陈鸿侠　编著

中学数学题综合精选

中国展望出版社

中学数学题综合精选

陈鸿侠　编　著

中国展望出版社

一九八五年·北京

封面设计：耿　旭
责任编辑：孟　固

中学数学题综合精选
陈鸿侠　编　著
•
中国农业出版社出版
（幽州特约编辑部）
石家庄市太行印刷厂印刷
北京新华书店发行

开本787×1092毫米　1/32　7.56印张
150千字　1985年10月第1版
第1次印刷　1—50,000册

统一书号：7271·048　定价：1.40元

出版说明

面临升学考试的中学生要对学过的数学课程进行总复习，而原理、定义又必须通过解题实践才能真正掌握。本书就是针对毕业生时间紧张复习量大这一特点选编的，内容包括中学数学全部课程，分为代数、平面三角、平面几何、立体几何、解析几何五个部分。本书选编258题，不追求偏、难，而贯穿基础知识与基本技能训练相结合的原则，题目由浅入深、难易相继以帮助读者巩固课本知识、熟练已经学过的解题技巧。各部分选题注意运用一科的知识去解决另一科题目以开阔读者思路、训练思维、提高解题能力。

陈鸿侠（原北京市第五中学一级教师）根据几十年的教学实践，从大量中外资料中筛选出与我国现行初等数学教育课程相一致的一些习题，并加以系统化、规律化整理，编成此书。陈显、付英同志参加了本书的编选工作。

本书适合初、高中毕业生，中学数学教师及复习中学数学的职工阅读。

一九八五年六月

前　　言

多年来，我们曾编写和汇集了一些题目。考虑这些题目还可以起到巩固知识、熟练技巧和发展思考能力的作用。现在选择其中一部分带有综合性的题目，编成这本小册子，希望能对学习中学数学的同志有一些参考作用。我们建议，读者在使用本书的时候，对于每一个题目都应该独立想考，寻找解题的思路和方法，不宜急于阅读书中的解答内容。

一个数学题目，往往不止一种解法，本书中的题目，绝大部分只列出了一种解法，而且不一定是最好的解法，甚至还有错误，希望读者给予指正。

编　者

目　录

代 数 部 分

（第1题～第97题）

1． 已知一个偶数能写成两个有理数的平方和，求证这个偶数的二分之一一定也能写成两个有理数的平方和。

证明：设这个偶数为$2n$（这里n是自然数），又a和b是两个有理数，由已知条件，得

$$2n = a^2 + b^2$$

于是
$$\begin{aligned} 4n &= 2(a^2 + b^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2ab \\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2 \end{aligned}$$

因而
$$n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

这就是所要证明的。

2． 已知a、b、c、d都是实数，且满足关系

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$$

求证边长为a、b、c、d的四边形必是菱形。

证明：由已知等式，可得

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd = 0$$

就是
$$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$$

因为a、b、c、d都是实数，所以$(a^2 - b^2)^2$、$(c^2 - d^2)^2$、

$(ab-cd)^2$都不是负数，然而它们的和是零，可见必然有

$a^2-b^2=0$，$c^2-d^2=0$，$ab-cd=0$

由前两个等式，得知　$a=b$，$c=d$

把它们代入到$ab-cd=0$中，就得到　$a=b=c=d$

所以边长为a、b、c、d的四边形是菱形。

3．化简　　$|x^2-3x+2|-\sqrt{x^2-6x+9}$

解：设　$y=|x^2-3x+2|-\sqrt{x^2-6x+9}$

那么　　$y=|(x-1)(x-2)|-\sqrt{(x-3)^2}$

当$x<1$时，$y=x^2-3x+2-(3-x)=x^2-2x-1$

当$1\leqslant x\leqslant 2$时，$y=-(x^2-3x+2)-(3-x)=-x^2+4x-5$

当$2<x\leqslant 3$时，$y=x^2-3x+2-(3-x)=x^2-2x-1$

当$x>3$时，$y=x^2-3x+2-(x-3)=x^2-4x+5$

4．已知$4x^2-4x-15\leqslant 0$，化简$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

