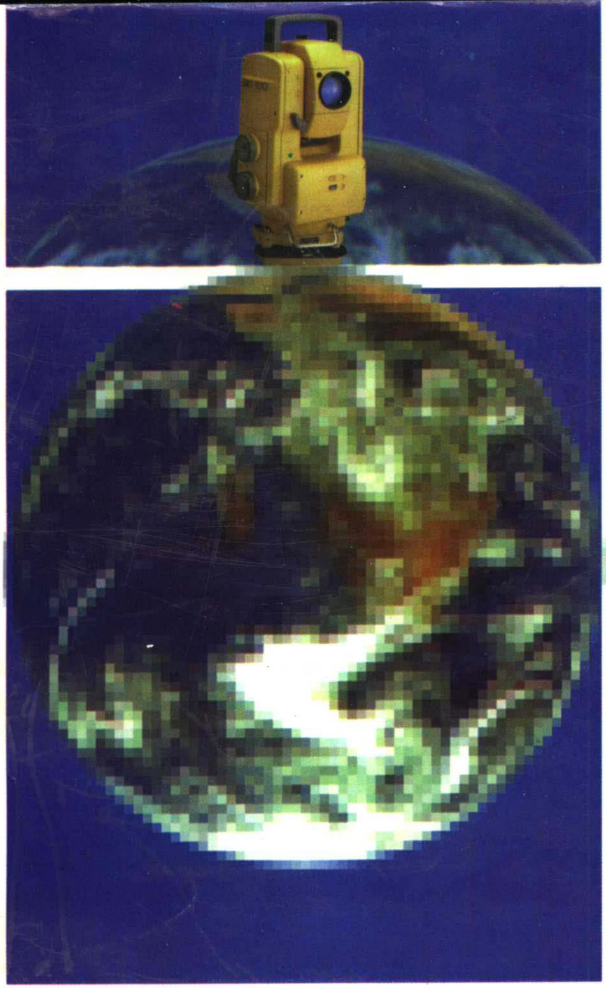

物理大地测量学基础

郭俊义 编著

武汉测绘科技大学出版社

WLDDCLX

物理大地测量学基础

郭 俊 义 编著

武 汉 测 绘 科 技 大 学 出 版 社

（鄂）新登字14号

图书在版编目(CIP)数据

物理大地测量学基础/郭俊义编著．—武汉：
武汉测绘科技大学出版社，1994.11(2000.1重印)
ISBN 7-81030-363-5

Ⅰ.物…　Ⅱ.郭…　Ⅲ.物理大地测量学—基础知识
Ⅳ.P223

中国版本图书馆数据核字(1999)第78595号

武汉测绘科技大学出版社出版发行
丹江口市印刷厂印刷
开本：850×1168mm　1/32　印张：9.75　字数：244千字
1994年11月第1版　　2000年1月第2次印刷
定价：22.00元

内容简介

本书系统地论述了物理大地测量学的基础知识，偏重于基础理论，以便为读者进一步深入学习本课程的理论并从事科学研究打下坚实的基础。本书的前四章是基础理论，较系统地介绍了位理论和球函数，特别强调了数学上的严密性，每一条定理都作了严格的证明；第五章是地球的正常重力场理论，避开椭球函数导出了所有的严密公式，相对比较容易掌握；第六章至第八章是地球重力场的有关理论；第九章讨论实际计算的问题。与现有同类著作相比，本书主要有两个特点：一是强调了基础理论，二是强调了数学推导的严密性。本书可作为大地测量、地球物理专业本科高年级学生及研究生的教学参考书，也可供科研人员参考。

重印说明

此次重印改正了上次印刷中发现的错误，内容未作调整。作者非常感谢武汉测绘科技大学地学测量工程学院的操华胜副教授和同济大学测量系的伍吉仓副教授，他们在教学中为本书纠正了许多错误。同时，作者借这次重印的机会向给予作者鼓励的所有读者表示最衷心的感谢。

郭俊义

1999 年 12 月 15 日

序　言

1991年初，管泽霖、宁津生两位教授召集我们地球动力学研究室的几位青年教师，安排我们改编他们合编的教材《地球形状及其外部重力场》，经多次讨论确定了新的内容目录，并作了分工。后来，由于几位青年教师先后出国学习，改编工作未能如期完成，错过了出版日期，未能按计划出版。当时，我的任务是改写地球形状与外部重力的理论部分和重力固体潮部分。在深知原计划的书不能出版时，我已经完成了一些改编工作，这本书就是以此为基础，将内容作了一些调整，加深了基础理论，去掉了重力固体潮部分，增添了最后一章实际计算方法的内容而成的。

