学真题1+1系列

考研真题数学四

2006~1997

详解·拓展·评析

主编 世华 潘正义

3

吃透真题 考研成功一半!

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

○考研数学真题 1 + 1 系列○

考研真题数学（四）

2006～1997

详解·拓展·评析

主编　世华　潘正义

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研真题数学四详解·拓展·评析. / 世华,潘正义主编. —北京:世界图书出版公司北京公司,2006.2
ISBN 7-5062-7921-5

Ⅰ. 考... Ⅱ. ①世... ②潘... Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. 013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007840 号

考研真题数学四

详解·拓展·评析

主　　编: 世　华　　潘正义
责任编辑: 李根宾
封面设计: 林娜娜

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 廊坊人民印刷厂印刷

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 7.25
字　　数: 190 千字
版　　次: 2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-7921-5/O · 546　　**定价:8.80 元**

服务热线: 010 - 88861708

关于数学真题的公告

一、我们为什么需要真题

真题是你复习备考的总方向，未来考题只在难易程度上围绕过去的真题小幅波动，你的一切努力就是为了征服它。

真题是一面镜子，能够反映你在不同的复习阶段与它有多大的距离。

真题是一扇窗口，你能看到你想看的风景。

真题是一堆宝藏，做得多、练得熟了，你自己都能总结出命题规律。

真题是一台测速仪，做题的速度也许会直接决定你的成绩。

二、关于《真题集》

《真题集》是公共资源，没有知产附加价值，因此，我们无偿为你提供服务，提供完全真实的训练平台，你付出的只是生产成本。

三、关于真题解析

本部分严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，汇集最近十年数学全部考研试题的详细解析。通过『**命题目的**』、『**思路点拨**』、『**详细解答**』、『**易错辨析**』、『**延伸拓展**』几个步骤对历年真题进行全方位的剖析，以达到通过真题学习数学，进而举一反三、触类旁通，掌握数学的目的。通过每套试卷的考点分布表统计历年真题的考点分布，让读者很直观地把握考试重点，了解命题特点。通过试卷评析，点评每套试卷的难点与重点，帮助读者把握命题规律，做到有的放矢。

编　者

目录

2006 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)

详解·拓展·评析

一、填空题

(1)【标准答案】 1.

【命题目的】 本题考查求不定式的极限.

【详细解答】 当 $n=2k$ 时,原式 $=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k}=1$

当 $n=2k-1$ 时,原式 $=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2k-1}{2k}=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$

【易错辨析】 该题容易混淆为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}=$ 不存在.

【延伸拓展】 对于数列 $\{x_n\}$,若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,则 $x_n\to a(x\to\infty)$.

---

(2)【标准答案】 $2e^3$.

【命题目的】 本题考查了三阶导数的计算.

【详细解答】 $f'(2)=e^{f(2)}=e$

$f''(x)=e^{f(x)}f'(x)$,$f''(2)=e^{f(2)}f'(2)=e^2$

$f'''(x)=e^{f(x)}[f'(x)]^2+e^{f(x)}f''(x)$

$f'''(2)=e^{f(2)}[f'(2)]^2+e^{f(2)}f''(2)=e^3+e\cdot e^2=2e^3$.

【易错辨析】 求导时易出现计算错误.

【延伸拓展】 本题可求出 $f^n(x)$ 的通项表达式.

---

(3)【标准答案】 $4dx-2dy$.

【命题目的】 考查了隐函数的微分.

【详细解答】 $dz=f'(4x^2-y^2)8xdy-f'(4x^2-y^2)2ydy$

$dz\Big|_{(1,2)}=f'(0)8dx-f'(0)4dy=4dx-2dy$.

【易错辨析】 逐项微分后,再代入数值计算.

【延伸拓展】 该题可用微分形式不变性来解:

$dz=f'(4x^2-y^2)d(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)(8xdx-2ydy)$.

---

(4)【标准答案】 -2.

【命题目的】 本题考查了行列式的计算.

【详细解答】 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}$

$6=|A|=|B|\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3|B|,|B|=-2.$

【易错辨析】 注意把 A 表示成 B 右乘矩阵.

