面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

梁保松　陈　涛　主编

中国农业出版社

内 容 提 要

本书被教育部列入全国高等教育"面向 21 世纪课程教材",主要内容有:函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等。本书内容丰富,取材广泛,注重体现素质教育与创新能力的培养,突出应用数学能力的培养,体现数学建模思想。

本书各节后配有适量习题,以巩固所学内容。每章后均配有自测题,其题型包括选择题、判断题、填空题、证明题,供报考研究生者选用。本书附有习题及自测题答案,使内容和体系更加完善。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易学。可作为高等院校农、林、牧、生物、经管、财会等专业的教科书,也可作为各类专业技术人员的参考书。

前　　言

.本教材被教育部列入全国高等教育“面向21世纪课程教材”。

数学是科学的基本语言，是研究和探索物质世界的重要手段。对于现代化的工农业技术和现代化工程而言，数学则是表达技术原理、进行复杂的工程设计和计算必不可少的工具。特别是随着计算机技术的快速发展，数学的社会化程度日益提高，现代化产业和经济的组织与管理，已完全离不开数学所提供的方法和技术。因此，高等数学在大学教育中占有举足轻重的地位。

数学给予人们的不仅是知识，最重要的是能力。这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断。所以，高等数学在素质教育中的作用是其他课程无法企及的。

高等数学博大精深，要使学生在有限的时间内深刻地掌握其思想和方法，首先需要有好的教材。对于高等农林院校来说，要培养学生应用于农林技术、农林工程、生物技术等领域的数学思想和方法，在教材内容和体系的安排上就必须体现高等农林教育的特色。

本书按照“面向21世纪高等农林教育高等数学教学大纲”的基本要求，结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想，注重体现素质教育和创新能力的培养，以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求。本书在具体内容的安排上具有以下特点：

1. 保持体系完整。全书结构严谨，内容由浅入深，循序渐进，通俗易学，努力突出高等数学的基本思想和基本方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系，从总体上把握高等数学的思想方法；另一方面，培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用。删去了一些繁琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出高等数学的基本概念、法则和公式，使表达更加简明；引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决实际问题的能力，突出了数学的应用性。

3. 体现农林特色。较多地设置了生物科学、生命科学、农林经济管理等方面的实例，突出了高等数学在农林科学中的应用，促进了高等数学与农林专业课程的结合，为学生学习专业提供了“接口”。

参加本书编写的有:梁保松、陈涛、张玉峰、赵玉祥、潘正义、党耀国、叶耀军、杨德彰、曹殿立,最后由梁保松统一定稿。

郑州大学石东洋教授仔细审阅了全书,并提出了宝贵建议,在此表示衷心的感谢。

最后,对中国农业出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持,表示衷心感谢。

错漏之处,敬请得到专家、同行和读者的批评指正。

编 者

2001 年 12 月 24 日

主　编　梁保松　陈　涛
副主编　张玉峰　赵玉祥
参　编　叶耀军　杨德彰　党耀国
　　　　曹殿立　潘正义
审　稿　石东洋

目　　录

第一章

函数的极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象.所谓函数关系就是变量之间的对应关系.极限方法是研究变量的一种基本方法.本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念,这些内容构成了全书的基础.

第一节　函数的基本概念

在初等数学中,读者已学过函数概念,本节仅就这方面内容归纳和补充.

一、函数定义

定义1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一非空数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则 f 有惟一确定的数值与 x 对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.数集 D 叫做这个函数的定义域,f 叫做对应法则,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$.当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值的全体组成的数集:

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

由函数的定义可知,一个函数由对应法则 f 及定义域 D 所完全确定,选用什么字母表示函数不是本质的.也就是说,**两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同**.例如 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而且对应法则也相同,因而这两个函数是相同的.函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 是不相同的,因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.显然,$f(x)=1+x^2$ 与 $g(t)=1+t^2$ 是同一个函数.

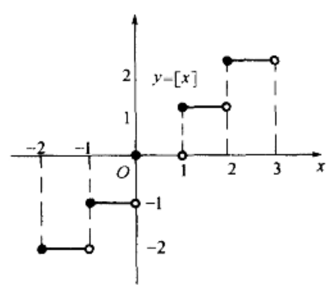

图1-1

例 1 对任意实数 x,记$[x]$为不超过 x 的最大整数.

例如$[\sqrt{2}]=1,[-\pi]=-4,[\pi]=3,[0]=0$,称 $f(x)=[x]$为**取整函数**.它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域是整数集.其图形如图 1-1 所示.

二、分段函数

例 2 函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,其图形关于 y 轴对称(图 1-2).这个函数称为**绝对值函数**.

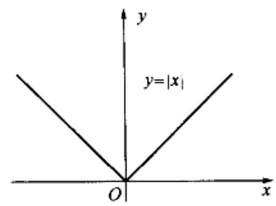

图 1-2

例 3 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} -1+x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=(-1,+\infty)$,其图形如图 1-3 所示.