与原来改编的教材不同，本书的目的是为读者进一步深入学习这门学科打下比较踏实的理论基础，所以，除注意物理概念的明确之外，也很注意数学推导的严密和基本内容的完整和系统，特别是对球函数的论述比较彻底。虽然作者努力使本书有一些特色，并切实对有志于深入学习这门学科的学生有所帮助，但真正能做到的并不一定像作者所期望的那样，内容的选择和安排并不一定合理，错误之处也在所难免，恳切希望读者批评指正。

在本书的编写过程中，作者得到晁定波、管泽霖，宁津生各位教授和武汉测绘科技大学地球科学与测量工程学院领导的大力支持和帮助，李金文、邓晓丽的两位讲师提出了许多有益的建议，武汉测绘科技大学出版社为本书的最后出版做了大量细致的工作，作者在此表示衷心的感谢。

郭俊义

1994.10.20

目 录

第一章　重力场的概念和性质

§1.1　万有引力、离心力和重力

(一)万有引力

万有引力是质量与质量间的一种相互吸引力，简称为引力。

在图 1-1 中，设有两个质量分别为 m 和 m' 的质点 M 和 P，它们的直角坐标分别为(a,b,c)和(x,y,z)，用 $\vec{r}$ 表示由 M 到 P 的相对位矢，

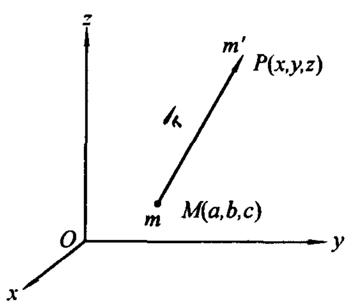

图 1-1

$$\vec{r}=(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}, \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

其中 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 为沿 x、y、z 轴的单位矢量，其模为

$$r=[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

则 m 对 m' 的引力为

$$\vec{F}=-f\frac{mm'}{r^3}\vec{r},\tag{1-1-3}$$

式中的负号表示$\vec{F}$与$\vec{r}$的方向相反，f为万有引力常数，其大小由实验测得为$6.670\times10^{-8}\mathrm{cm^3\cdot g^{-1}\cdot s^{-2}}$。这一定律是牛顿发现的，常叫作牛顿万有引力定律。

我们称m为吸引质量，m'为被吸引质量，当被吸引质量为单位质点时，即当$m'=1$时，

$$\vec{F}=-f\frac{m}{r^3}\vec{r}.\tag{1-1-4}$$

以后，我们总是研究吸引质量对单位被吸引质点的引力，并且把引力当作单位被吸引质点坐标的函数。将(1-1-1)代入(1-1-4)得引力的三个分量

$$\left.\begin{aligned}F_x&=-f\frac{m}{r^3}(x-a)\\F_y&=-f\frac{m}{r^3}(y-b)\\F_z&=-f\frac{m}{r^3}(z-c)\end{aligned}\right\}.\tag{1-1-5}$$

若吸引质点不是一个，而是n个，质量分别为m_1、m_2、…、m_n，由它们到单位被吸引质点的相对位矢分别为$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、…、$\vec{r}_n$，其模分别记为r_1、r_2、…、r_n，则该质点系对单位被吸引质点的引力是

$$\vec{F}=-f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}\vec{r}_i,\tag{1-1-6}$$

可见，引力满足矢量的加法规则，这是由实践证实的。将(1-1-1)代入(1-1-6)得质点系引力的三个分量

$$\left.\begin{aligned}F_x&=-f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}(x-a_i)\\F_y&=-f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}(y-b_i)\\F_z&=-f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^3}(z-c_i)\end{aligned}\right\}.\tag{1-1-7}$$

若吸引质量集中在如图 1-2 所示的表面 σ 上，我们称其为质面，在该面上坐标为(a,b,c)的 M 点处取一面元 $\mathrm{d}\sigma$，该点的面密度用 μ 表示，它是 a、b、c 的函数，则该质面在坐标为$(x、y、z)$的 P 点处产生的引力是