【延伸拓展】 本题也可用行列式性质求解:

$|A|=|2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2|=|2\alpha_1,-\alpha_2|+|\alpha_2,\alpha_1|=-3|\alpha_1,\alpha_2|=-3|B|$

$6=|A|=-3|B|,|B|=-2.$

---

(5)【标准答案】 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

【命题目的】 本题考查了矩阵变换和行列式的计算.

【详细解答】 由 $BA=B+2E,B(A-E)=2E,B=2(A-E)^{-1}=2\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

【易错辨析】 $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$,所以 $|2E|\neq 2|E|$,应该 $|2E|=4|E|=4$.

【延伸拓展】 本题也可先求出矩阵 B,但计算稍复杂.

---

(6)【标准答案】 $\frac{1}{9}$.

【命题目的】 本题考查了二维随机变量分布计算.

【详细解答】 $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}$

$=\int_0^1\frac{1}{3}dx\int_0^1\frac{1}{3}dy=\frac{1}{9}.$

【易错辨析】 注意条件中的 X 与 Y 相互独立.

【延伸拓展】

$$P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 相互独立同分布}}P(X_1\leqslant x)\cdots P(X_n\leqslant x)=\{P(X_1\leqslant x)\}^n$$

$$\begin{aligned}P\{\min(X_1,\cdots,X_n)\leqslant x\}&=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>x\}=1-P(X_1>x,\cdots,X_n>x)\\&\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{ 独立同分布}}1-P(X_1>x)\cdots P(X_n>x)\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}\cdots\{1-P(X_n\leqslant x)\}\\&=1-\{1-P(X_1\leqslant x)\}^n.\end{aligned}$$

二、选择题

(7)【标准答案】 (A).

【命题目的】 本题考查了导数与微分的相关概念.

【详细解答】 $dy=f'(x_0)\Delta x>0$, 所以排除(C)、(D).

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o[(\Delta x)^2]$$

$$=dx+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o[(\Delta x)^2]$$

因为$\dfrac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+o[(\Delta x)^2]>0$，所以$0<\mathrm{d}y\leqslant\Delta y$.（A）为答案.

【易错辨析】 泰勒公式和麦克劳林公式要掌握熟练.

【延伸拓展】 本题可利用凹凸性来解：$f''(x)>0$，曲线为凹的；$f'(x)>0$，曲线单增，当$\Delta x>0$时，$\mathrm{d}y>0$. 画出曲线草图立即可知$0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

---

(8)**【标准答案】** (C).

【命题目的】 本题考查了导数的相关性质.

【详细解答】 $\because \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$ 又 $\because \lim\limits_{h\to 0}h^2=0$，$\therefore \lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=0$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以$f(0)=0$

当 $h\to 0$ 时，$h^2\to 0^+$，于是

$1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h^2\to 0^+}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=f'_+(0)$.（C）为答案.

【易错辨析】 掌握左右导数的相关概念.

【延伸拓展】 1）$h\to 0\Leftrightarrow h^2\to 0^+$；2）若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$ 且$\lim\beta=0$，则$\lim\alpha=0$.

---

(9)**【标准答案】** (D).

【命题目的】 本题考查了积分的性质.

【详细解答】 因为 C 可能大于$\dfrac{1}{2}$，也可能小于$\dfrac{1}{2}$ 所以(A)、(B) 都不是答案. 1 大于 C，所以当

$f(x)\leqslant g(x)$ 时$\int_C^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_C^1 g(t)\,\mathrm{d}t$，(D) 为答案.

【易错辨析】 讨论 C 的取值.

【延伸拓展】 画出图形，可以很直观的判别.

---

(10)**【标准答案】** (B).

【命题目的】 本题考查了微分方程解的性质.

【详细解答】 $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的解，$C[y_1(x)-y_2(x)]$ 是齐次方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解. 非齐次方程的通解为齐次方程的通解加非齐次方程的特解. 所以 $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$ 是非齐次方程的通解.（B）为答案.

【易错辨析】 掌握微分方程解的相关性质，即可解题.

【延伸拓展】 无论是一阶、二阶常系数绒性微分方程；线性代数中的线性方程组都有以下结论成立：非齐次方程的通解为齐次方程的通解加非齐次方程的特解.