解：已知不等式可以记为　$(2x+3)(2x-5)\leqslant 0$

解得　$-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{2}$.从而得知$2x+3\geqslant 0$（1）和$2x-5\leqslant 0$（2）

又　$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

$=\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(2x-5)^2}$

由（1）、（2）两式可知

$$\sqrt{(2x+3)^2}=2x+3$$

$$\sqrt{(2x-5)^2}=-(2x-5)$$

所以

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}=(2x+3)-(2x-5)=8$

5．已知a、b、x都是实数，且

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left|x+\frac{1}{x}-b\right|=0$$

求证 $b(b^2-3)=a$

证明：由已知条件，有

$$x^3+\frac{1}{x^3}-a=0 \qquad (1)$$

和

$$x+\frac{1}{x}-b=0 \qquad (2)$$

但是

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right] \qquad (3)$$

由（1）、（2）、（3）式，可得

$$b(b^2-3)=a$$

6．已知x、y、z、都是实数，且

$$x+y+z=2,\quad x^2+y^2+z^2=2$$

求证x、y、z、都不能是负数，也都不能大于$\frac{4}{3}$。

证明：已知 $x+y+z=2$ （1）

$$x^2+y^2+z^2=2 \qquad (2)$$

由（1）式，得 $z=2-x-y$

代入（2）式并整理，得

$$y^2+(x-2)y+(x-1)^2=0$$

因为x和y都是实数，所以有

$$(x-2)^2-4(x-1)^2\geqslant 0$$

就是 $3x^2-4x\leqslant 0$

解得 $0\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}$

同理 $0\leqslant y\leqslant \frac{4}{3}$ $0\leqslant z\leqslant \frac{4}{3}$

7．在什么条件下，复数$z=a+bi$（这里a、b都是实数)的平方是纯虚数？是实数？这时z表示的实数是什么数？

解：因为 $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

可见当$|a|=|b|\neq 0$时，复数z是纯虚数；当$a=b=0$，或$a=0$，$b\neq 0$或$a\neq 0$，$b=0$（即a、b有一个是0）时，z是实数，这时z分别为0，或$-b^2$，或a^2。

8．实数m取什么值时，复数

$$z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$$

是实数？纯虚数？

解：因为$z=(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$

$$=(m-4)(m+1)+(m-6)(m+1)i$$

所以当$m=-1$或$m=6$时，z是实数；当$m=4$时，z是纯虚数。

9．已知1、α、β是方程$x^3-1=0$的三个根，求证：

（1）$(2+5\alpha+2\beta)^6=(2+2\alpha+5\beta)^6=729$

（2）当n不是3的倍数时，$\alpha^n+\beta^n=-1$；当n是3的倍数时，$\alpha^n+\beta^n=2$

证明：（1）由于α、β是$x^3-1=0$的根，根据$1+\alpha+\beta=0$，可见

$$(2+5\alpha+2\beta)^6=(2+2\alpha+2\beta+3\alpha)^6=(3\alpha)^6$$
$$=729$$

$$(2+2\alpha+5\beta)^6=(2+2\alpha+2\beta+3\beta)^6=(3\beta)^6$$
$$=729$$

（2）当$n=3k+1$（k是自然数）时，由于$1+\alpha+\beta=0$，所以 $\alpha^{3k+1}+\beta^{3k+1}=\alpha+\beta=-1$