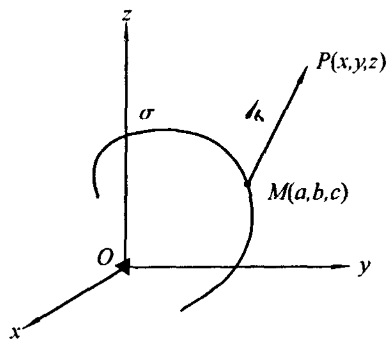

图 1-2

$$\vec{F} = -f\int_{\sigma}\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\mathrm{d}\sigma, \tag{1-1-8}$$

其中 $\vec{r}$为由 M 到 P 的相对位矢，r 为 $\vec{r}$的模，它们由(1-1-1)和(1-1-2)给出。要注意，上式中的积分变量是 a、b、c，x、y、z 在积分号下被当作常数，$\vec{F}$是 x、y、z 的函数。将(1-1-1)代入(1-1-8)得质面引力的三个分量

$$\left.\begin{aligned}F_x &= -f\int_{\sigma}\frac{\mu}{r_3}(x-a)\mathrm{d}\sigma\\ F_y &= -f\int_{\sigma}\frac{\mu}{r^3}(y-b)\mathrm{d}\sigma\\ F_z &= -f\int_{\sigma}\frac{\mu}{r^3}(z-c)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}\right\}. \tag{1-1-9}$$

在一般情况下，吸引质量不是集中在一个点或一个面上，而是充满某一空间区域，我们叫它质体。当质体的大小相对于我们所研

究的问题尺度很小时，可将它近似地当作质点对待；当质体是一薄壳，壳的厚度相对于问题的其它尺度很小时，可将它近似地当作质面对待。例如，在研究地面上的引力时，可将日、月及其它远离地球的天体当作质点，但必须把地球当作质体。在图 1-3 中，设质体占据空间区域 τ，在质体内部坐标为 (a,b,c) 的 M 点处取体元 $\mathrm{d}\tau$，该点处质体的体密度为 δ，它依赖于 a、b、c，则质体在坐标为 (x,y,z)

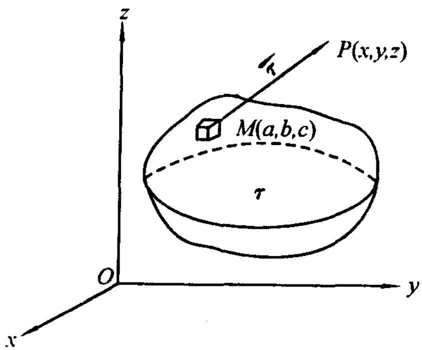

图 1-3

的 P 点处的引力是

$$\vec{F} = -f\int_\tau \frac{\delta}{r^3}\vec{r}\,\mathrm{d}\tau, \tag{1-1-10}$$

其中 $\vec{r}$ 为由 M 到 P 的相对位矢，r 为 $\vec{r}$ 的模，分别由(1-1-1)和(1-1-2)给出。上式中的积分变量仍然为 a、b、c，x、y、z 为参数，它们是函数 $\vec{F}$ 的自变量。将(1-1-1)代入(1-1-10)得质体引力的三个分量

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\int_\tau \frac{\delta}{r^3}(x-a)\,\mathrm{d}\tau \\ F_y &= -f\int_\tau \frac{\delta}{r^3}(y-b)\,\mathrm{d}\tau \\ F_z &= -f\int_\tau \frac{\delta}{r^3}(z-c)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\}. \tag{1-1-11}$$

(二)离心力

在旋转坐标系中讨论问题时，应当考虑一个惯性力——离心力。离心力不是物质力。如图 1-4 所示，设坐标系绕 z 轴以角速率 ω 转动，则坐标为(x,y,z)的 P 点的离心力是

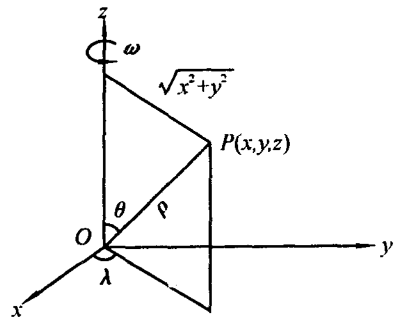

图 1-4

$$P = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 \rho \sin\theta, \qquad (1\text{-}1\text{-}12)$$

