新世纪高职高专基础课教材

微积分

经济应用数学基础之一

元如林 总主编
车荣强 主 编
李晓彬 副主编

上海财经大学出版社

微积分

元如林　总主编
车荣强　主　编
李晓彬　副主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/元如林总主编,车荣强主编,李晓彬副主编．—上海:上海财经大学出版社,2004.11

ISBN 7-81098-250-8/O·007

Ⅰ.微… Ⅱ.①元…②车…③李… Ⅲ.微积分-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第107334号

□ 责任编辑 李宇彤
□ 封面设计 周卫民

WEI JI FEN
微积分

元如林 总主编
车荣强 主 编
李晓彬 副主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮件:webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海崇明裕安印刷厂印刷装订
2004年11月第1版 2004年11月第1次印刷

787mm×960mm 1/16 18印张 383千字
印数:0 001—5 000 定价:29.00元

前言

QIAN YAN

本套教材是为高职高专经济类和管理类学生编写的教材，同时也适合各类函授大学、夜大学等成人教育专科学生使用，亦可供读者自学使用．

编者参照高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，对内容的取舍和编排进行了必要的处理。这套教材注意从实际问题引入概念，淡化了某些理论性的证明，充分利用图形等直观表现形式，介绍了一些数学模型，给出了较多的例题。这套教材认真贯彻启发式教学原则，强调对学生基本运算能力、分析和解决实践问题能力的培养，力求使本套教材通俗易懂、深入浅出，便于教师讲授和读者阅读．

全套教材由元如林任总主编，共分三册：第一册《微积分》，第二册《线性代数》，第三册《概率论与数理统计》．

第一册《微积分》由车荣强任主编，李晓彬任副主编，内容包括第一章函数、第二章极限与连续、第三章导数与微分、第四章中值定理与导数应用、第五章不定积分、第六章定积分、第七章多元函数微积分、第八章微分方程和第九章无穷级数．

参加本册教材编写的有洪永成（第一章）、解玉成（第二章）、李晓彬（第三章）、元如林（第四、七章）、车荣强（第五、六章）、方勇（第八章）、刘煦（第九章），由元如林和车荣强进行审阅与统稿．

本套教材的编写参考了已出版的相关教材，在此向这些教材的作者表示感谢！

在本套教材的编写过程中，得到了上海财经大学出版社的大力支持，得到了上海金融学院领导、基础部及有关部门的关心和支持，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，错误缺点在所难免，敬请读者批评指正．

编者

2004 年 7 月

目录

MU LU

前　言 ………………………………………………………………（1）

第一章　函数 …………………………………………………………（1）
1.1　集合与实数集……………………………………………………（1）
1.2　函数………………………………………………………………（8）
1.3　初等函数…………………………………………………………（14）
1.4　分段函数…………………………………………………………（20）
1.5　常用的经济函数…………………………………………………（22）
习题一 …………………………………………………………………（25）

第二章　极限与连续 …………………………………………………（28）
2.1　数列的极限………………………………………………………（28）
2.2　函数的极限………………………………………………………（31）
2.3　无穷小量与无穷大量……………………………………………（37）
2.4　极限的运算法则…………………………………………………（40）
2.5　极限存在准则与两个重要极限…………………………………（43）
2.6　函数的连续性……………………………………………………（48）
习题二 …………………………………………………………………（53）

第三章　导数与微分 …………………………………………………（56）
3.1　导数的概念………………………………………………………（56）
3.2　导数基本运算法则………………………………………………（64）
3.3　复合函数的导数…………………………………………………（66）
3.4　其他求导方法……………………………………………………（69）

3.5 高阶导数 …… (73)
3.6 函数的微分 …… (75)
习题三 …… (81)

第四章 中值定理与导数应用 …… (84)
4.1 中值定理 …… (84)
4.2 罗必塔法则 …… (89)
4.3 函数的单调性与极值 …… (93)
4.4 函数的最大值与最小值 …… (102)
4.5 函数图形的描绘 …… (104)
4.6 导数在经济学中的应用 …… (112)
习题四 …… (119)

