三个圆的圆心为顶点的三角形是直角三角形．



［证］设$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的半径分别为1、2、3，因这三个圆两两外切，故有 $O_1O_2=1+2=3$, $O_2O_3=2+3=5$,

$O_1O_3=1+3=4$.

则$(O_1O_2)^2+(O_1O_3^2)=3^2+4^2=5^2=(O_2O_3)^2$

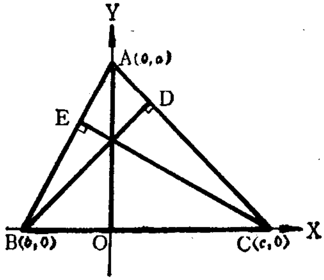
根据勾股定理的逆定理，或余弦定理，

$\triangle O_1O_2O_3$ 为直角三角形．

三、用解析几何方法证明三角形的三条高线交于一点．

［证一］ 取 $\triangle ABC$ 最长的一边 BC 所在的直线为 x 轴，经过 A 的高线为 y 轴，设 A、B、C 的坐标分别为

$$A(0, a), B(b, 0), C(c, 0).$$



根据所选坐标系，如图，有 $a>0, b<0, c>0$.

AB 的方程为 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，其斜率为 $-\frac{a}{b}$；

AC 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$，其斜率为 $-\frac{a}{c}$.

高线 CE 的方程为 $y=\frac{b}{a}(x-c)$； (1)

高线 BD 的方程为 $y=\frac{c}{a}(x-b)$. (2)

解(1)、(2)，得：$(b-c)x=0$. $\because$ $b-c\neq 0$，$\therefore$ $x=0$. 这就是说，高线 CE、BD 的交点的横坐标为 0，即交点在高线 AO 上，因此，三角形的三条高线交于一点.

［证二］ 由高线 CE 的方程 $y=\frac{b}{a}(x-c)$，

得 $$bx-ay-bc=0;\qquad(1)$$

由高线 BD 的方程 $y=\frac{c}{a}(x-b)$，

得 $$cx-ay-bc=0;\qquad(2)$$

高线 AO 的方程 $$x=0.\qquad(3)$$

由行列式

$$\begin{vmatrix} b & -a & -bc \\ c & -a & -bc \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0. \text{ 且 } \begin{vmatrix} c & -a \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$$

故得三角形三高线相交于一点.

四、证明对数换底公式: $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

(a、b、N 都是正数, $a\neq 1$, $b\neq 1$)

[证一] 令 $\log_b N=x$,

根据对数定义,

$$b^x=N.$$

两端取以 a 为底的对数,

$$\log_a b^x=\log_a N,$$

$$x\log_a b=\log_a N.$$

$\because$ $b\neq 1$, $\therefore$ $\log_a b\neq 0$, $\therefore$ $x=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

即 $$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

[证二] 令 $\log_b N=x$,

根据对数定义,

$$N=b^x=(a^{\log_a b})^x=a^{x\log_a b}.$$

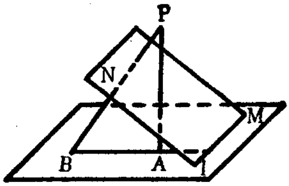
$\therefore$ $x\log_a b=\log_a N$,

$\because$ $b\neq 1$, $\log_a b\neq 0$.

$\therefore$ $x=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ 即 $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

五、直升飞机上一点 P 在地平面 M 上的正射影是 A. 从 P 看地平面上一物体 B (不同于 A), 直线 PB 垂直于飞机窗玻璃

所在的平面N(如图). 证明: 平面N必与平面M相交, 且交线 l 垂直于AB.



［证一］ 用反证法.

假如平面 N 与平面M 平行, 则 PA 也垂直于 N, 因此 PA 与 PB 重合, B 点与 A 点重合, 但这与题设矛盾, 所以平面 N 与平面M相交.

设平面N与平面M的交线为 l,

$\because$ $PA\perp$平面M, $\therefore$ $PA\perp l$,

又 $\because$ $PB\perp$平面 N, $\therefore$ $PB\perp l$,

$\therefore$ $l\perp$平面 PAB, $\therefore$ $l\perp AB$.

［证二］ 设 PA 与平面N交于 A', PB 与平面N交于 B'. 过 A' 点作平面$M'$$/\!\!/$平面$M$, 则平面 M' 不平行于平面 N, 否则 A'、B' 点重合, 则 A、B 重合, 与题设矛盾。$\therefore$平面M' 与平面N必相交于过 A' 点的直线 l'.

故平面N必与平面M相交于一直线 l.

$\because$ 平面M' 与平面M平行,

$\therefore$ $l' /\!\!/ l$,

又 因为$PB\perp$平面 N

$\therefore$ $l'\perp$平面 N, 故 $l\perp PB$.

又 $PA\perp$平面M, 故 $l\perp PA$.

$\therefore$ $l\perp$平面 PAB, 故 $l\perp AB$.

六、设三角函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\kappa x}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$, 其中 $\kappa\neq0$.

