

代数

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} \quad \sqrt{\frac{b^3}{a}} \quad \sqrt{\frac{a}{b^3}}$$

DAISHU

中学生课外读物
第二册

刘文 崔盛钊

河北人民出版社

中学生课外读物

代 数

第 二 册

刘 文 崔盛钊

河 北 人 民 出 版 社

一九八二年·石家庄

中学生课外读物

代 数

第 二 册

刘 文 崔盛钊

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

河北新华印刷一厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 22 3/16印张 512,000字 印数：1—5,050 1982年10月第1版

1982年10月第1次印刷 统一书号：7086·1079 定价：1.70 元

目 录

第九章 一元一次方程	(1)
§ 9.1 方程及其基本性质.....	(1)
§ 9.2 一元一次方程的解法.....	(19)
§ 9.3 列出方程解应用题.....	(33)
第十章 一次方程组	(55)
§ 10.1 二元一次方程的意义.....	(55)
§ 10.2 二元一次方程组的意义.....	(58)
§ 10.3 二元一次方程组的解法.....	(61)
§ 10.4 列出二元一次方程组解应用题.....	(91)
§ 10.5 三元一次方程组的解法.....	(103)
§ 10.6 列出三元一次方程组解应用题.....	(118)
第十一章 一元二次方程	(126)
§ 11.1 一元二次方程的意义.....	(126)
§ 11.2 一元二次方程的解法 ——因式分解法.....	(129)
§ 11.3 一元二次方程的解法 ——开平方法与配方法.....	(137)
§ 11.4 一元二次方程的解法 ——公式法.....	(143)
§ 11.5 一元二次方程根的判别式.....	(151)
§ 11.6 列出一元二次方程解应用题.....	(158)
§ 11.7 一元二次方程的根与系数的关系.....	(168)

§ 11.8	二次三项式的因式分解·····	(174)
§ 11.9	可以化为一元二次方程来解的整式方程·····	(181)
第十二章	分式方程与无理方程·····	(195)
§ 12.1	分式方程及其变形·····	(195)
§ 12.2	分式方程的解法·····	(198)
§ 12.3	分式方程组·····	(216)
§ 12.4	利用分式方程组解应用题·····	(229)
§ 12.5	无理方程及其变形·····	(245)
§ 12.6	无理方程的解法·····	(247)
第十三章	二元二次方程组·····	(261)
§ 13.1	二元二次方程组的意义 ·····	(261)
§ 13.2	含有一个二元一次方程的二元二次方程组的代入解法 ·····	(263)
§ 13.3	关于韦达定理的逆定理 ·····	(268)
§ 13.4	关于方程组同解问题的补充讨论 ·····	(272)
§ 13.5	二元二次方程组的分解因式解法 ·····	(280)
§ 13.6	可消去二次项的二元二次方程组的解法 ·····	(287)
§ 13.7	可消去一个未知数的二元二次方程组的解法·····	(292)
§ 13.8	缺一次项的二元二次方程组的解法 ·····	(295)
§ 13.9	二元高次方程组解法举例 ·····	(301)
§ 13.10	可化为二元二次方程组的分式方程组 ·····	(308)
§ 13.11	可化为二元二次方程组的无理方程组 ·····	(315)
§ 13.12	三元二次方程组 ·····	(323)
§ 13.13	列出二元二次方程组解应用题 ·····	(333)

第十四章	不等式	(345)
§ 14.1	不等式的意义和它的解	(345)
§ 14.2	不等式的基本性质	(351)
§ 14.3	同解不等式	(358)
§ 14.4	一元一次不等式	(360)
§ 14.5	一元一次不等式组	(365)
§ 14.6	一元二次不等式	(375)
§ 14.7	一元二次不等式组	(384)
§ 14.8	分式不等式与高次不等式	(387)
§ 14.9	无理不等式	(396)
§ 14.10	不等式的证明	(400)
§ 14.11	含绝对值的不等式	(409)
第十五章	对数	(425)
§ 15.1	对数的概念	(425)
§ 15.2	对数的性质	(433)
§ 15.3	对数的运算	(437)
§ 15.4	常用对数	(447)
§ 15.5	对数表	(454)
§ 15.6	首数是负数的对数的运算	(459)
§ 15.7	应用对数作计算的例子	(463)
§ 15.8	对数的换底公式	(469)
§ 15.9	指数方程和对数方程	(473)
§ 15.10	关于指数和对数的不等式	(486)
第十六章	集合代数	(491)
§ 16.1	集合的概念	(491)
§ 16.2	集合的运算	(499)
§ 16.3	集合等式的证明举例	(515)