第五章 不定积分 …… (124)
5.1 不定积分的概念 …… (124)
5.2 不定积分的性质 …… (127)
5.3 基本积分公式 …… (128)
5.4 换元积分法 …… (131)
5.5 分部积分法 …… (139)
习题五 …… (141)

第六章 定积分 …… (147)
6.1 定积分的概念 …… (147)
6.2 定积分的性质 …… (151)
6.3 微积分基本公式 …… (153)
6.4 定积分的换元法 …… (157)
6.5 定积分的分部积分法 …… (160)
6.6 广义积分 …… (161)
6.7 定积分的应用 …… (165)
习题六 …… (173)

第七章 多元函数微积分 …… (178)
7.1 空间解析几何简介 …… (178)
7.2 多元函数的基本概念 …… (188)

7.3　偏导数 …… (191)
7.4　全微分 …… (196)
7.5　复合函数及隐函数的求导公式 …… (199)
7.6　二元函数的极值 …… (203)
7.7　二重积分 …… (207)
习题七 …… (224)

第八章　微分方程 …… (229)
8.1　微分方程的基本概念 …… (229)
8.2　一阶微分方程 …… (231)
8.3　几种二阶微分方程 …… (237)
8.4　微分方程在经济中的应用 …… (239)
习题八 …… (242)

第九章　无穷级数 …… (245)
9.1　无穷级数的概念 …… (245)
9.2　无穷级数的性质 …… (249)
9.3　正项级数 …… (250)
9.4　交错级数与任意项级数 …… (254)
9.5　幂级数 …… (257)
习题九 …… (261)

习题答案 …… (263)

参考文献 …… (279)

第一章

函 数

变量是微积分研究的主要对象，函数反映了变量之间的依赖关系，因此它是微积分中最重要的概念之一．本章将介绍集合、变量、函数、初等函数等基本概念．

1.1 集合与实数集

1.1.1 集合

1. 集合的概念

一般来说，**集合**就是指具有某种属性的事物的全体．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**．

例 1 某大学身高不低于 1.8 米的学生构成一个集合，而该校每一位满足此条件的学生都是这个集合的元素．

例 2 全体奇数构成一个集合，而每个奇数都是该集合的元素．

例 3 抛物线 $y=x^2$ 上的所有的点构成一个集合，而此抛物线上每一个点都是该集

合的元素，如点$(-1,1)$，$(0,0)$，$(3,9)$等．

通常，我们用英文大写字母如A、B、C等表示集合，用英文小写字母如a、b、c等表示集合的元素．如果a是集合A的元素，则记作$a\in A$，读作a属于A或a在A中；如果a不是集合A的元素，则记作$a\overline{\in}A$或$a\notin A$，读作a不属于A或a不在A中．

对于一个给定的集合，其元素是确定的．即对于一个给定的集合A来说，对任意一元素a有：或者$a\in A$，或者$a\overline{\in}A$，两者必居其一．例如，设Z为整数所组成的集合，那么有：$1\in Z$，$-25\in Z$，$7.8\overline{\in}Z$，$\sqrt{3}\overline{\in}Z$，等等．

集合的表示方法有如下两种：

(1)**列举法**．是指把属于某个集合中的所有元素按任意顺序一一列举出来，并用大括号{ }括起来的一种表示方法．

例 4　由 1 至 14 之间 3 的倍数组成的集合A，可表示为：

$$A=\{3,6,9,12\}\quad 或\quad A=\{9,6,3,12\}等．$$

用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不能**遗漏**和**重复**．

(2)**描述法**．是指把属于某个集合的元素所具有的某种共同属性描述出来，并用大括号{ }括起来的一种表示方法．

例 5　设A为由$x^2-3x+2=0$的实根所构成的集合，可表示为：

$$A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\text{ 为实数}\}$$

例 6　设A为全体奇数所构成的集合，可表示为：

$$A=\{x\mid x=2n+1,n\text{ 为整数}\}$$

如果集合中所包含的元素的个数只有有限个，则称这种集合为**有限集**．如例 1、例 4、例 5 中所示的集合．

如果集合中所包含的元素的个数有无限个，则称这种集合为**无限集**．如例 2、例 3、例 6 中所示的集合．

不含任何元素的集合称为**空集**，记为Φ. 但是，只由一个数“0”构成的集合$\{0\}$不是空集，它含有一个元素“0”.

