代数

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}},\ \sqrt{\frac{b^3}{a}},\ \sqrt{\frac{a}{b^3}}$$

DAISHU

中学生课外读物

第二册

刘 文 崔盛钊

河北人民出版社

中学生课外读物

代　　数

第二册

刘文　崔盛钊

河北人民出版社
一九八二年·石家庄

中学生课外读物

代　　数

第二册

刘　文　　崔盛钊

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　22 3/16印张　512,000字　印数：1—5,050　1982年10月第1版
1982年10月第1次印刷　统一书号：7086·1079　定价：1.70 元

目　　录

第九章　一元一次方程

§ 9·1　方程及其基本性质

1. 等式和恒等式

在日常生活和生产实际中，我们常常要研究相等的数量关系．例如，如果用 s 表示甲、乙两个车站之间的距离，v 表示火车的速度，t 表示火车由甲站开到乙站所需的时间，则三者的关系可用下面的式子表示：

$$t=\frac{s}{v}.$$

又如，根据乘法公式有

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

以上两个式子，都是用等号连结两个代数式所成的式子，这种式子叫做等式．下面的一些式子也都是等式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \tag{1}$$

$$a(x+y)=ax+ay, \tag{2}$$

$$6xy\div 2x=3y, \tag{3}$$

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}, \tag{4}$$

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}, \tag{5}$$

$$x+3=8, \tag{6}$$

$$3y=4, \tag{7}$$

$$x+y=5. \tag{8}$$

在等式里，等号左边的代数式叫做等式的左边；等号右边的代数式叫做等式的右边．例如，在等式(1)中，左边是$(a+b)^2$，右边是$a^2+2ab+b^2$。

我们来看上面的前四个等式。在等式(1)里不论a、b等于任何数值，左边的值总是等于右边的值；在等式(2)里，不论a、x、y等于任何数值，左边的值也总等于右边的值；在等式(3)里，当$x=0$时，左边没有意义（因为不能用零做除数），因此x的数值不容许等于零。但不论y等于任何数值和x等于任何不为零的数值，左边的值总是等于右边的值；在等式(4)里，当x，y为负数时，平方根没有意义，但不论x、y等于任何非负值，左边的值总等于右边的值．这就是说，在前四个等式里，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，等式总是成立的．这样的等式就叫做**恒等式**．

只含有数字的等式，例如

$$3+5=8,$$
$$3^2+4^2=5^2$$

等也是恒等式．

上面的后四个等式，并不是用任何允许的数值代替其中的字母都能成立．例如，在等式(5)里，当$x=y=1$时，左边等于$\sqrt{2}$，右边等于2，两边的值就不相等；在等式(6)里，当$x=1$时，左边等于4，右边等于8；在等式(7)里，当$y=1$时，左边等于3，右边等于4；在等式(8)里，当$x=y=1$时，左边等于2，右边等于5．因此这四个等式虽然都是等式，但却不是恒等式。

2．**方程**

我们来看下面的问题：一个数的8倍加上10，等于这个数的10倍减去8，求这个数．

解. 用字母 x 来表示所求的这个数，那末由问题所给的定量系关，可以写出等式：

$$8x+10=10x-8 \tag{9}$$

这里 8 与 10 是已知数，而字母 x 的值还不知道，需要根据它与已知数的关系来确定。

等式里字母的值，需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的，这样的字母叫做**未知数**．含有未知数的等式叫做**方程**，例如，$8x+10=10x-8$ 就是方程，前面的等式(5)—(8)也是方程。

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**方程的解**．例如，用 9 代替方程(9)里的 x，方程两边的值都等于 82，9 就是这个方程的解。