第十七章 函数和它的图形	(519)
§ 17.1 函数的概念	(519)
§ 17.2 函数的图形	(527)
§ 17.3 函数的几种特性	(537)
§ 17.4 反函数与复合函数	(549)
§ 17.5 建立函数关系举例	(561)
§ 17.6 函数概念的一般化	(567)
第十八章 初等函数	(573)
§ 18.1 一次函数	(573)
§ 18.2 二次函数	(584)
§ 18.3 幂函数	(600)
§ 18.4 指数函数	(612)
§ 18.5 对数函数	(619)
§ 18.6 初等函数	(623)
习题答案和提示	(631)
附录	(698)
(I) 常用对数表	(698)
(II) 反对数表	(701)

第九章 一元一次方程

§ 9.1 方程及其基本性质

1. 等式和恒等式

在日常生活和生产实际中，我们常常要研究相等的数量关系。例如，如果用 s 表示甲、乙两个车站之间的距离， v 表示火车的速度， t 表示火车由甲站开到乙站所需的时间，则三者的关系可用下面的式子表示：

$$t = \frac{s}{v}.$$

又如，根据乘法公式有

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

以上两个式子，都是用等号连结两个代数式所成的式子，这种式子叫做等式。下面的一些式子也都是等式：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1)$$

$$a(x+y) = ax + ay, \quad (2)$$

$$6xy \div 2x = 3y, \quad (3)$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, \quad (4)$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad (5)$$

$$x+3=8, \quad (6)$$

$$3y=4, \quad (7)$$

$$x+y=5. \quad (8)$$

在等式里，等号左边的代数式叫做等式的左边；等号右边的代数式叫做等式的右边。例如，在等式(1)中，左边是 $(a+b)^2$ ，右边是 $a^2+2ab+b^2$ 。

我们来看上面的前四个等式。在等式(1)里不论 a 、 b 等于任何数值，左边的值总是等于右边的值；在等式(2)里，不论 a 、 x 、 y 等于任何数值，左边的值也总等于右边的值；在等式(3)里，当 $x=0$ 时，左边没有意义（因为不能用零做除数），因此 x 的数值不容许等于零。但不论 y 等于任何数值和 x 等于任何不为零的数值，左边的值总是等于右边的值；在等式(4)里，当 x 、 y 为负数时，平方根没有意义，但不论 x 、 y 等于任何非负值，左边的值总等于右边的值。这就是说，在前四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的。这样的等式就叫做恒等式。

只含有数字的等式，例如

$$3+5=8,$$

$$3^2+4^2=5^2$$

等也是恒等式。

上面的后四个等式，并不是用任何允许的数值代替其中的字母都能成立。例如，在等式(5)里，当 $x=y=1$ 时，左边等于 $\sqrt{2}$ ，右边等于 2，两边的值就不相等；在等式(6)里，当 $x=1$ 时，左边等于 4，右边等于 8；在等式(7)里，当 $y=1$ 时，左边等于 3，右边等于 4；在等式(8)里，当 $x=y=1$ 时，左边等于 2，右边等于 5。因此这四个等式虽然都是等式，但却不是恒等式。

2. 方程

我们来看下面的问题：一个数的 8 倍加上 10，等于这个数的 10 倍减去 8，求这个数。

解。用字母 x 来表示所求的这个数，那末由问题所给的定量关系，可以写出等式：

$$8x + 10 = 10x - 8 \quad (9)$$

这里 8 与 10 是已知数，而字母 x 的值还不知道，需要根据它与已知数的关系来确定。

等式里字母的值，需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的，这样的字母叫做未知数。含有未知数的等式叫做方程，例如， $8x + 10 = 10x - 8$ 就是方程，前面的等式(5)——(8)也是方程。

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解。例如，用 9 代替方程(9)里的 x ，方程两边的值都等于 82，9 就是这个方程的解。

只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根。例如，方程(9)的解是 9，我们也可以说它的根是 9。

根据问题中已知数与未知数之间的等量关系组成方程，叫做列方程。

求方程的解的过程，叫做解方程。

例 1 根据下面所说的数量关系，列出方程：

- (1) x 的 3 倍减去 5 等于它的 2 倍加上 6；
- (2) x 与 y 的差的 3 倍比 x 与 y 的和的 6 倍少 3；
- (3) x 的 2 倍的平方比 x 的平方的 2 倍多 1。

解 (1) $3x - 5 = 2x + 6$;
(2) $3(x - y) + 3 = 6(x + y)$;
(3) $(2x)^2 - 1 = 2x^2$ 。

例 2 检验下列各数是不是方程

$$x^2 = 12 - x$$

的根：

(1) 2; (2) 3; (3) 4.

解 (1) 用 $x = 2$ 代入方程.

$$\text{左边} = 2^2 = 4;$$

$$\text{右边} = 12 - 2 = 10.$$

$\therefore$ 左边 $\neq$ 右边,

$\therefore$ 2 不是方程 $x^2 = 12 - x$ 的根.