(1) 写出 $f(x)$的极大值M、极小值m与最小正周期T;

(2) 试求最小的正整数 k, 使得当自变量 x 在任意两个整数间(包括整数本身)变化时, 函数 $f(x)$至少有一个值是M与一个值是 m.

[解一] (1) $M=1$,

$$m=-1,$$

$$T=\frac{5\times 2\pi}{|k|}=\frac{10\pi}{|k|}.$$

(2) $f(x)$在它的每一个周期中都恰好有一个值是M与一个值是m, 而任意两个整数间的距离都$\geqslant 1$, 因此要使任意两个整数间函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与一个值是 m, 必须且只须使 $f(x)$ 的周期$\leqslant 1$.

即 $$\frac{10\pi}{|k|}\leqslant 1 \quad |k|\geqslant 10\pi=31.4\cdots$$

可见, $k=32$ 就是这样的最小正整数.

[解二] 由 $\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)=1$,

得 $$\frac{kx_1}{5}=2lk+\frac{\pi}{6},$$

$$kx_1=10l\pi+\frac{5}{6}\pi; \qquad (1)$$

由 $$\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)=-1,$$

得 $$\frac{kx_2}{5}=2l\pi-\frac{\pi}{2};$$

$$kx_2=10l\pi-\frac{25\pi}{6}. \qquad (2)$$

由(1),(2)得

$$|k(x_1-x_2)|=5\pi,$$

故要使对任意两个整数 $f(x)$ 至少有一个值是 M 和一个值是 m, 必须使

$$|k|\geqslant 10\pi,\quad \therefore\quad k \text{ 的最小正整数值为 } 32.$$

七、CD 为直角三角形 ABC 中斜边 AB 上的高, 已知 $\triangle ACD$, $\triangle CBD$, $\triangle ABC$ 的面积成等比数列, 求 $\angle B$(用反三角函数表示).

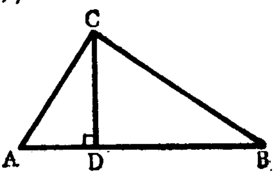
[**解一**] 设 $CD=h$, $AB=c$, $BD=x$,

则 $$AD=c-x.$$

因此 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{1}{2}h(c-x)$,

$\triangle CBD$ 的面积为 $\frac{1}{2}hx$,

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}hc$.



依题意 $$\left(\frac{1}{2}hx\right)^2=\frac{1}{2}h(c-x)\cdot\frac{1}{2}hc,$$

即 $$x^2=c(c-x),$$

$$x^2+cx-c^2=0,$$

$$x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4c^2}}{2}.$$

$\because$ 取负号不合题意.

$\therefore$ 取正号, 得 $$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}c.$$

又依直角三角形的性质, 有 $$AC^2=AD\cdot AB=c(c-x).$$

但 $$x^2=c(c-x),$$

$$\therefore \qquad AC^2=x^2,$$

$$\therefore \qquad AC=x=DB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}c.$$

在直角三角形 ABC 中，$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}c}{c}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

故 $$B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

［解二］ 由题设有 $(CD\cdot BD)^2=(CD\cdot AD)\cdot(CD\cdot AB)$,

$$\therefore \qquad BD^2=AD\cdot AB.$$

$$但 \qquad AC^2=AD\cdot AB,$$

$$\therefore \qquad BD=AC.$$

由 $$\operatorname{tg}B=\frac{CD}{BD},\ \cos B=\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{BD},$$

$$\therefore \qquad \operatorname{tg}B=\frac{CD}{BD}=\cos B$$

因而 $\sin B=\cos^2B$ 或 $\sin^2B+\sin B-1=0$.

解得 $$\sin B=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$\because$ B 为锐角, $\sin B>0$, $\therefore$ $\sin B\neq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\therefore \quad B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

［解三］ 设 $AD=y$, $BD=x$, $CD=h$,

由题设知

$$S^2_{\triangle CBD}=S_{\triangle ACD}\cdot S_{\triangle ABC},$$

$$\frac{1}{4}h^2x^2=\frac{1}{2}hy\cdot\frac{1}{2}h(x+y)$$

$$x^2=y(x+y)$$

$$x^2=xy+y^2. \qquad (1)$$

又 $$CD^2=AD\cdot BD,$$

即 $$h^2=xy \quad 或 \quad y=\frac{h^2}{x},$$

代入(1)，得

$$x^2=h^2+\left(\frac{h^2}{x}\right)^2,$$

即 $$x^4-h^2x^2-h^4=0,$$

解得 $$x=h\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

由 $$\mathrm{tg}B=\frac{CD}{BD}=\frac{h}{x}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

$$\therefore \quad B=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

八、已知 $0<\alpha<\pi$. 证明:

$$2\sin 2\alpha\leqslant \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

并讨论 α 为何值时等号成立.