当$n=3k+2$时，由于$\alpha^2=\beta$，$\beta^2=\alpha$，所以

$$\alpha^{3k+2}+\beta^{3k+2}=\alpha^2+\beta^2=\beta+\alpha=-1$$

当$n=3k$时， $\alpha^{3k}+\beta^{3k}=(\alpha^3)^k+(\beta^3)^k=2$

10. 已知n是自然数。

（1）如果$(1+i)^n$是实数，求n的最小值，这时实数$(1+i)^n$是什么数？

（2）如果$(1+i)^n$是正实数、是纯虚数又怎样？

解：因为 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

所以 $$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

要使$(1+i)^n$是实数，必须$\sin\frac{n\pi}{4}=0$

于是得 $n=4k$（k是正整数）

要使n最小，取$k=1$，得$n=4$。这时

$$(1+i)^4=-4$$

（2）要使$(1+i)^n$是正实数，必须$\sin\frac{n\pi}{4}=0$，且$\cos\frac{n\pi}{4}>0$。又知$n=4k$，要求$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos k\pi>0$，于是应取$k$为偶数。为了使$n$最小，应该取$k=2$。这时$n=8$，那么就有 $(1+i)^8=16$

要使 $(1+i)^n$是纯虚数，必须有$\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$，那么

$$\frac{n\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

所以 $$n=8k+2$$

为了使n最小，取$k=0$，于是得$n=2$。这时

$$(1+i)^n=2i$$

11. 已知m是不等于零的实数，且$|m|<1$，求证

$$z=\frac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i}{\sqrt{1+m}-\sqrt{1+m}\,i}-\frac{\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i}{\sqrt{1-m}-\sqrt{1+m}\,i}$$

是实数。

证明：由于$|m|<1$，可知

$$1-m>0,\quad 1+m>0,\quad 1-m^2>0$$

因而$\sqrt{1-m}$、$\sqrt{1+m}$、$\sqrt{1-m^2}$都是实数。于是

$$\frac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i}{\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}\,i}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i)(\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i)}{(\sqrt{1+m}-\sqrt{1-m}\,i)(\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\,i)}$$

$$=\frac{(1+m)+2\sqrt{1-m^2}\,i-(1-m)}{2}$$

$$=m+\sqrt{1-m^2}\,i$$

$$\frac{\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i}{\sqrt{1-m}-\sqrt{1+m}\,i}$$

$$=\frac{(\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i)(\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i)}{(\sqrt{1-m}-\sqrt{1+m}\,i)(\sqrt{1-m}+\sqrt{1+m}\,i)}$$

$$=\frac{(1-m)+2\sqrt{1-m^2}\,i-(1+m)}{2}$$

$$=-m+\sqrt{1-m^2}\,i$$

因此 $z=(m+\sqrt{1-m^2}\,i)-(-m+\sqrt{1-m^2}\,i)=2m$

可见z是实数。

12. 已知$(z+1)^n=(z-1)^n$，求证

$$z=-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\quad(k=0,1,2\cdots,n-1)$$

证明：由$(z+1)^n=(z-1)^n$，得

$$\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

所以

$$\frac{z+1}{z-1}=(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

根据合分比定理，可得

$$\frac{(z+1)+(z-1)}{(z+1)-(z-1)}=\frac{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}+1}{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}-1}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{-2\sin^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\left(\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}+\cos\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$$

$$=-\mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$$

所以 $z=-\mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

13. 复数z_1、z_2、z_3满足条件

$$z_1+z_2+z_3=0\text{ 和 }|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

求证：z_1、z_2、z_3在复平面上对应的点是内接于单位圆的等边三角形的三个顶点。

证明：因为$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，所以z_1、z_2、z_3在复平面上对应的点在一个单位圆上。

又已知 $$z_1+z_2+z_3=0$$

就是 $$e^{\mathrm{i}\theta_1}+e^{\mathrm{i}\theta_2}+e^{\mathrm{i}\theta_3}=0$$

$$e^{\mathrm{i}\theta_1}+e^{\mathrm{i}\theta_2}=-e^{\mathrm{i}\theta_3}=e^{\mathrm{i}(\pi+\theta_3)}$$

于是有 $$\cos\theta_1+\cos\theta_2=\cos(\pi+\theta_3)$$

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2=\sin(\pi+\theta_3)$$

把上面两个等式的两边平方，再相加，得

$$2+2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=1$$

就是 $$\cos(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}$$

所以 $$\theta_1-\theta_2=\frac{2\pi}{3}$$

同样可以得到 $$\theta_2-\theta_3=\frac{2\pi}{3}$$

$$\theta_3-\theta_1=\frac{2\pi}{3}$$

这样，可知z_1、z_2、z_3在复平面上对应的点是内接于单位圆的等边三角形的三个顶点。

14. 已知复数$z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，又正整数m、n的最大公约数是$d$（这里$d>1$），求证 z^m是1的$\frac{n}{d}$次方根。

证明：因为m、n的最大公约数d大于1，所以可设
$m=m_1d$，$n=n_1d$
这里m_1和n_1都是正整数。那么

$$z^m=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^m$$

$$=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

$$=\cos\frac{2m_1d\pi}{n_1d}+i\sin\frac{2m_1d\pi}{n_1d}$$

$$=\cos\frac{2m_1\pi}{n_1}+i\sin\frac{2m_1\pi}{n_1}$$

于是 $$(z^m)^{m_1}=\cos 2m_1\pi+i\sin 2m_1\pi$$

就是 $$(z^m)^{m_1}=1$$

而 $$n_1=\frac{n}{d}$$

所以 $$(z^m)^{\frac{n}{d}}=1$$

因此z^m为 1 的$\frac{n}{d}$次方根。

15. 求证

$$f(x)=x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$$

可被$x^4+x^3+x^2+x$整除。

证明：因为 $$\begin{aligned}x^4+x^3+x^2+x&=x(x^3+x^2+x+1)\\&=x(x+1)(x+i)(x-i)\end{aligned}$$

可以知道 $$\begin{aligned}&f(0)=0\\&f(-1)=(-1)^{4444}+(-1)^{3333}+(-1)^{2222}\\&\qquad+(-1)^{1111}=0\\&f(-i)=(-i)^{4444}+(-i)^{3333}+(-i)^{2222}\\&\qquad+(-i)^{1111}\\&\qquad=1-i-1+i=0\\&f(i)=i^{4444}+i^{3333}+i^{2222}+i^{1111}\\&\qquad=1+i-1-i=0\end{aligned}$$

因此，$f(x)$能被$x^4+x^3+x^2+x$整除。

16. 已知a、b、c都是不等于零的实数，且

$$5a^2+9b^2+25c^2+6ab+20ac=0$$

试求 $a:b:c$

解： 因为$c\neq0$，用c^2除已知等式的两边，得

$$5\left(\frac{a}{c}\right)^2+9\left(\frac{b}{c}\right)^2+25+6\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)+20\left(\frac{a}{c}\right)=0$$

设 $\frac{a}{c}=x$，$\frac{b}{c}=y$，那么有

$$5x^2+9y^2+6xy+20x+25=0$$

配方，得 $$(x^2+6xy+9y^2)+(4x^2+20x+25)=0$$

就是 $$(x+3y)^2+(2x+5)^2=0$$

显然，$x+3y$和$2x+5$都是实数，它们的平方都不小于零，所以必有

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+5=0 \end{cases}$$

解得 $$x=-\frac{5}{2},\quad y=\frac{5}{6}$$

于是 $$\frac{a}{c}=-\frac{5}{2},\quad \frac{b}{c}=\frac{5}{6}$$

也可以写为 $$\frac{a}{c}=-\frac{15}{6},\quad \frac{b}{c}=\frac{5}{6}$$

所以 $$a:b:c=-15:5:6$$

17. 计算 $a^{0.01}+a^{0.02}+a^{0.03}+\cdots\cdots a^{0.99}$

其中 $a=10^{100}$

解： 已知 $a=10^{100}$，所以

$$a^{0.01}+a^{0.02}+a^{0.03}+\cdots\cdots+a^{0.99}$$

$$=a^{\frac{1}{100}}+a^{\frac{2}{100}}+a^{\frac{3}{100}}+\cdots\cdots+{}^{\frac{99}{100}}$$

$$=(10^{100})^{\frac{1}{100}}+(10^{100})^{\frac{2}{100}}+\cdots\cdots$$