---

(11)**【标准答案】** (D).

【命题目的】 本题考查了多元函数极值的性质.

【详细解答】 因为 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，所以由 $\varphi(x,y)=0$ 可解出 $y=y(x)$.

令 $Z=f(x,y)=f(x,y(x))$

因为(x_0,y_0) 是极值点，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0 \qquad (*)$$

所以当$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$(否则，若$f'_y(x_0,y_0)=0$，由(*)知,$f'_x(x_0,y_0)=0$，矛盾).(D)为答案.

【易错辨析】 掌握多元函数求极值的方法.

【延伸拓展】 本题也可用辅助函数法求解.

---

(12)**【标准答案】** (B).

【命题目的】 本题考查了矩阵的初等变换.

【详细解答】 由 P 的表达式，容易求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换，右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换. PA 将 A 的第2行加到第1行，PAP^{-1} 再将所得的矩阵的第一列的 -1 倍加到第2列，即得到矩阵 C. (B)为答案.

【易错辨析】 应熟记:左乘初等矩阵相当于进行相应的行变换,右乘初等矩阵相当于进行相应的列变换.

【延伸拓展】 本题也可反过来,已知 C,P 的关系,问 A 与 C 是如何变换的.

---

(13)**【标准答案】** (C).

【命题目的】 本题考查了事件概率的性质.

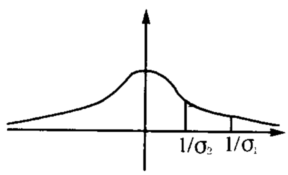
【详细解答】 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\mid B)P(B)=P(A)$. (C)为答案.

【易错辨析】 熟记常用的概率公式.

【延伸拓展】 利用概率公式变换即可求解.

---

(14)**【标准答案】** (A).



【命题目的】 本题考查了正态分布的相关性质.

【详细解答】 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1},\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$ 都服从标准正态分布 $N(0,1)$.

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\left|\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right|<\frac{1}{\sigma_2}\right\}$$

由图知:$\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$,$\sigma_1<\sigma_2$. (A)为答案.

【易错辨析】 熟记密度函数的图形,就能按本题的解法,很快找到答案.

【延伸拓展】 1)应熟记:$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$;2)若$\Phi(x)$为$N(0,1)$的分布函数，则 $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$,$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.

三、解答题

(15)【命题目的】 本题考查了函数极限计算.

【思路点拨】 先计算出 $g(x)$ 的表达式,再求不定式的极限.

【详细解答】 (Ⅰ)

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}-\frac{1-\lim\limits_{y\to+\infty}y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-\lim\limits_{y\to+\infty}y\cdot\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}$$

(Ⅱ) $$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x\arctan x}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{2x}+\pi=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1-1-x^2}{1+x^2}}{2x}+\pi=\pi.$$

【易错辨析】 掌握极限计算的相关方法.

【延伸拓展】 本题的极限称为二重极限,应注意:$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)$,$\lim\limits_{x\to x_0}[\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)]$,$\lim\limits_{y\to y_0}[\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)]$ 三者都不一定相等.

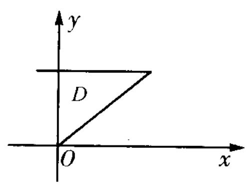
(16)【命题目的】 本题考查了二重积分计算.

【思路点拨】 先对 x 积分,再对 y 积分.

【详细解答】 $$\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,dx$$

$$=-\int_0^1\frac{1}{y}\frac{2}{3}(y^2-xy)^{3/2}\Big|_0^y dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1}{y}y^3dy=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}.$$



【易错辨析】 该题必须先对 x 积分,再对 y 积分. 否则很难算出结果.

【延伸拓展】 本题也不宜用极坐标变换来计算.

(17)【命题目的】 本题考查了利用导数的性质证明函数不等式.

【思路点拨】 构造辅助函数,再利用导数判断其增减性.

【详细解答】 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi\alpha$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi$,

$f''(x)=\cos x+\cos-x\sin x-2\cos x=-x\sin x<0(\in(0,\pi))$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单减. $f'(x)>f'(\pi)=0(x\in(0,\pi))$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单增. 所以 $f(b)>f(a)=0$

即　$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin b + 2\cos a + \pi a.$

【易错辨析】　掌握导数的相关性质.