[证一] 原不等式 $2\sin 2\alpha\leqslant \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$,

可写成 $$2\sin 2\alpha\leqslant\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

两端乘以正数 $\sin\alpha$, 问题化为证明

$$2\sin\alpha\sin 2\alpha\leqslant 1+\cos\alpha.$$

而 $$2\sin\alpha\sin 2\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha=4(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$=4(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\cos\alpha.$$

所以问题又化为证明不等式

$$(1+\cos\alpha)[4(1-\cos\alpha)\cos\alpha-1]\leqslant 0.$$

即 $$(1+\cos\alpha)\left[-4\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right]\leqslant 0.$$

以上的推理每一步都可逆，∴ 不等式得证.

∵ $$0<\alpha<\pi,$$

∴ 等号成立当且仅当 $\cos\alpha-\dfrac{1}{2}=0.$

即 $\alpha=60°.$

［证二］ 令 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=t>0$, $\left(\because\ 0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}\right)$

原不等式变为

$$2\cdot 2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{t}.$$

以 $t(1+t^2)^2>0$ 乘以不等式两端，问题变为证明

$$8t^2(1-t^2)\leqslant(1+t^2)^2,$$

即 $$-9t^4+6t^2-1\leqslant 0,$$

即 $$-(3t^2-1)^2\leqslant 0.$$

以上的推理每一步都可逆，∴ 不等式成立.

当且仅当 $t^2=\dfrac{1}{3}$ 或 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时，即 $\alpha=60°$ 时，原不等式变为等式.

［证三］ 将原不等式两端同乘以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，则问题化为证明不等式

$$2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\cos\frac{\alpha}{2}.$$

而 $2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=2\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$$=4\cdot\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=8\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=8\cos\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{8}-2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

$$=\cos\frac{\alpha}{2}-16\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\leqslant\cos\frac{\alpha}{2}.$$

其中“$\leqslant$”符号是由于 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, $\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\geqslant0$.

上式中的等号当且仅当 $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}=0$ 时成立,

即 $$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}舍去\right)$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

[证四] 原不等式 $2\sin 2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

可写成 $$2\sin 2\alpha\leqslant\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

两边除以正数 $\sin\alpha$, 问题化为证明

$$2\cdot2\cos\alpha\leqslant\frac{1}{1-\cos\alpha}.$$

$$\because\quad 1-\cos\alpha>0,\ (0<\alpha<\pi)$$

又等价于

$$4(1-\cos\alpha)\cos\alpha\leqslant 1,$$

即
$$(2\cos^2\alpha-1)^2\geqslant 0.$$

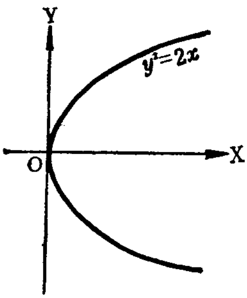
∴　原不等式成立.

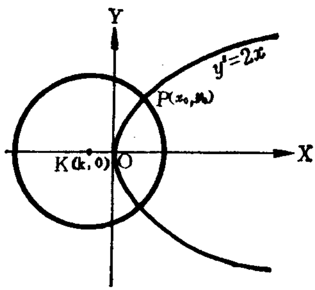
当　$2\cos^2\alpha-1=0$,　即　$\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$,

舍去$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, 故取 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时, 等式成立.

九、抛物线的方程是 $y^2=2x$, 有一个半径为1的圆, 圆心在 x 轴上运动. 问这个圆运动到什么位置时, 圆与抛物线在交点处的切线互相垂直.

(注: 设 $P(x_0, y_0)$是抛物线 $y^2=2px$ 上一点, 则抛物线在 P 点处的切线斜率是$\dfrac{p}{y_0}$.)





[**解一**]　设圆的方程为

$$(x-k)^2+y^2=1.$$

再设圆与抛物线的一个交点为 $P(x_0, y_0)$.

在P点圆半径的斜率为$\dfrac{y_0}{x_0-k}$.

在P点抛物线的切线斜率为$\frac{1}{y_0}$.

在P点抛物线的切线与圆的切线垂直，必须且只须圆的半径与抛物线在P点相切.

$$\therefore \quad \frac{1}{y_0}=\frac{y_0}{x_0-k}. \qquad (1)$$

因$P(x_0, y_0)$是圆与抛物线的交点，

$$\therefore \quad y_0^2=2x_0, \qquad (2)$$

$$(x_0-k)^2+y_0^2=1. \qquad (3)$$

由(1)、(2)式消去y_0，得$x_0=-k$.

将(2)代入(3)，得 $(x_0-k)^2+2x_0-1=0$.

将$x_0=-k$代入，得$4k^2-2k-1=0$,

$$\therefore \quad k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

由于抛物线在y轴的右方，所以$k=-x_0<0$. 故根号前应取负号. 即

$$k=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

故所求圆的方程为$\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2+y^2=1$.

由于对称性，圆与抛物线的另一交点$(x_0, -y_0)$处的切线也互相垂直.

［解二］ 抛物线过点$P(x_0\ y_0)$的切线为$y=\frac{1}{y_0}x+\frac{x_0}{y_0}$，必过圆心.

故得 $\frac{k}{y_0}=-\frac{x_0}{y_0}$, $\quad x_0=-k$.

以下解法同前.