只含有一个未知数的方程的解，也叫做**方程的根**．例如，方程(9)的解是 9，我们也可以说它的根是 9．

根据问题中已知数与未知数之间的等量关系组成方程，叫做**列方程**．

求方程的解的过程，叫做**解方程**．

例 1 根据下面所说的数量关系，列出方程：

(1) x 的 3 倍减去 5 等于它的 2 倍加上 6；

(2) x 与 y 的差的 3 倍比 x 与 y 的和的 6 倍少 3；

(3) x 的 2 倍的平方比 x 的平方的 2 倍多 1．

解 (1) $3x-5=2x+6$；

(2) $3(x-y)+3=6(x+y)$；

(3) $(2x)^2-1=2x^2$．

例 2 检验下列各数是不是方程

$$x^2=12-x$$

的根：

(1) 2；　　(2) 3；　　(3) 4。

解　(1) 用 $x=2$ 代入方程。

左边 $=2^2=4$；

右边 $=12-2=10$。

∵　左边≠右边，

∴　2 不是方程 $x^2=12-x$ 的根。

(2) 用 $x=3$ 代入方程。

左边 $=3^2=9$；

右边 $=12-3=9$。

∵　左边=右边，

∴　3 是方程 $x^2=12-x$ 的根。

(3) 用 $x=4$ 代入方程。

左边 $=4^2=16$；

右边 $=12-4=8$。

∵　左边≠右边，

∴　4 不是方程 $x^2=12-x$ 的根。

3. 同解方程

我们来看下面两个方程：

$$3x+1=7. \tag{1}$$

$$3x=6. \tag{2}$$

用 $x=2$ 代入方程(1)时，它两边的值相等，所以 2 是方程(1)的一个解。易知用大于 2 的数值代替方程(1)中的 x，方程左边的值大于 7，用小于 2 的数值代替方程(1)中的 x，方程左边的值小于 7，所以方程(1)只有一个解 $x=2$。用同样的方法我们可以知道方程(2)也只有一个解 $x=2$。也就是说，方程(1)的解与方程(2)的解完全相同。

两个方程，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并

且第二个方程的解也都是第一个方程的解．也就是说，如果它们的解完全相同，那么这两个方程叫做**同解方程**．例如，方程（1）和方程(2)是同解方程．

例3 判定下列方程是否为同解方程：

（1）$2x-1=5$；

（2）$2x=6$.

解 这两个方程都只有一个根3，所以它们是同解方程．

例4 判定下列方程是否为同解方程：

（1）$2x=4$；

（2）$x^2=4$.

解 方程$2x=4$只有一个根2，而方程$x^2=4$有两个根2与-2，所以它们不是同解方程．

解方程，就是把原来的方程逐步化为比较简单的同解方程，直到得出$x=a$这种形式的最简方程的过程．我们知道$x=a$的解就是a，因此每一步得到的方程都和前面的方程同解，而最后得到方程$x=a$，则a就是原方程的解．

关于方程的同解，有下面两个基本性质．

4．方程的第一个基本性质

我们来看下面的方程

$$x^2+2=3x. \qquad (1)$$

把它两边都加上（或者都减去）同一个数，例如，都加上4，得出另一个方程．

$$x^2+2+4=3x+4. \qquad (2)$$

下面我们来证明这两个方程同解．为此，需要证明：

第一、方程（1）的一切解都是方程（2）的解；

第二、方程（2）的一切解也都是方程（1）的解．

① 当$x=1$时，方程（1）两边的代数式x^2+2与$3x$的值

都等于3，所以1是方程（1）的一个解，因为等数加等数其和相等，所以当$x=1$时，二代数式x^2+2+4与$3x+4$的值也相等（都等于$3+4$）．这就证明了1也是方程（2）的解．

根据同样的道理可以证明，若方程（1）有其它的解时，这些解也同样是方程（2）的解，因此我们可以确认：方程（1）所有的解都是方程（2）的解．

② 当$x=2$时，方程(2)两边的代数式x^2+2+4与$3x+4$的值都等于10，所以2是方程(2)的一个解．因为等数减等数其差相等，所以当$x=2$时，二代数式x^2+2与$3x$的值也相等（都等于$10-4$）．这就证明了2也是方程(1)的解．同理可以证明，若方程(2)有其它的解时，这些解也同样是方程(1)的解．因此我们可以确认：方程(2)的所有解都是方程(1)的解．