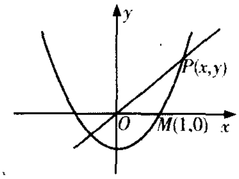
【延伸拓展】　对于积分不等式也可使用类似方法构造辅助函数：将一个常数全部改成变量 x，移项后为辅助函数.

---

(18)**【命题目的】**　本题考查了一阶微分方程的求解.

【思路点拨】　先求出其满足的一阶微分方程，再利用公式法求解微分方程.

【详细解答】　$P(x,\ y)$ 处切线斜率为：$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$



直线 OP 的斜率为：$\dfrac{y}{x}$. 于是得到$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = ax \\ y(1) = 0 \end{cases}$

为带有初始条件的一阶线性方程. $p(x) = -\dfrac{1}{x}, q(x) = ax$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{-1}{x}dx} ax dx + C\right) = ax^2 + Cx$$

由 $y(1) = 0$ 得 $0 = a + C, C = -a$

$y = ax^2 - ax$

因为 $a > 0$，所以如图得：$\begin{cases} y = ax \\ y = ax^2 - ax, \end{cases}$　　得 $x = 0, x = 2$

$$\frac{8}{3} = \int_0^2 [ax - (ax^2 - ax)]dx = a\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = a\left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}a$$

$a = 2.$

【易错辨析】　注意 a 的取值范围.

【延伸拓展】　1）一阶线性方程也可用常数变易法求解；2）本题的一阶线性方程中，一阶导数前的系数为 1，所以可以直接代公式；否则，方程要除以一阶导数前的系数，使一阶导数前的系数为 1.

---

(19)**【命题目的】**　本题考查了泰勒展开.

【思路点拨】　先利用泰勒展开，再比较各项系数.

【详细解答】　$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

代入，得：$\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$

整理，得：

$$1 + (B+1)x + (C + B + \frac{1}{2})x^2 + (\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3)$$

二边比较系数：$\begin{cases} B + 1 = A \\ C + B + \dfrac{1}{2} = 0 \\ \dfrac{B}{2} + C + \dfrac{1}{6} = 0 \end{cases}$

$A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

【易错辨析】 用洛必达计算极限会稍复杂.

【延伸拓展】 拉格朗日余项的泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

皮亚诺余项的泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n].$$

---

(20)【命题目的】 本题考查了极大无关组的计算.

【思路点拨】 在 $|A|=0$ 的条件下计算 a 的取值,再代入求线性表示.

【详细解答】 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 所以

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2a&-3a&4-(4+a)(1+a)\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2a&-3a&-5a-a^2\\0&a&0&-a\\0&0&a&-a\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=a^3(10+a),a=0,a=-10$$

i. $a=0$

极大线性无关组为:α_1

$\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$

ii. $a=-10$

$$\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&20&30&-50\\0&-10&0&10\\0&0&-10&10\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以得极大线性无关组:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;$\alpha_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性表示为:$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

【易错辨析】 掌握向量组的变换方法.

【延伸拓展】 极大线性无关组不是唯一的. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$、$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 等都是极大线性无关组.

---

(21)【命题目的】 本题考查了特征值与特征向量的相关计算.

【思路点拨】 先计算特征值与特征向量,正交化后,直接求对角矩阵的幂次.

【详细解答】 (Ⅰ) 由条件知 0 是特征值, 相应的特征向量为 I_1,I_2.

取 $I_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,假设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,则 $AI_3=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

所以 $\lambda=3$ 为特征值,相应的特征向量为 $\bar{\beta}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ)将 I_1,I_2 正交化:

$$\bar{\beta}_1=I_1,\bar{\beta}_2=I_2-\frac{(I_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}-\frac{-3}{6}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

将 $\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2,\bar{\beta}_3$ 标准化后得:$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$,$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$,$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$,

所以,$Q=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$, $Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