(2) 用 $x = 3$ 代入方程.

$$\text{左边} = 3^2 = 9;$$

$$\text{右边} = 12 - 3 = 9.$$

$\therefore$ 左边 = 右边,

$\therefore$ 3 是方程 $x^2 = 12 - x$ 的根.

(3) 用 $x = 4$ 代入方程.

$$\text{左边} = 4^2 = 16;$$

$$\text{右边} = 12 - 4 = 8.$$

$\therefore$ 左边 $\neq$ 右边,

$\therefore$ 4 不是方程 $x^2 = 12 - x$ 的根.

3. 同解方程

我们来看下面两个方程:

$$3x + 1 = 7. \quad (1)$$

$$3x = 6. \quad (2)$$

用 $x = 2$ 代入方程(1)时, 它两边的值相等, 所以 2 是方程(1)的一个解. 易知用大于 2 的数值代替方程(1)中的 x , 方程左边的值大于 7, 用小于 2 的数值代替方程(1)中的 x , 方程左边的值小于 7, 所以方程(1)只有一个解 $x = 2$. 用同样的方法我们可以知道方程(2)也只有一个解 $x = 2$. 也就是说, 方程(1)的解与方程(2)的解完全相同.

两个方程, 如果第一个方程的解都是第二个方程的解, 并

且第二个方程的解也都是第一个方程的解。也就是说，如果它们的解完全相同，那么这两个方程叫做**同解方程**。例如，方程(1)和方程(2)是同解方程。

例3 判定下列方程是否为同解方程：

(1) $2x - 1 = 5$;

(2) $2x = 6$ 。

解 这两个方程都只有一个根3，所以它们是同解方程。

例4 判定下列方程是否为同解方程：

(1) $2x = 4$;

(2) $x^2 = 4$ 。

解 方程 $2x = 4$ 只有一个根2，而方程 $x^2 = 4$ 有两个根2与-2，所以它们不是同解方程。

解方程，就是把原来的方程逐步化为比较简单的同解方程，直到得出 $x = a$ 这种形式的最简方程的过程。我们知道 $x = a$ 的解就是 a ，因此每一步得到的方程都和前面的方程同解，而最后得到方程 $x = a$ ，则 a 就是原方程的解。

关于方程的同解，有下面两个基本性质。

4. 方程的第一个基本性质

我们来看下面的方程

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (1)$$

把它两边都加上（或者都减去）同一个数，例如，都加上4，得出另一个方程。

$$x^2 + 2 + 4 = 3x + 4. \quad (2)$$

下面我们来证明这两个方程同解。为此，需要证明：

第一、方程(1)的一切解都是方程(2)的解；

第二、方程(2)的一切解也都是方程(1)的解。

① 当 $x = 1$ 时，方程(1)两边的代数式 $x^2 + 2$ 与 $3x$ 的值

都等于3，所以1是方程(1)的一个解，因为等数加等数其和相等，所以当 $x=1$ 时，二代数式 x^2+2+4 与 $3x+4$ 的值也相等（都等于3+4）。这就证明了1也是方程(2)的解。

根据同样的道理可以证明，若方程(1)有其它的解时，这些解也同样是方程(2)的解，因此我们可以确认：方程(1)所有的解都是方程(2)的解。

② 当 $x=2$ 时，方程(2)两边的代数式 x^2+2+4 与 $3x+4$ 的值都等于10，所以2是方程(2)的一个解。因为等数减等数其差相等，所以当 $x=2$ 时，二代数式 x^2+2 与 $3x$ 的值也相等（都等于10-4）。这就证明了2也是方程(1)的解。同理可以证明，若方程(2)有其它的解时，这些解也同样是方程(1)的解。因此我们可以确认：方程(2)的所有解都是方程(1)的解。