例 7　$A=\{x\mid x^2+2=0,x\text{ 为实数}\}$为空集．

例 8　$B=\{x\mid x=-x\}$就不是空集，而是集合$\{0\}$，因为该集合含有一个元素“0”.

定义 1　设有集合A、B，如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，也就是“若$a\in A$，则$a\in B$”，则称集合A为集合B的**子集**．记为$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B或B包含A.

集合和集合之间的关系，通常用圆或任意封闭曲线围成的图形来形象地说明，而集合内的元素则用图形中的点表示．这样的图形称之为文氏图．

图 1－1 表示A为B的子集．

例 9　设$A=\{3,7\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，则有$A\subset B$.

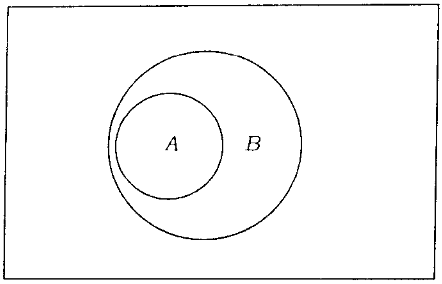

图 1—1

关于子集有以下结论：

(1)$A\subset A$，即集合 A 是其自身的子集；

(2)$\Phi\subset A$，即空集是任意集合的子集；

(3)若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即集合的包含具有传递性．

定义 2 设有集合 A、B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**集合 A 与 B 相等**，记作 $A=B$.

例 10 设 $A=\{x|1<x<4,x$ 为整数$\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**．

2. 集合的运算

定义 3 设有集合 A、B，由 A 与 B 的所有元素构成的集合，称为 **A 与 B 的并**，记为 $A\cup B$(见图 1—2 中阴影部分). 即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

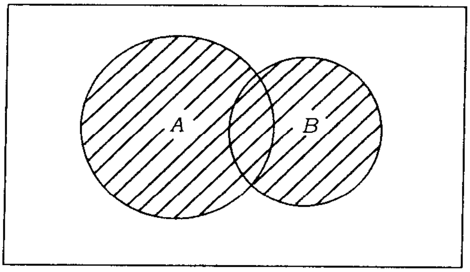

图 1—2

集合的并有下列性质：

(1)$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

(2)对任何集合 A，有 $A\cup\Phi=A$，$A\cup A=A$.

定义 4 设有集合 A、B，由 A 与 B 的所有公共元素构成的集合，称为 **A 与 B 的交**，记

为 $A\cap B$(见图 1—3 中阴影部分). 即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

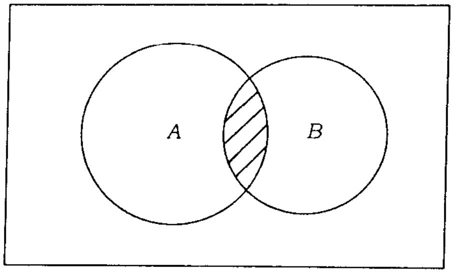

图 1—3

集合的交有下列性质：

(1)$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$;

(2)对任何集合 A,有 $A\cap\Phi=\Phi, A\cap A=A$.

例 11 设 A 为某班选修日语的学生所组成的集合,B 为选修德语的学生所组成的集合,则

$A\cup B$ 表示选修日语或选修德语的学生所组成的集合;

$A\cap B$ 表示既选修日语又选修德语的学生所组成的集合.

