张宝林　王和亭

一元n次方程能用公式解吗？

中学生课外阅读丛书

山西人民出版社

一元n次方程能用公式解吗？

张宝林　王和亭

山西人民出版社

一元n次方程能用公式解吗

张宝林　王和亭

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）
山西省新华书店发行　山西省七二五厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：$4\frac{1}{8}$　字数：86千字
1979年12月第1版　1980年10月第1次印刷
印数：1—12,000册

书号：7088·848　定价：0.35元

出版说明

为了提高中学教学质量，扩大中学生的知识领域，满足广大中学生课外阅读的需要，以适应全党、全国工作重点向社会主义现代化建设转移的新形势，我们特编辑出版这套中学生课外阅读丛书。丛书的范围，包括数、理、化、文、史、地等中学阶段设置的基础学科；丛书的内容，以中学教材为基础，适当增添部分必要的基础知识。这套丛书主要供在校的中学生阅读，也适合具有中等文化程度的其他青年阅读。

山西人民出版社

序

法兰西年轻的数学家伽罗瓦，在前辈们研究成果的基础上，创造性地回答了历时近三百年之久，虽经许多数学大师努力而未获解决的问题——方程能用根式解的充要条件。他引入的数域，不可约多项式、置换群以及把三者结合起来的新思想，不仅解决了方程能不能用根式解这个大难题，而且推动了整个代数学的发展，使代数学进入了一个极为广阔的领域。他第一次引进的概念——群，已发展为最富有生命力的数学分支之一。群的初步概念也逐渐被认为是中学生必需受到的数学教育内容之一。

我们写这本小册子，是想通过它粗线条地描述出伽罗瓦理论的产生、形成及其在方程根式解上的应用，使那些对数学有兴趣的高中学生与大学数学系一、二年级的学生，对于方程的理论及伽罗瓦理论与其应用有一点初步的知识，扩大他们的视野和了解关于这个问题的一点历史知识，这些对他们进一步理解和学习数学是有所裨益的。

我们还希望这本小册子能对中学数学教师进一步研究和了解代数教材有所帮助。

在编写过程中，我们力求叙述简明、易懂、通俗、生动。不过由于水平所限，难免有不妥甚至错误之处，欢迎批评指正。

作　者

目　　录

引　子

建华和利明是两个很喜欢数学的同学，一天他们就方程的求根问题展开了热烈的讨论。

建华：一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

有求根（解）公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

但这里有个限制：$b^2-4ac\geqslant0$。在这个限制下许多二次方程不能解了，甚至象$x^2+1=0$这样简单的方程也不能解，这岂不是使上述求根公式失去了普遍意义吗？我总觉得象$x^2+1=0$这样简单的方程应该能解才合乎逻辑，才能满足理论和实践的需要。

利明：是呀！我也考虑过这个问题。你还记得在有理数范围内方程$x^2-2=0$不是也不能解吗？但是将有理数扩大至实数后方程$x^2-2=0$就能解了。是不是用类似的方法也能解决你所提的问题呢？另外，你看下面这个三次方程：

$$x^3+x^2-3x-3=0$$

要求它的根，我只能先将它左端的多项式x^3+x^2-3x-3分

解为：

$$x^3+x^2-3x-3=x^2(x+1)-3(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-3)=(x+1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})。$$

尔后由

$$(x+1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

得出原方程的三个根为：

$$x_1=-1,\quad x_2=-\sqrt{3},\quad x_3=\sqrt{3}。$$

可是遇到方程左端我怎么也不能分解的多项式，那就只好望洋兴叹了！

建华：是呀！我们所解的三次方程大都是用因式分解法，看不出求得的根与系数有什么关系，要是能像二次方程那样对于三次、四次以及更高次方程也能有一个通过系数的加、减、乘、除与开方诸运算把根求出来那该有多好！

利明：能这样求出方程的根固然好，即使不能这样求出，但是能够通过方程的系数求得根的一些性质，例如根在什么范围内、有多少个以及能任意精确地求出根的近似值也是好的。

建华：我们所学的有关方程的知识太少了，看到的参考资料也太少了，这样的苦思瞑想恐怕弄不出什么名堂来，还是去问问刘老师吧！

于是建华和利明到了刘老师的住处，刘老师仔细地听完了他们的讨论，笑了笑说："你们不简单哪，你们可提出了个大问题。"

"大问题？"建华与利明莫名其妙地同声发问。

“是啊！”你们提到的这些问题，其中有的远在公元前四世纪就有人研究过。特别是从十六世纪以来，许多数学大师都致力研究解决，像牛顿、莱布尼兹、欧拉、高斯、达郎贝尔、拉格兰日、阿贝尔等都曾在这些问题的研究上付出过巨大的劳动，获得过成就。你们说的那个把方程的根用其系数表示出来的问题，从十六世纪提出来以后，到十九世纪三十年代经历了约三百年才由法国青年数学家伽罗瓦在前辈们研究的基础上解决了，这还不是一个大问题吗？”

建华与利明正听得入神，只见刘老师站起来从书架上拿出一本书说：“你们要想知道这个问题是怎样解决的，就看看这本书吧！”

建华和利明接过那本书，只见书皮上印着“一元n次方程能用公式解吗？”强烈的求知渴望使他俩聚精会神地看起来……。

第一章 基 础

§1 虚幻的i降临人间

亲爱的读者，让我们先提出一个问题：方程

$$x^2-2=0 \qquad (A)$$

有解还是没有解？

在有理数范围内，这一问题的答案是没有解，因为任何一个有理数a的平方不等于2，从而$a^2-2\neq 0$。

在实数范围内，答案正好与上面的相反，方程（A）有解，解是 $x=\pm\sqrt{2}$

通过以上讨论，我们能够发现很有用的东西。首先，解方程时必需考虑“数的范围”，一个方程在某种“数的范围”内无解，但在另一种“数的范围”内可以有解，撇开“数的范围”去讨论方程有解还是无解，是不能确定的。其次，随着方程求解的需要，“数的范围”应该不断扩大，从而使在某种“数的范围”内无解的方程，在扩大了的“数的范围”内有解。

现在我们讨论方程

$$x^2+1=0。 \qquad (B)$$

这个方程在实数范围内显然无解，因为对于任何一个实数α来说，α^2总是正数，从而

$$\alpha^2+1\neq 0。$$

但是如果我们扩大一下实数的范围，引入一个不属于实数范围的新数“i”，作为－1的平方根：

$$i=\sqrt{-1}$$

亦即 $i^2=-1$，则$x=i$是方程（B）的根。

可是这也引起一些新问题，我们应该怎样理解数的这个新成员i？i的意义是什么？既然－1有平方根i，那么一般负数似乎也应有平方根，它们的意义又是什么？为了明确这些问题，让我们一起到这种新数的王国中遨游一番吧！不过得先把时间转回到十六世纪。

十六世纪初叶，数学家们对负数是很不友好的，他们认为负数是荒诞的，不能接受的。由此可以想象到他们对负数平方根（以后叫做虚数）是怎样拒之于千里之外了。

第一个引入虚数$\sqrt{-15}$（上面已经说明负数的平方根叫做虚数）并把它与实数结合起来，成为怪模怪样的表达式$5+\sqrt{-15}$（以后把这种形式的数叫做复数）的是意大利数学家和物理教授卡丹（1501—1576年）。为了解决把10分为两个数的和，并且使这两个数的乘积等于40这一问题，卡丹在他自己的著作《大法》里列出了方程：

$$x(10-x)=40$$

并认为答案是$5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$。这是因为

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10$$

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=5^2-(\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15})$$

$$=25-(-15)=25+15=40$$

卡丹虽有勇气写出复数，但却没有勇气承认它。他自己说这两个表达式是虚构的，不可思议的。

著名科学家欧拉（1707—1783年）认为复数是有用的。他所谓的用处就是可以利用它解决象卡丹提出来的那样问题。例如：把12分成两部分，并使这两部分的乘积为40。他对这一问题的答案是：$6+\sqrt{-4}$，$6-\sqrt{-4}$。但欧拉和卡丹一样也认为这是虚幻的，不可能有的，因而上述问题也是不能解的。

欧拉在1770年所著德文版的《对代数的完整的介绍》中说："因为所有已认识的数或者大于零，或者小于零，或者等于零，所以负数的方根不可能属于实数，因此……它们是想象的，不可能有的。"

微积分创建者之一莱布尼兹（1646—1716年）对虚数评论说："虚数是神灵美妙与惊奇的避难所，它几乎是又存在又不存在的两栖物。"甚至著名科学家笛卡儿（1596—1650年）、牛顿（1642—1727年）也认为虚数是想象的、没有实际意义的。虚数就是这样在非议与责难声中徘徊于数系之外达二百年之久。

但是，尽管虚数遭到了种种非难和冷遇，它还是毫不泄气地在代数方程的求解中、在积分计算中、在对数中到处露头，它不屈不挠地逐渐地使自己成为数学理论中无法避免的东西，在实践过程中，在现实的数学发展过程中，虚数自身也得到了发展，致使数学家们对它不得不另眼相看。

欧拉虽然对虚数有所非议，然而对复数理论的建立还是大有功绩的，第一个写出$i=\sqrt{-1}$的正是欧拉。这样一来，虚数$\sqrt{-c}$（$c>0$）就是形如bi（$b=\sqrt{c}$，$i=\sqrt{-1}$，

$\sqrt{-c}=bi$）的数，复数就是形如$a+bi$的数，这里a、b都是实数。当$a=0,b\neq 0$时，复数$a+bi$就成为虚数bi。当$b=0$时，复数$a+bi$就成为实数a。复数常用希腊字母α，β，γ，……等表示。两复数$a+bi$，$c+di$，当且仅当$a=c$，$b=d$时才认为相等。

如同实数那样，复数也有加、减、乘、除与开方等运算。复数的运算规则如下：设$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$，则

（1）加法：

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

例如：$(2-3i)+(-1+5i)=[2+(-1)]+[(-3)+5]i$

$=1+2i$

$$i+(8-4i)=(0+8)+[1+(-4)]i=8-3i$$

（2）减法：

$$\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

例如：$(4-i)-(-1+3i)=[4-(-1)]+[(-1)-3]i$

$=5-4i$

$$i-(2+i)=(0-2)+(1-1)i=-2+0\cdot i=-2$$

（3）乘法：

$$\alpha\cdot\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

例如：$3i\cdot 5i=(0-15)+(0+0)i=-15$

$(1-2i)(3+5i)=[3-(-2)\cdot 5]+[5+(-2)\cdot 3]i$

$=13-i$

$2(4+i)=(2+0\cdot i)(4+i)=(8-0)+(2+0)i$

$=8+2i$

$i^2=-1,i^3=-i,i^4=1,i^{49}=i^{4\cdot 12+1}=(i^4)^{12}\cdot i=i$

$i^{4k}=1,i^{4k+1}=i,i^{4k+r}=i^r$。

（4）除法：当$\beta=c+di\neq 0$时*

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(a+bi)(c+(-d)i)}{(c+di)(c+(-d)i)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

例如：$$\frac{1+2i}{2-3i}=\frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{(2-6)+(4+3)i}{2^2+3^2}$$

$$=-\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$$

$$\frac{3i}{5i}=\frac{(3i)(-5i)}{(5i)(-5i)}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{-2}{7i}=\frac{(-2)(-7i)}{(7i)(-7i)}=\frac{14i}{7^2}=\frac{2}{7}i$$

这里还应该补述一件事，那就是威塞耳(1745—1818年)与阿耳刚（1778—1822年）的工作。他们分别于1797及1806年给出复数的几何解释（方法多少有点差异）。按照他们的解释，i作为平面直角坐标系中y轴上的虚单位，这样，每一虚数bi能用y轴上的向量表示出来，每一实数a能用x轴上的向

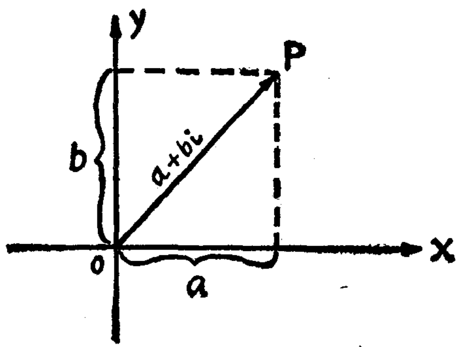

图 1

* ——这时当然有$c-di\neq o$

量表示出来，而每一复数a＋bi则能用由原点引出的向量OP表示出来。这个表示复数a＋bi的向量的横坐标是a，纵坐标是b（见图1）。例如表示复数3i，4－2i，5＋2i，－1－4i的向量如下图：

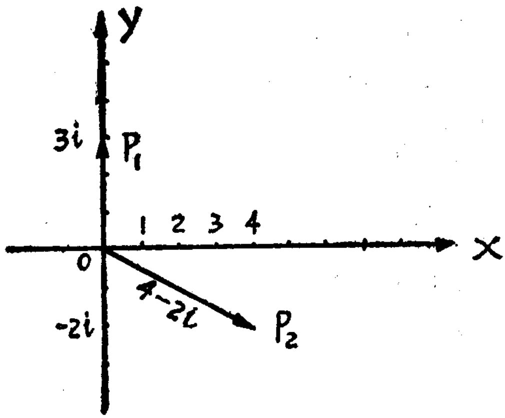

图 2

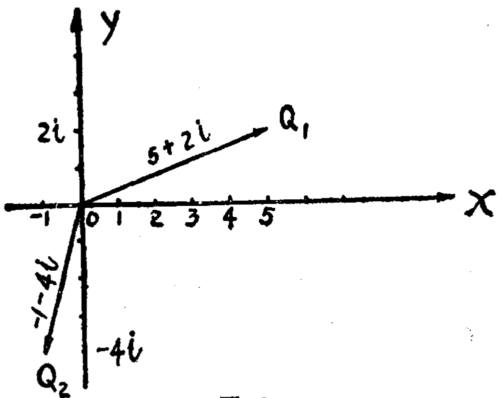

图 3

与实轴相对应，y轴叫做虚轴，建立了这种座标系的平面叫做复平面。

经过这一解释，我们终于看清了虚数的真实面目。这个曾经长期被人们认为虚无漂渺的“虚数”，原来也具有实实在在的意义。

即使这样，由于历史上的原因，虚数的名称一直沿用至今。虽然“虚数”及“复数”都是实实在在的数，它与实数相比毫无逊色之处。正如“无理数”与“有理数”相比，“无理数”并不“无理”一样，“虚数”也不“虚”，“虚”字对它说来实在有点冤枉。

复数的四则运算同样可以得到几何解释。设向量OP表示复数$a+bi$，向量OQ表示复数$c+di$，以OP、OQ为边作一平行四边形，它的对角线OR就表示$(a+bi)+(c+di)$。实际上，$ON=a$，$OL=c$，由初等几何易知$NK=OL$，因此

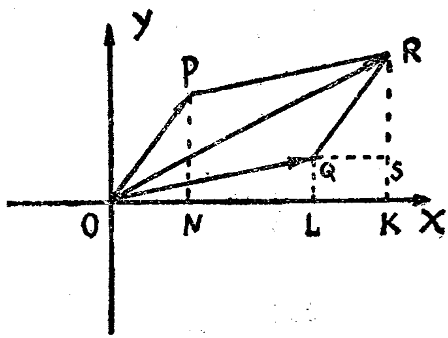

图 4

$$OK=ON+NK=ON+OL=a+c$$

另一方面，$NP=b$，$LQ=d$，并且由初等几何易知$KS=LQ$，$SR=NP$，因此

$$KR=KS+SR=NP+LQ=b+d$$

既然向量OR在x轴上的坐标为$a+c$，在y轴上的坐标为

$b+d$，故向量OR表示复数$(a+c)+(b+d)i$；类似地可以对减法作出几何解释。

利用复数的几何表示，可以把复数$a+bi$表示成所谓的三角形式。实际上，从下图可以看出：

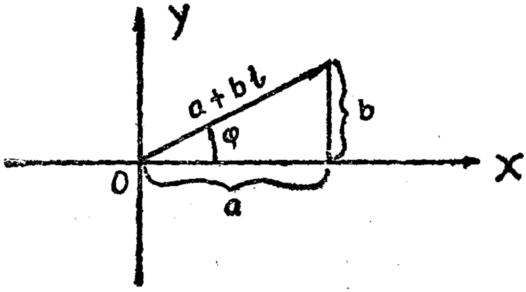

图 5

$$a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi, \quad b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi,$$

因此 $a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$。

上式中的φ以及$\varphi+2k\pi$（$k=0$，±1，±2，……）都叫做复数$a+bi$的幅角；上式中的$\sqrt{a^2+b^2}$叫做复数$a+bi$的模，记为$|a+bi|$*。很明显复数$a+bi$的模就是表示它的向量的长。在复数的三角形式中幅角一般取为最小非负幅角，特别地，实数a的幅角取为0，虚数的幅角取为$\frac{\pi}{2}$。

例1 求复数$a=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$，1与i的三角形式。

*——当$b=0$时复数$a+bi$的模$|a+bi|$就是实数a的绝对值。