由①与②的讨论可知，方程(1)与(2)的解相同，故此二方程同解。

把方程(1)的两边都加上（或者都减去）同一个整式，例如，都加上 x^3 ，则得出如下方程

$$x^2+2+x^3=3x+x^3. \quad (3)$$

根据同样的理由可以证明，方程(1)与(3)也同解。

推广到一般，我们就得到方程的第一个基本性质：

方程的两边都加上（或者都减去）同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程。

由方程的这个基本性质可以得出以下的推论：

推论1 方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边。

事实上，要将方程一边中的某一项改变符号移到另一边，只要在方程两边同时减去这一项即可。

把方程中的项改变符号后，从一边移到另一边，叫做移

项。移项以后所得的方程和原方程是同解方程。

例5 设有方程

$$x^2 + 2x - 5x - 4. \quad (1)$$

方程两边都加上4，得

$$x^2 + 2x + 4 = 5x. \quad (2)$$

方程(2)可以看成是将方程(1)右边的-4改变符号移到左边而得。同样将方程(2)左边的 x^2 改变符号移到右边（即将方程两边同减 x^2 ），得

$$2x + 4 = 5x - x^2. \quad (3)$$

方程(1)，(2)，(3)是同解方程。

推论2 方程两边有相同的项时，可以相消。

事实上，把相同的项从方程的两边同时减去，就可以将它们消去。

例6 设有方程

$$5x^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 4.$$

方程两边都减去 $5x^2$ ，得

$$2x + 1 = 4.$$

在解方程时，我们常常利用移项的方法，把方程中含有未知数的项移到方程的左边，不含未知数的项移到方程右边。

例7 解方程

$$7x - 10 = 6x + 2.$$

解 移项，得

$$7x - 6x = 2 + 10,$$

合并同类项，得

$$x = 12.$$

例8 某数的5倍与4之差等于这个数的4倍与5之和，求某数。

解 设某数是 x ，则

$$5x - 4 = 4x + 5.$$

移项，得

$$5x - 4x = 5 + 4.$$

合并同类项，得

$$x = 9.$$

5 方程的第二个基本性质

我们来看下面的方程

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{3x}{2}. \quad (1)$$

把这个方程的两边都乘以（或者都除以）一个不等于零的数，例如都乘以 2，得出另一个方程：

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (2)$$

下面我们来证明这两个方程同解。和上段中的讨论一样，为此，需要证明：

第一、方程(1)的一切解都是方程(2)的解；

第二、方程(2)的一切解也都是方程(1)的解。

① 当 $x=1$ 时，方程(1)两边的代数式的值都等于 $\frac{3}{2}$ ，所以 1 是方程(1)的一个解。因为等数乘以等数其积相等，所以当 $x=1$ 时，二代数式 $x^2 + 2$ 与 $3x$ 的值也相等（都等于 $\frac{3}{2} \times 2$ ）。这就是说，1 也是方程(2)的解。同理可以证明，若方程(1)有其它的解时，这些解也同样是方程(2)的解。因此可以确认：方程(1)的所有解都是方程(2)的解。

② 当 $x=2$ 时，方程(2)两边的代数式的值都等于 6，所以 2 是方程(2)的一个解。因为等数除以等数其商相等，而方程(1)可由方程(2)两边同除以 2 得到，所以当 $x=2$ 时，二代数

式 $\frac{x^2}{2} + 1$ 与 $\frac{3x}{2}$ 的值也相等 (都等于 $\frac{6}{2}$)。这就是说, 2 也是方程

(1) 的解。同理可以证明, 若方程 (2) 有其它的解时, 这些解也同样是方程 (1) 的解。因此可以确认: 方程 (2) 的所有解都是方程 (1) 的解。

由①与②中的讨论可知, 方程 (1) 与 (2) 的解相同, 故此二方程同解。

以上说明了方程的第二个基本性质:

方程的两边都乘以 (或者都除以) 不等于零的同一个数, 所得的方程和原方程是同解方程。

应当注意, 如果用零乘方程的两边, 那么所得的就不是原方程的同解方程。例如, 方程 (1) 的两边都乘以零, 得

$$\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \cdot 0 = \frac{3x}{2} \cdot 0. \quad (3)$$

这时, 不论用任何数值代替 x , 左右两边的值都相等 (都等于零)。所以 (1) 和 (3) 不是同解方程。

因为零不能做除数, 所以方程的两边也不能同除以零。

例 9 根据方程的第二个基本性质, 解下列方程:

$$(1) \quad \frac{x}{4} = 5;$$

$$(2) \quad -3x = 12.$$

解 (1) $\frac{x}{4} = 5.$

两边乘以 4, 得

$$x = 20.$$

$$(2) \quad -3x = 12.$$

两边除以 -3 , 得

$$x = -4.$$

例10 解方程:

$$5x - 4 = x - 7.$$

解 移项, 得

$$5x - x = -7 + 4,$$

$$4x = -3.$$

两边都除以 4, 得

$$x = -\frac{3}{4}.$$

例11 解方程:

$$\frac{5}{4}x - 4 = 3x.$$

解 两边都乘以 4, 得

$$5x - 16 = 12x,$$

移项, 得

$$5x - 12x = 16,$$

$$-7x = 16.$$

两边都除以 -7 , 得

$$x = -\frac{16}{7}.$$

6 方程的增根与丢根

在解一元一次方程时, 我们看到, 为了求出未知数的值, 我们总要把复杂的方程变为简单的方程, 并且每一变形都以方程的基本性质为根据, 这样就保证了变形后的方程与原方程同解。

应当特别注意, 方程的变形, 如不是从方程的基本性质为根据, 变形后的方程就不一定与原方程同解。

我们来看下面的方程: