

物理大地测量学基础

郭俊义 编著

武汉测绘科技大学出版社

W L D D C L X

物理大地测量学基础

郭 俊 义 编著

武汉测绘科技大学出版社

/

(鄂)新登字 14 号

图书在版编目(CIP)数据

物理大地测量学基础/郭俊义编著. —武汉:
武汉测绘科技大学出版社, 1994. 11(2000. 1 重印)
ISBN 7-81030-363-5

I. 物… II. 郭… III. 物理大地测量学—基础知识
IV. P223

中国版本图书馆数据核字(1999)第 78595 号



武汉测绘科技大学出版社出版发行
丹江口市印刷厂印刷

开本: 850×1168mm 1/32 印张: 9.75 字数: 244 千字
1994 年 11 月第 1 版 2000 年 1 月第 2 次印刷
定价: 22.00 元

内 容 简 介

本书系统地论述了物理大地测量学的基础知识,偏重于基础理论,以便为读者进一步深入学习本课程的理论并从事科学研究打下坚实的基础。本书的前四章是基础理论,较系统地介绍了位理论和球函数,特别强调了数学上的严密性,每一条定理都作了严格的证明;第五章是地球的正常重力场理论,避开椭球函数导出了所有的严密公式,相对比较容易掌握;第六章至第八章是地球重力场的有关理论;第九章讨论实际计算的问题。与现有同类著作相比,本书主要有两个特点:一是强调了基础理论,二是强调了数学推导的严密性。本书可作为大地测量、地球物理专业本科高年级学生及研究生的教学参考书,也可供科研人员参考。

重印说明

此次重印改正了上次印刷中发现的错误,内容未作调整。作者非常感谢武汉测绘科技大学地学测量工程学院的操华胜副教授和同济大学测量系的伍吉仓副教授,他们在教学中为本书纠正了许多错误。同时,作者借这次重印的机会向给予作者鼓励的所有读者表示衷心的感谢。

郭俊义

1999年12月15日

序 言

1991年初,管泽霖、宁津生两位教授召集我们地球动力学研究室的几位青年教师,安排我们改编他们合编的教材《地球形状及其外部重力场》,经多次讨论确定了新的内容目录,并作了分工。后来,由于几位青年教师先后出国学习,改编工作未能如期完成,错过了出版日期,未能按计划出版。当时,我的任务是改写地球形状与外部重力的理论部分和重力固体潮部分。在深知原计划的书不能出版时,我已经完成了一些改编工作,这本书就是以此为基础,将内容作了一些调整,加深了基础理论,去掉了重力固体潮部分,增添了最后一章实际计算方法的内容而成的。

与原来改编的教材不同,本书的目的是为读者进一步深入学习这门学科打下比较扎实的理论基础,所以,除注意物理概念的明确之外,也很注意数学推导的严密和基本内容的完整和系统,特别是对球函数的论述比较彻底。虽然作者努力使本书有一些特色,并切实对有志于深入学习这门学科的学生有所帮助,但真正能做到的并不一定像作者所期望的那样,内容的选择和安排并不一定合理,错误之处也在所难免,恳切希望读者批评指正。

在本书的编写过程中,作者得到晁定波、管泽霖、宁津生各位教授和武汉测绘科技大学地球科学与测量工程学院领导的大力支持和帮助,李金文、邓晓丽的两位讲师提出了许多有益的建议,武汉测绘科技大学出版社为本书的最后出版做了大量细致的工作,作者在此表示衷心的感谢。

郭俊义

1994. 10. 20

目 录

第一章 重力场的概念和性质

- § 1.1 万有引力、离心力和重力…………… (1)
- § 1.2 引力位、离心力位和重力位的概念…………… (7)
- § 1.3 重力位水准面和大地水准面…………… (11)
- § 1.4 几种简单形体的引力位和引力…………… (13)
- § 1.5 引力位的一些基本性质…………… (22)
- § 1.6 重力位水准面和铅垂线的弯曲…………… (30)

第二章 位理论边值问题初步

- § 2.1 边值问题的概念…………… (36)
- § 2.2 格林公式…………… (37)
- § 2.3 格林公式应用例举…………… (41)
- § 2.4 泊松积分…………… (47)
- § 2.5 边值问题解的唯一性…………… (51)
- § 2.6 斯托克司定理…………… (53)

第三章 球函数及其性质

- § 3.1 球坐标中拉普拉斯方程的分离变量解法…………… (54)
- § 3.2 勒让得函数…………… (60)
- § 3.3 边带勒让得函数…………… (66)
- § 3.4 球函数…………… (73)
- § 3.5 几何意义…………… (74)
- § 3.6 正交性和加法公式…………… (78)
- § 3.7 母函数和递推公式…………… (86)