例 12 设 $A=\{x|2\leqslant x<7\}, B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,则

$$A\cup B=\{x|-1\leqslant x<7\}$$

$$A\cap B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$$

在具体问题中,我们往往把讨论的对象限制在某一确定的集合 I 内,讨论的内容仅涉及到集合 I 的元素,或者是 I 的子集,我们通常称 I 为**全集**.

全集是一个相对的概念,根据讨论的问题不同,所确定的全集的内容也不同. 例如,讨论自然数的加法运算,自然数集是全集,但当讨论自然数的四则运算时,就要以有理数集为全集.

定义 5 设 I 为全集,A 为 I 的子集,由全集 I 中不属于 A 的那些元素所组成的集合,称为 A 的**补集**,记为 $\overline{A}$(见图 1—4 中阴影部分). 即

$$\overline{A}=\{x|x\in I \text{ 且 } x\overline{\in} A\}$$

补集有下列性质:

(1)$A\cup\overline{A}=I$

(2)$A\cap\overline{A}=\Phi$

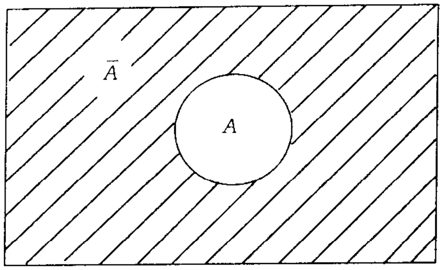

图 1—4

例 13 设 $I=\{a,b,c,d,e\}$,$A=\{a,c\}$,则 $\overline{A}=\{b,d,e\}$

集合运算具有如下性质:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$;

$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3)分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4)对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.2 实数集

1. 实数与数轴

人们对数的认知是逐步发展的. 最早人们认识的是**自然数**(即正整数),全体自然数构成的数集记为 N,即 $N=\{1,2,3,\cdots\}$. 由于作减法运算的需要,在此基础上又增添了零及负整数,从而将数的使用范围扩充为一般的**整数**. 整数集记为 Z,即 $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$. 为了顺利进行除法运算,又导致了分数的产生,由此出现了**有理数**,有理数集为 $Q=\left\{x\mid x=\dfrac{p}{q};p,q\in z,q\neq 0\right\}$,即一个数是有理数,当且仅当它可以写成分数,分数可用有穷小数或无穷循环小数表示,反之有穷小数或无穷循环小数亦可用分数表示. 如,$-\dfrac{3}{4}=-0.75$,$\dfrac{2}{3}=0.\dot{6}$.

习惯上我们把规定有原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**,通常称为 x 轴. 见图 1—5.

任何一个有理数,在数轴上都可找到一个点与之对应,该点称为有理点. 有理点在数

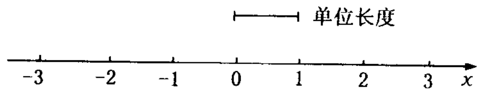

图 1—5

轴上是处处稠密的，即任意两个有理点之间仍有有理点．这是因为，对于任意两个不相等的有理数 a 和 b，仍有有理数 $\frac{a+b}{2}$ 介于其间．同样地，在 a、$\frac{a+b}{2}$ 之间也存在一个有理数 $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{3a+b}{4}$. 依此类推，在 a、b 之间总存在无穷多个有理数，这种性质称为有理数的稠密性．虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但尚未充满整个数轴．例如，圆周率 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$，边长为 1 个单位长度的正方形对角线的长度 $\sqrt{2}=1.414\,213\,5\cdots$ 这种无限不循环小数称为**无理数**．有理数与无理数统称为**实数**．实数集记为 R. 本书如无特殊声明，总是在 R 上讨论问题．实数的全体充满了整个数轴，即实数不仅是稠密的，而且是连续的．实数与数轴上的点一一对应．

2. 绝对值

定义 6 任何实数 a 的**绝对值**，记为 $|a|$，定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

$|a|$ 在几何上表示为数轴上点 a 到原点的距离．

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|a|=\sqrt{a^2}$；

(2) $|a|\geqslant 0$；

(3) $|-a|=|a|$；

(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

(6) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$；

(7) $|ab|=|a|\cdot|b|$；

(8) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$；

(9) 设 $a>0$，则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$；

(10) 设 $a>0$，则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$，或者 $x>a$.