由①与②的讨论可知，方程(1)与(2)的解相同，故此二方程同解．

把方程(1)的两边都加上（或者都减去）同一个整式，例如，都加上x^3，则得出如下方程

$$x^2+2+x^3=3x+x^3. \qquad (3)$$

根据同样的理由可以证明，方程(1)与(3)也同解．

推广到一般，我们就得到**方程的第一个基本性质**：

方程的两边都加上（或者都减去）同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

由方程的这个基本性质可以得出以下的推论：

推论1 方程中的任何一项，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边．

事实上，要将方程一边中的某一项改变符号移到另一边，只要在方程两边同时减去这一项即可．

把方程中的项改变符号后，从一边移到另一边，叫做移

项．移项以后所得的方程和原方程是同解方程．

例 5 设有方程

$$x^2+2x=5x-4. \tag{1}$$

方程两边都加上 4，得

$$x^2+2x+4=5x. \tag{2}$$

方程(2)可以看成是将方程(1)右边的 -4 改变符号移到左边而得．同样将方程(2)左边的 x^2 改变符号移到右边（即将方程两边同减x^2），得

$$2x+4=5x-x^2. \tag{3}$$

方程(1)，(2)，(3)是同解方程．

推论2 方程两边有相同的项时，可以相消．

事实上，把相同的项从方程的两边同时减去，就可以将它们消去．

例 6 设有方程

$$5x^2+2x+1=5x^2+4.$$

方程两边都减去 $5x^2$，得

$$2x+1=4.$$

在解方程时，我们常常利用移项的方法，把方程中含有未知数的项移到方程的左边，不含未知数的项移到方程右边．

例 7 解方程

$$7x-10=6x+2.$$

解 移项，得

$$7x-6x=2+10,$$

合并同类项，得

$$x=12.$$

例 8 某数的5倍与4之差等于这个数的4倍与5之和，求某数．

解　设某数是 x，则

$$5x-4=4x+5.$$

移项，得

$$5x-4x=5+4.$$

合并同类项，得

$$x=9.$$

5　方程的第二个基本性质

我们来看下面的方程

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{3x}{2}. \qquad (1)$$

把这个方程的两边都乘以（或者都除以）一个不等于零的数，例如都乘以 2，得出另一个方程：

$$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

下面我们来证明这两个方程同解．和上段中的讨论一样，为此，需要证明：

第一、方程(1)的一切解都是方程(2)的解；

第二、方程(2)的一切解也都是方程(1)的解．

①　当 $x=1$ 时，方程(1)两边的代数式的值都等于 $\frac{3}{2}$，所以 1 是方程(1)的一个解．因为等数乘以等数其积相等，所以当 x　1 时，二代数式 x^2+2 与 $3x$ 的值也相等（都等于 $\frac{3}{2}\times 2$）．这就是说，1 也是方程(2)的解．同理可以证明，若方程(1)有其它的解时，这些解也同样是方程(2)的解．因此可以确认：方程(1)的所有解都是方程(2)的解．

②　当 $x=2$ 时，方程(2)两边的代数式的值都等于 6，所以 2 是方程(2)的一个解．因为等数除以等数其商相等，而方程(1)可由方程(2)两边同除以 2 得到，所以当 $x=2$ 时，二代数

式$\frac{x^2}{2}+1$与$\frac{3x}{2}$的值也相等$\left(都等于\frac{6}{2}\right)$.这就是说，2也是方程(1)的解. 同理可以证明，若方程(2)有其它的解时，这些解也同样是方程(1)的解. 因此可以确认：方程(2)的所有解都是方程(1)的解.

由①与②中的讨论可知，方程(1)与(2)的解相同，故此二方程同解.

以上说明了**方程的第二个基本性质**:

方程的两边都乘以（或者都除以）不等于零的同一个数，所得的方程和原方程是同解方程.

应当注意，如果用零乘方程的两边，那么所得的就不是原方程的同解方程. 例如，方程(1)的两边都乘以零，得

$$\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\cdot 0=\frac{3x}{2}\cdot 0. \tag{3}$$

这时，不论用任何数值代替x，左右两边的值都相等（都等于零）.所以(1)和(3)不是同解方程.

因为零不能做除数，所以方程的两边也不能同除以零.

例9　根据方程的第二个基本性质，解下列方程：

(1) $\frac{x}{4}=5$;　　　　(2) $-3x=12$.

解　(1)　$\frac{x}{4}=5$.

两边乘以4，得

$$x=20.$$

(2)　$$-3x=12.$$

两边除以-3，得

$$x=-4.$$

例10 解方程：

$$5x-4=x-7.$$

解 移项，得

$$5x-x=-7+4,$$

$$4x=-3.$$

两边都除以4，得

$$x=-\frac{3}{4}.$$

例11 解方程：

$$\frac{5}{4}x-4=3x.$$

解 两边都乘以4，得

$$5x-16=12x,$$

移项，得

$$5x-12x=16,$$

$$-7x=16.$$

两边都除以-7，得

$$x=-\frac{16}{7}.$$

6 方程的增根与丢根

在解一元一次方程时，我们看到，为了求出未知数的值，我们总要把复杂的方程变为简单的方程，并且每一变形都以方程的基本性质为根据，这样就保证了变形后的方程与原方程同解。

应当特别注意，方程的变形，如不是从方程的基本性质为根据，变形后的方程就不一定与原方程同解。

我们来看下面的方程：