第四章 球函数的应用

- § 4.1 引力位展开成球函数的级数和位系数及其物理意义
..... (93)
- § 4.2 质心主惯轴坐标中引力位球函数级数展开式的简化
..... (97)
- § 4.3 球面函数展开成球函数级数 (101)
- § 4.4 对泊松积分的进一步讨论 (109)
- § 4.5 用球函数级数表示任意三维函数 (114)
- § 4.6 球函数的复数表示形式和正规化 (116)

第五章 地球的正常重力场

- § 5.1 正常重力场的概念 (119)
- § 5.2 均质旋转椭球体在内部的引力和引力位 (120)
- § 5.3 均质旋转椭球体在外部的引力位 (129)
- § 5.4 同形均质旋转椭球壳的引力位 (132)
- § 5.5 正常位和平均椭球体 (137)
- § 5.6 正常重力 (142)
- § 5.7 二阶近似公式 (149)
- § 5.8 平均椭球体及正常重力场的参数 (163)

第六章 斯托克司边值理论

- § 6.1 扰动位、大地水准面高和垂线偏差 (166)
- § 6.2 重力异常和斯托克司边值问题 (171)
- § 6.3 扰动位的球近似解 (173)
- § 6.4 大地水准面高和垂线偏差的球近似解 (179)
- § 6.5 扰动重力的球近似解 (183)
- § 6.6 扰动位、大地水准面高和垂线偏差计算公式的推广
..... (187)

§ 6.7 平均椭球体的确定及其与大地水准面的关系	(192)
---------------------------	-------

第七章 重力归算

§ 7.1 空间改正和空间重力异常	(195)
§ 7.2 层间改正、地形改正和布格重力异常	(196)
§ 7.3 地壳均衡补偿的概念、均衡改正和均衡重力异常	(200)
§ 7.4 地球曲率的影响	(206)
§ 7.5 均衡模型的建立,地形-均衡模型	(213)
§ 7.6 各种重力归算方法的比较,间接效应	(216)

第八章 莫洛金斯基边值理论

§ 8.1 高程系统	(222)
§ 8.2 高程异常、地面重力异常和莫洛金斯基边值问题	(226)
§ 8.3 莫洛金斯基解	(230)
§ 8.4 莫洛金斯基解的几何意义,计算公式的简化	(242)
§ 8.5 解析延拓解	(251)
§ 8.6 比亚哈马解	(257)
§ 8.7 与斯托克司边值问题的关系	(261)

第九章 地球形状和外部重力场的实际确定

§ 9.1 参考椭球体及其与平均椭球体之间坐标变换的概念	(264)
§ 9.2 球面积分的计算	(267)
§ 9.3 点异常和平均异常及它们的内插与推估	(269)

§ 9.4	重力异常球函数系数	(273)
§ 9.5	由重力异常计算大地水准面高和重力垂线偏差、 高程异常和地面垂线偏差	(280)
§ 9.6	天文大地垂线偏差及其观测与内插	(286)
§ 9.7	确定大地水准面高和高程异常的天文大地方法 ——天文水准、天文重力水准、GPS 水准	(294)
参考文献		(302)

第一章 重力场的概念和性质

§ 1.1 万有引力、离心力和重力

(一) 万有引力

万有引力是质量与质量间的一种相互吸引力,简称为引力。

在图 1-1 中,设有两个质量分别为 m 和 m' 的质点 M 和 P ,它们的直角坐标分别为 (a, b, c) 和 (x, y, z) ,用 \vec{r} 表示由 M 到 P 的相对位矢,

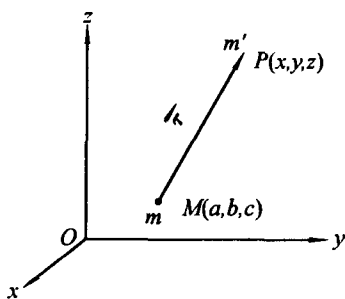


图 1-1

$$\vec{r} = (x - a)\vec{i} + (y - b)\vec{j} + (z - c)\vec{k}, \quad (1-1-1)$$

其中 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为沿 x 、 y 、 z 轴的单位矢量,其模为

$$r = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (1-1-2)$$

则 m 对 m' 的引力为

$$\vec{F} = -f \frac{mm'}{r^3} \vec{r}, \quad (1-1-3)$$

式中的负号表示 \vec{F} 与 \vec{r} 的方向相反, f 为万有引力常数, 其大小由实验测得为 $6.670 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ 。这一定律是牛顿发现的, 常叫作牛顿万有引力定律。