3. 区间与邻域

区间是数学中常用到的实数集，包括 4 种有限区间和 5 种无限区间，其名称、记号及

定义如下：

有限区间：

(1)闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(2)开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

(3)半开半闭区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无限区间：$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$.

其中 a、b 为确定实数，分别称为区间的**左端点**和**右端点**．区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为**区间长度**．$+\infty$ 及 $-\infty$ 分别读作正无穷大和负无穷大，它们不表示任何数，仅仅是记号．

区间在数轴上可如图 1－6 表示．

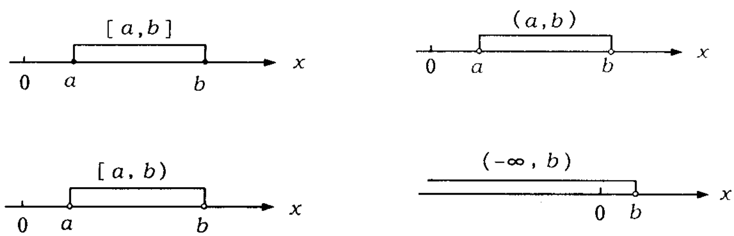

图 1－6

邻域也是在高等数学中经常用到的概念．

定义 7　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-a|>\delta$ 的实数集，即

$$\{x||x-a|<\delta,\delta>0\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**．

点 a 的 δ 邻域也可表示为 $(a-\delta,a+\delta)$（见图 1－7），这是一个以 a 为中心，2δ 为长度的开区间．

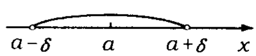

图 1－7

有时用到的邻域不包含邻域中心，点 a 的 δ 邻域内去掉中心 a 后，所得的区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 去心邻域（见图 1－8）．即

$$\{x|0<|x-a|<\delta,\delta>0\}$$

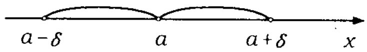

图 1—8

例如,点 3 的 $\delta=0.05$ 的邻域可表示为:

$$\{x \mid |x-3|<0.05\}$$

即
$$-0.05<x-3<0.05$$

亦即
$$-0.05+3<x<0.05+3$$

故该点的 δ 的邻域就是(2.95,3.05).

去心 δ 邻域是

$$\{x \mid 0<|x-3|<0.05\}=(2.95,3)\cup(3,3.05).$$

1.2 函　数

1.2.1 函数概念

在研究事物运动中,常会遇到两种不同的量.如果一个量在某一过程中保持不变,总是取一个值,则称这种量为**常量**(或常数).例如两地之间的距离.如果一个量在某一过程中是变化的,即可取不同数值,则称这种量为**变量**(或变数).例如某路口的噪声分贝数.

常量通常用 a、b、c 等表示,变量通常用 x、y、z、t 等表示.

在许多的现象中,变量的变化常常是相互关联、相互依赖的.例如,某商店本月进货某种型号灯具共 600 件,若以单价 50 元销售,那么,此型号灯具的销售量及销售额都是变量,并且,总收入依赖于销售量,当销售量确定时,其销售额被确定.这种依赖关系,通常称为函数关系.

定义 1 如果变量 x 在其变化范围 D 内任意取定了一个数值,变量 y 按照一定对应法则总有确定的数值和它对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$.

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,f 称为**对应法则**(即 y 与 x 之间的对应关系).

自变量 x 的变化范围 D 称为函数的**定义域**.

自变量 x 取定义域内某一数值 x_0 时,对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记为 $y=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍定义域 D 内的各个数值时,对应的变量 y 取值的全体组成的数集称作这个函数的**值域**.