其方向垂直于自转轴向外，用矢量的形式可将它写成

$$\vec{P} = \omega^2 (x\vec{i} + y\vec{j}). \qquad (1\text{-}1\text{-}13)$$

可以看出，P 随到自转轴距离的增大而增大。

（三）重力

重力是指相对于地球固定的单位质点所受的力，由于地球在自转，所以重力是引力和离心力的和，即

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{P}, \qquad (1\text{-}1\text{-}14)$$

其中 $\vec{F}$是指地球及所有其它天体质量产生的引力，$\vec{P}$是指相对于地球瞬时角速度的离心力。在以后，我们将对重力的定义加以限制，即凡谈到重力，我们总是指地球质量产生的引力与相对于地球的平均角速度及平均地极的离心力之和。所谓地极是指过地球质心的自转轴与地面的交点，它是随时间变化的，地球的自转角速度也随时间变化，我们这里引用平均角速度与平均地极是为保证固

定点的离心力不随时间变化。另外，我们假定地球的质量分布也不随时间变化，则地球引力不随时间变化。因而我们所指的重力也不随时间变化。

重力仪器测量的是单位质点在测量时刻所受的真正重力，而不是我们前面定义的不随时间变化的重力，所以需要对重力测量值加以改正，这些改正数应包含相对地球运动的天体的影响、由于这些天体的影响而造成地球形状变化的影响、大气的影响、地球自转角速度的变化和极移的影响等。是否加某一项取决于重力测量的精度。

事实上，地球内部的质量分布也在随时间变化，我们假设它不变只是为将问题看成与时间无关来处理，在下文中，凡未特别指明与时间相关的地方均认为与时间无关，在需要考虑随时间变化的因素时，我们会特别声明。

（四）单位

万有引力、离心力和重力都是指单位质点所受的力，所以它们的大小与相应的加速度相等，它们的单位也采纳加速度的单位，我们以 $\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$作基本单位，称作伽，记为 gal，10^{-3}伽称作毫伽，记为 mgal，10^{-3}毫伽称作微伽，记为 μgal，伽是为纪念意大利天文学家伽利略而命名的。

（五）场的概念

如果某一空间区域 V 中的每一点都有唯一的一个数量或矢量与之对应，则我们说在 V 中给定了一个数量场或矢量场。例如温度、密度等给出一个数量场，力、磁场强度等给出一个矢量场。与引力、离心力和重力相关的场分别称为引力场、离心力场和重力场。

场也是一个物理概念，是一种客观存在，例如，任意质量都产生引力场，当将其它的质量置于这个引力场时，就会受到引力的作用。

§1.2 引力位、离心力位和重力位的概念

(一)力位的概念

设

$$\vec{f}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k} \tag{1-2-1}$$

是一个力场,若存在标量函数 ψ,使

$$f_x=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad f_y=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad f_z=\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1-2-2}$$

或用矢量写成

$$\vec{f}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}=\mathrm{grad}\psi, \tag{1-2-3}$$

则称 ψ 为力 $\vec{f}$的力位。$\mathrm{grad}\psi$ 叫 ψ 的梯度,所以力是力位的梯度。

更进一步地讲,力位相对任意方向的方向导数就等于力沿该方向的投影。设某一方向 l 的方向余弦为 $\cos(l,x)$、$\cos(l,y)$、$\cos(l,z)$,则力 $\vec{f}$沿 l 方向的投影就是$\vec{f}$的三个分量 f_x、f_y、f_z 沿该方向的投影之和,即

$$f_l=f_x\cos(l,x)+f_y\cos(l,y)+f_z\cos(l,z), \tag{1-2-4}$$

由方向导数的性质

$$\frac{\partial\psi}{\partial l}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(l,x)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(l,y)+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(l,z) \tag{1-2-5}$$

和力位的定义式(1-2-2)便得

$$f_l=\frac{\partial\psi}{\partial l}, \tag{1-2-6}$$

这就是我们所要证明的。

(二)质点、质点系、质面和质体的引力位

质点的引力位是

$$V=f\frac{m}{r}=f\frac{m}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{1-2-7}$$

要验证其正确性,只需验证 V 满足引力位的定义,事实上,