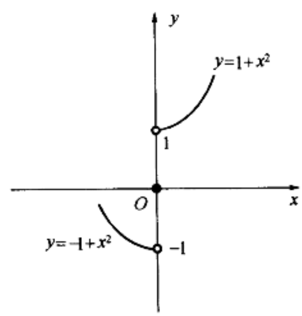

图 1-3

在例 2 和例 3 中看到,有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,称为**分段函数**.例 2 和例 3 都是分段函数.

例 4 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$$

是一个分段函数,它的定义域 $D=[0,+\infty)$.分段函数的对应法则是由自变量所在的范围所确定的,在求分段函数的函数值时,应根据自变量所在的范围,选择相应的对应法则.例如$\frac{1}{2}\in[0,1]$,所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.$4\in(1,+\infty)$,所以 $f(4)=1+4=5$.

三、复合函数

定义 2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 E,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D,值域为 W.若 $W\cap E$ 非空,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,u 为中间变量.

由定义可知,复合函数是说明函数对应法则的某种表达方式的一个概念.利用这一概念,一方面也可以产生新的函数,另一方面,可以把函数分解成几个函数.

例 5 设 $y=f(u)=u^2, u=\varphi(x)=1-x^2$,则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=(1-x^2)^2 \quad (-\infty<x<+\infty)$$

例 6 设 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=1-x^2$ 则复合而成的函数为

$$y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

虽然函数 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,但为了使复合后的函数有意义,必须使 $u\geqslant 0$,故限制 x 的范围为$[-1,1]$.

例 7 设函数 $y=f(u)=\arcsin u, u=\varphi(x)=3+x^2$,则由于 x 无论取何值均有 $u\geqslant 3$,故 $u=\varphi(x)$的值域 $W=[3,+\infty)$,而 $y=f(u)$的定义域 $E=[-1,1]$, $W\cap E=\varnothing$,故 $y=f[\varphi(x)]$ 无定义.

例 7 表明,**并非任何两个函数都能够复合成一个复合函数**.

例 8 设 $f(x)=x^2, g(x)=3x$.求 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(3x)=(3x)^2=9x^2, g[f(x)]=g(x^2)=3x^2$.

例 8 表明:$f[g(x)]$与 $g[f(x)]$一般来说是不同的.

关于复合函数,**重要的是把一个复合函数分解成若干个简单函数**.

例如 $y=\ln\sin\sqrt{x^2+1}$可以分解为

$$y=\ln u, \quad u=\sin v, \quad v=\sqrt{w}, \quad w=x^2+1.$$

例 9 设 $f(\sin t)=1+\cos 2t$,求 $f(x)(|x|\leqslant 1)$.

解 因为 $1+\cos 2t=2(1-\sin^2 t)$,故 $f(\sin t)=2(1-\sin^2 t)$.它可以看做是由 $f(x)=2(1-x^2)$与 $x=\sin t$ 复合而成的复合函数,从而

$$f(x)=2(1-x^2)$$

例 10 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求 $\varphi(x)$.

解 因为 $\varphi(x+1)=\begin{cases}(x+1-1)^2, & 1\leqslant x+1\leqslant 2\\ 2(x+1-1), & 2<x+1\leqslant 3\end{cases}$,

令 $t=x+1$,得 $\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3\end{cases}$, 所以

$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

四、初等函数

下列函数称为**基本初等函数**:

(1)常数	$y=C$	(C 为常数);
(2)幂函数	$y=x^\alpha$	(α 为实数,$\alpha\neq 0$);
(3)指数函数	$y=a^x$	($a>0, a\neq 1$);
(4)对数函数	$y=\log_a x$	($a>0, a\neq 1$);

(5)三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

(6)反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$.

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=(1+\sin x)\sqrt{e^x-1}$，$y=e^{\sin x}+x\ln\tan^2 x$ 均为初等函数.

为今后应用，现介绍邻域的概念. 以 a 为中心的开区间 $(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$ 称为 a 的 **δ 邻域**，记为 $N(a,\delta)$. 在 $N(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后，称为 a 的**去心邻域**，记为 $N(\hat{a},\delta)$.

领域是极限理论中的一个基本概念，可用来表示点 x 与 a（即数 x 与 a）的接近程度. 如

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow x\in N(a,\delta), 0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow x\in N(\hat{a},\delta).$$

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$； (2) $y=\arcsin(x+\frac{1}{2})$； (3) $y=\frac{x}{\sin x}$；

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}+\lg(x+1)(4-x)$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\ln u^2$， $g(x)=2\ln u$；

(3) $f(x)=1$， $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(4) $f(x)=\frac{\pi}{2}$， $g(x)=\arcsin x+\arccos x$.

3. 求下列函数值.

(1) 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0), f(-1), f(\frac{\sqrt{3}}{2}), f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(2) 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{6}), \varphi(-3)$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求 $f(x^2)$、$f(\sin x)$、$f(\frac{1}{x})$ 的定义域.

5. (1) 设 $f(x)=x^2+1$，求 $f(x^2+1), f(\frac{1}{f(x)})$.

(2) 设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}, x>0$，求 $f(x)$.

(3) 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$.

(4) 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\varphi(x)$.