函数是由定义域及对应法则所确定的,不同的对应法则表示不同的函数,并且,研究函数时必须注意它的定义域.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的.例如在上述的销售

问题中，灯具的销售额是销售量的函数，其定义域为 $D=[0,1,2,\cdots,600]$.

例 1　设有函数 $f(x)=x-2$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$，判定它们是否为同一的函数．

解　只有当两个函数具有相同的定义域和对应法则时，它们才是相同的函数．

$f(x)=x-2$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，而函数 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域则为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

两函数的定义域不相同，所以 $f(x)=x-2$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 是两个不同的函数．

例 2　求函数 $y=\dfrac{\lg(x+2)}{x-3}-\sqrt{9-x^2}$ 的定义域．

解　对于函数 $y=\dfrac{\lg(x+2)}{x-3}-\sqrt{9-x^2}$，要求对数的真数式大于 0，分数的分母式不能等于 0，偶次被开方式非负，即

$$\begin{cases}x+2>0\\x-3\neq0\\9-x^2\geqslant0\end{cases}$$

解此不等式组得

$$\begin{cases}x>-2\\x\neq3\\-3\leqslant x\leqslant3\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值，函数 y 都只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，例如 $y=x^2$，$y=\sin x$. 否则就叫做多值函数，例如 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

以后，凡是没有特别说明时，本书所讨论的函数都是单值函数．

例 3　设函数 $f(x)=x^2-\sin(x+1)$，求 $f(-1)$，$f(m)$，$f(2x-3)$.

解　$f(x)$ 的定义域为 R，所以：

$$f(-1)=(-1)^2-\sin(-1+1)=1,$$
$$f(m)=m^2-\sin(m+1),$$
$$f(2x-3)=(2x-3)^2-\sin(2x-2).$$

1.2.2　函数的表示法

常用的函数表示方法有三种：

1. 公式法

用数学式子表示自变量与因变量之间对应法则的方法称为**公式法**．这是微积分中研

究函数时最常用的函数表示法．例如，$y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$等．

2. 表格法

在实际应用中，常把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表格，以此表示自变量与因变量的对应关系的方法称为**表格法**．如某产品上半年的销售量(单位：台)与时间的函数关系由表 1—1 所示．

表 1—1

月　份	1月	2月	3月	4月	5月	6月
销售量(台)	890	976	680	1 200	1 005	785

定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6\}$.

3. 图示法

图示法是指利用曲线图形，揭示自变量与因变量之间的函数关系的一种表示方法．

例 4　某种产品利润 L 与产量 Q 的关系见图 1—9，其定义域为(a,b).

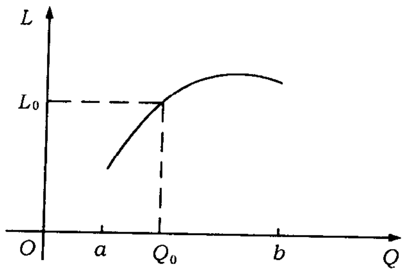

图 1—9

为更好地表示函数，往往同时使用两种或两种以上的表示方法．一般是采用公式法表示函数，为了直观，常常辅之以图示法，利用函数的图形来帮助分析问题．

函数与其自变量之间的对应关系，常用两种不同形式的表达式表示．

一种是把函数 y 直接写成自变量 x 的明显表达式 $y=f(x)$，称为显函数．例如 $y=5x^3-x+7$，$y=x\cos x$ 等等，其特点是：等号左端是因变量 y 的符号，而右端是仅含自变量 x 的运算式，当自变量 x 取定义域内的任一值时，由右端式子能确定对应的函数值．

另一种是函数 y 和自变量 x 的对应关系由一个方程 $F(x,y)=0$ 给出，例如 $x^2+y^2=R^2$，$5x+2y=7$，$e^{x+y}+\sin(xy)=y$，等等．我们把由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 是 x 的函数称为**隐函数**．

有的隐函数能写成显函数的形式，如方程 $x^2+y^2=R^2$，可写成 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，方程