(Ⅲ)$\Lambda-\frac{3}{2}E=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2}&0&0\\0&\frac{-3}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=\left[Q(\Lambda-\frac{3}{2}E)Q^{\mathrm{T}}\right]^6=Q\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^6Q^{\mathrm{T}}$$

$$=Q\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^6&0&0\\0&\left(\frac{3}{2}\right)^6&0\\0&0&\left(\frac{3}{2}\right)^6\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}\right)^6&0&0\\0&\left(\frac{3}{2}\right)^6&0\\0&0&\left(\frac{3}{2}\right)^6\end{bmatrix}.$$

【易错辨析】 本题利用了正交矩阵 $Q^T=Q^{-1}$,于是 $Q^TQ=E$,很容易求出 $(A-\frac{3}{2}E)^6$;如果先出 $A-\frac{3}{2}E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$,再求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$,计算 $(A-\frac{3}{2}E)^6$ 的过程比较繁复.

【延伸拓展】 本题也可用以下方法求解:假设另一个特征值 λ 的特征向量为 $(1,x,y)$,则它应 I_1,I_2 正交.立即可求出 x,y.由 A 的各行元素之和均为 3 可求出特征值 λ 的值.

22)【命题目的】 本题考查了离散型随机变量分布及其性质.

【思路点拨】 利用已知条件解参数方程可得 a,b,c 的值,代入后求 Z 的分布.

【详细解答】 (Ⅰ)由 $P(Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0)=0.5$ 得 $\dfrac{P(Y\leqslant 0,X\leqslant 0)}{P(X\leqslant 0)}=0.5$

所以 $0.5P(X\leqslant 0)=P(Y\leqslant 0,X\leqslant 0)$,即 $0.5(a+b+0.5)=a+b+0.1$

$$\begin{cases}a+b+c+0.6=1\\-a-0.2+0.1+c=-0.2\\0.5(a+b+0.5)=a+b+0.1\end{cases}\qquad\begin{cases}a+b+c=0.4\\-a+c=-0.1\\a+b=0.3\end{cases}$$

所以 $a=0.2,b=0.1,c=0.1$

所以

X \ Y	−1	0	1
−1	0.2	0	0.2
0	0.1	0.1	0.2
1	0	0.1	0.1

(Ⅱ)

$Z=X+Y$	−2	−1	0	1	2
p	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=0.1$

$P(Z=-2)=P(X=-1,Y=-1)=0.2$

$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=0.2+0.1=0.3$

$P(Z=-1)=P(X=0,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)=0.1+0=0.1$

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)=0.1+0+0.2=0.3$

(Ⅲ) $P(X=Z)=P(X=X+Y)=P(Y=0)=0+0.1+0.1=0.2$.

【易错辨析】 熟记常用的概率公式.

【延伸拓展】 如果条件是 $P(X\leqslant 0,Y\leqslant 0)=0.5$. 同样可算得 a,b,c 的值,读者可试着做一下.

---

23)【命题目的】 本题考查了二维随机变量分布的相关计算.

【思路点拨】 利用 $f(x)$ 的分段表达式先求出 $F(y)$ 的表达式,再计算 $f_Y(y)$.

【详细解答】 (Ⅰ) $F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$

① 当 $y<0$ $\quad F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=0$

② 当 $0\leqslant y<1$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\,dx=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$$

③ 当 $1\leqslant y<4$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

④ 当 $y \geqslant 4$

$$F(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}} & 0\leqslant y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}} & 1\leqslant y<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅱ) $EX=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$, $EX^2=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$

$$EX^3=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=EX^3-EX\cdot EX^2=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$$

(Ⅲ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P(X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4)=P(X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2)$

$$=P(-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2})=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

【易错辨析】 本题不能求出联合密度 $f(x,y)$ 及联合分布函数 $F(x,y)$.

【延伸拓展】 必须熟记:数学期望、方差、协方差、相关系数的相关计算公式.

2006 年数学(四)试卷评析

2006 年数学(四)考点分布表

考点	函数与极限	导数与微分	泰勒展开	积分的性质	二重积分	微分方程应用及求解	行列式计算	矩阵运算	向量的相关性	特征值特征向量的相关运算	随机变量及其分布	随机变量的数字特征
分数	15	26	10	4	7	12	4	8	13	13	25	13

本试卷微积分部分的试题主要考查了:1. 求函数的极限;2. 导数的性质及应用;3. 泰勒公式的应用;4. 二重积分计算;5. 微分方程应用及求解,其中导数的性质及应用属于基础题型,所占分值也较高,二重积分最近几年出现的频率也较高,考生应重点把握.

本试卷线性代数部分的试题主要考查了:1. 求行列式的值,矩阵变换及运算;2. 向量极大相关组的判断;3. 特征值与特征向量及对角化的相关运算。其中行列式、矩阵运算,向量组的相关性属基础题型,每年都有涉及,特征值及特征向量的相关计算最近几年也出现较多,考生需重点把握.

本试卷概率统计部分的试题主要考查了:简单随机变量的概率分布,二维随机变量的分布及数字特征,其中一维随机变量的性质应用和计算主要出现在填空题与选择题中,二维随机变量的分布及数字特征常以大题的形式出现,考生需注意.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)

详解 · 拓展 · 评析

一、填空题

(1)【标准答案】 2.

【命题目的】 考查了重要极限:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

【详细解答】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{2x}{x^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{2x}\cdot\dfrac{1}{x}}=2$

【易错辨析】 该题的关键是凑出$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$的极限形式,注意当$x\to\infty$时$\dfrac{2x}{x^2+1}\to0$.

【延伸拓展】 求含有三角函数的极限常常通过恒等变换凑出重要极限的形式或利用等价无穷小量替换来求解.

---

(2)【标准答案】 $y=\dfrac{2}{x}$.

【命题目的】 本题考查了可分离变量形式的微分方程的求解.

【详细解答】 $xy'+y=0\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow y=c\cdot\dfrac{1}{x}$,代入$\lambda x=1$,得$C=2$

∴ 特解为$y=\dfrac{2}{x}$

【易错辨析】 求出通解后,不忘记利用初始条件确定常数C的值.

【延伸拓展】 本题是求解微分方程的一类基本题型,近年来涉及微分方程求解的题目,多微分方程的初值问题.

---

(3)【标准答案】 $2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$.

【命题目的】 本题考查了二元函数的微分.

【详细解答】 $\mathrm{d}z=z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y$

$z'_x=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)$

$3y'=xe^{x+y}+\dfrac{x+1}{1+y}$

$\therefore \mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=z'_x\Big|_{(1,0)}\mathrm{d}x+z'_y\Big|_{(1,0)}\mathrm{d}y=2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y.$

【易错辨析】 先求出z'_x,z'_y,在写微分形式时不要忘记$\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$.

【延伸拓展】 注意区分导数与微分,求导数的题目常与隐含数相联系.本题要求考生掌握多元函数的微积分.

(4)【标准答案】 $\frac{1}{2}$.

【命题目的】 本题考查了向量组的线性相关.

【详细解答】 ∵ 向量组线性相关

$$\therefore 0=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&0&a-1&a-1\\1&1&0&a-1\\0&1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&2\\0&0&a-1&a-1\\1&1&0&a\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&1&2\\0&a-1&a-1\\1&0&a\end{vmatrix}$$

$$=-2a(a-1)+(a-1)$$

$$=(a-1)(-2a+1)$$

$\therefore a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$,而 $a\neq 1$,

$\therefore a=\frac{1}{2}$

【易错辨析】 在计算向量组所构成矩阵的行列式时容易出错.

【延伸拓展】 四维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0$.

(5)【标准答案】 2.

【命题目的】 考查了行列式的相关知识.

【详细解答】 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|$

$=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3|$ (第1列分别乘以(−1)并加到第2,3列)

$=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3|$ (第2列分别乘以(−2)并加到第3列)

$=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|$ (将第3列乘以(−3)加到第2列,然后第2列,第3列分别乘以(−1)并加到第1列)

$=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

$=2|\boldsymbol{A}|$

$=2.$

【易错辨析】 注意$|\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$,而$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$.

【延伸拓展】 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}$
其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 为了3维行向量,如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(6)【标准答案】 $\frac{13}{48}$.

【命题目的】 本题考查了全概率公式.

【详细解答】 若 $Y=2$,则 X 可能等于2,3,4,由全概公式可得:

$P\{Y=2\}=P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\}+P\{Y=2|X=3\}P\{X=3\}+P\{Y=2|X=4\}P\{X$