我们称 m 为吸引质量, m' 为被吸引质量, 当被吸引质量为单位质点时, 即当 $m' = 1$ 时,

$$\vec{F} = -f \frac{m}{r^3} \vec{r}. \quad (1-1-4)$$

以后, 我们总是研究吸引质量对单位被吸引质点的引力, 并且把引力当作单位被吸引质点坐标的函数。将(1-1-1)代入(1-1-4)得引力的三个分量

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -f \frac{m}{r^3} (x - a) \\ F_y &= -f \frac{m}{r^3} (y - b) \\ F_z &= -f \frac{m}{r^3} (z - c) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-5)$$

若吸引质点不是一个, 而是 n 个, 质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 由它们到单位被吸引质点的相对位矢分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, 其模分别记为 r_1, r_2, \dots, r_n , 则该质点系对单位被吸引质点的引力是

$$\vec{F} = -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i, \quad (1-1-6)$$

可见, 引力满足矢量的加法规则, 这是由实践证实的。将(1-1-1)代入(1-1-6)得质点系引力的三个分量

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (x - a_i) \\ F_y &= -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (y - b_i) \\ F_z &= -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (z - c_i) \end{aligned} \right\} \quad (1-1-7)$$

若吸引质量集中在如图 1-2 所示的表面 σ 上,我们称其为质面,在该面上坐标为 (a, b, c) 的 M 点处取一面元 $d\sigma$,该点的面密度用 μ 表示,它是 a, b, c 的函数,则该质面在坐标为 (x, y, z) 的 P 点处产生的引力是

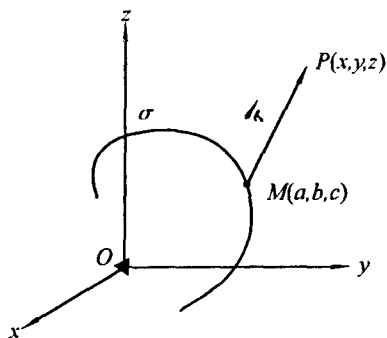


图 1-2

$$\vec{F} = - \int_{\sigma} \frac{\mu}{r^3} \vec{r} d\sigma, \quad (1-1-8)$$

其中 \vec{r} 为由 M 到 P 的相对位矢, r 为 \vec{r} 的模,它们由(1-1-1)和(1-1-2)给出。要注意,上式中的积分变量是 a, b, c, x, y, z 在积分号下被当作常数, \vec{F} 是 x, y, z 的函数。将(1-1-1)代入(1-1-8)得质面引力的三个分量

$$\left. \begin{aligned} F_x &= - \int_{\sigma} \frac{\mu}{r^3} (x - a) d\sigma \\ F_y &= - \int_{\sigma} \frac{\mu}{r^3} (y - b) d\sigma \\ F_z &= - \int_{\sigma} \frac{\mu}{r^3} (z - c) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1-1-9)$$

在一般情况下,吸引质量不是集中在一个点或一个面上,而是充满某一空间区域,我们叫它质体。当质体的大小相对于我们所研

究的问题尺度很小时,可将它近似地当作质点对待;当质体是一薄壳,壳的厚度相对于问题的其它尺度很小时,可将它近似地当作质面对待。例如,在研究地面上的引力时,可将日、月及其它远离地球的天体当作质点,但必须把地球当作质体。在图 1-3 中,设质体占据空间区域 τ ,在质体内部坐标为 (a,b,c) 的 M 点处取体元 $d\tau$,该点处质体的体密度为 δ ,它依赖于 a,b,c ,则质体在坐标为 (x,y,z)

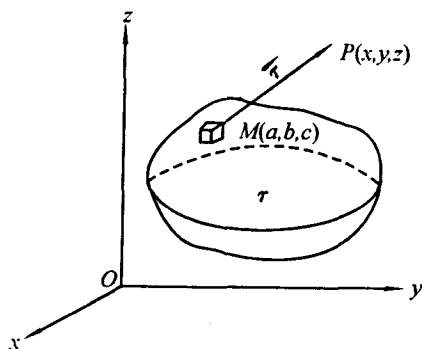


图 1-3

的 P 点处的引力是

$$\vec{F} = - \int_{\tau} \frac{\delta}{r^3} \vec{r} d\tau, \quad (1-1-10)$$

其中 \vec{r} 为由 M 到 P 的相对位矢, r 为 \vec{r} 的模, 分别由 (1-1-1) 和 (1-1-2) 给出。上式中的积分变量仍然为 a,b,c,x,y,z 为参数, 它们是函数 \vec{F} 的自变量。将 (1-1-1) 代入 (1-1-10) 得质体引力的三个分量

$$\left. \begin{aligned} F_x &= - \int_{\tau} \frac{\delta}{r^3} (x - a) d\tau \\ F_y &= - \int_{\tau} \frac{\delta}{r^3} (y - b) d\tau \\ F_z &= - \int_{\tau} \frac{\delta}{r^3} (z - c) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1-1-11)$$

(二) 离心力

在旋转坐标系中讨论问题时,应当考虑一个惯性力——离心力。离心力不是物质力。如图 1-4 所示,设坐标系绕 z 轴以角速率 ω 转动,则坐标为 (x, y, z) 的 P 点的离心力是

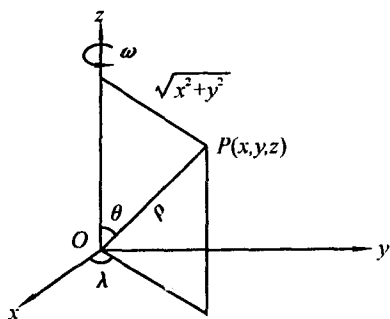


图 1-4

$$P = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 \rho \sin \theta, \quad (1-1-12)$$

其方向垂直于自转轴向外,用矢量的形式可将它写成

$$\vec{P} = \omega^2 (x\vec{i} + y\vec{j}). \quad (1-1-13)$$

可以看出, P 随到自转轴距离的增大而增大。

(三)重力

重力是指相对于地球固定的单位质点所受的力,由于地球在自转,所以重力是引力和离心力的和,即

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{P}, \quad (1-1-14)$$

其中 \vec{F} 是指地球及所有其它天体质量产生的引力, \vec{P} 是指相对于地球瞬时角速度的离心力。在以后,我们将对重力的定义加以限制,即凡谈到重力,我们总是指地球质量产生的引力与相对于地球的平均角速度及平均地极的离心力之和。所谓地极是指过地球质心的自转轴与地面的交点,它是随时间变化的,地球的自转角速度也随时间变化,我们这里引用平均角速度与平均地极是为保证固

定点的离心力不随时间变化。另外，我们假定地球的质量分布也不随时间变化，则地球引力不随时间变化。因而我们所指的重力也不随时间变化。

重力仪器测量的是单位质点在测量时刻所受的真正重力，而不是我们前面定义的不随时间变化的重力，所以需要对重力测量值加以改正，这些改正数应包含相对地球运动的天体的影响、由于这些天体的影响而造成地球形状变化的影响、大气的影晌、地球自转角速度的变化和极移的影响等。是否加某一项取决于重力测量的精度。

事实上，地球内部的质量分布也在随时间变化，我们假设它不变只是为将问题看成与时间无关来处理，在下文中，凡未特别指明与时间相关的地方均认为与时间无关，在需要考虑随时间变化的因素时，我们会特别声明。

(四)单位

万有引力、离心力和重力都是指单位质点所受的力，所以它们的大小与相应的加速度相等，它们的单位也采纳加速度的单位，我们以 $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ 作基本单位，称作伽，记为 gal， 10^{-3} 伽称作毫伽，记为 mgal， 10^{-3} 毫伽称作微伽，记为 μgal ，伽是为纪念意大利天文学家伽利略而命名的。

(五)场的概念

如果某一空间区域 V 中的每一点都有唯一的一个数量或矢量与之对应，则我们说在 V 中给定了一个数量场或矢量场。例如温度、密度等给出一个数量场，力、磁场强度等给出一个矢量场。与引力、离心力和重力相关的场分别称为引力场、离心力场和重力场。

场也是一个物理概念，是一种客观存在，例如，任意质量都产生引力场，当将其它的质量置于这个引力场时，就会受到引力的作用。

§ 1.2 引力位、离心力位和重力位的概念

(一) 力位的概念

设

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \quad (1-2-1)$$

是一个力场,若存在标量函数 ψ ,使

$$f_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1-2-2)$$

或用矢量写成

$$\vec{f} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} \psi, \quad (1-2-3)$$

则称 ψ 为力 \vec{f} 的力位。grad ψ 叫 ψ 的梯度,所以力是力位的梯度。

更进一步地讲,力位相对任意方向的方向导数就等于力沿该方向的投影。设某一方向 l 的方向余弦为 $\cos(l, x)$ 、 $\cos(l, y)$ 、 $\cos(l, z)$,则力 \vec{f} 沿 l 方向的投影就是 \vec{f} 的三个分量 f_x 、 f_y 、 f_z 沿该方向的投影之和,即

$$f_l = f_x \cos(l, x) + f_y \cos(l, y) + f_z \cos(l, z), \quad (1-2-4)$$

由方向导数的性质

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(l, z) \quad (1-2-5)$$

和力位的定义式(1-2-2)便得

$$f_l = \frac{\partial \psi}{\partial l}, \quad (1-2-6)$$

这就是我们所要证明的。

(二) 质点、质点系、质面和质体的引力位

质点的引力位是

$$V = f \frac{m}{r} = f \frac{m}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (1-2-7)$$

要验证其正确性,只需验证 V 满足引力位的定义,事实上,