新世纪

朱华伟 主编

数学 阶梯教室

立足课本

初二分册

着眼提高

发展能力

湖北教育出版社

前　言

新世纪的曙光已出现在东方地平线上，知识经济时代已初现端倪。知识经济时代的竞争在于高素质人才的竞争。高素质人才的培养必须从娃娃抓起，从青少年抓起。在数学教育中就要使学生在达到教学大纲要求的基础上，学习体现现代数学思想、富有灵活性和创造性的竞赛数学内容，以提高学生的数学素养和思维能力，培养学生的创新精神。

如何科学合理地开展数学竞赛培训活动，如何更好地将数学竞赛活动与课堂教学结合起来，既提高学生在中考中的竞争能力，又使学生适应数学竞赛，是摆在数学教育工作者面前的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材是这一课题取得进展的关键所在，也是提高教学效益，提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以国内外初中数学竞赛为背景，针对九年义务教育初中数学教学大纲的教学进度，按年级分三册编写。在编写的体例上按教程的形式分章节，每节后都有适当的习题。为了便于教与学，书末附有习题提示与答案。

在编写过程中，笔者力求遵循两条原则：

1. 课内与课外相结合。在内容的安排上力争与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充的方式形成系统的教程，着重思路的分析和方法技巧的总结，引导学生努力学好现行的中

学课本，进一步深化对现行课本内容的认识，体现数学竞赛活动“以课堂教学为主，课外活动为辅”的原则。因此学生只要把课内知识学好，又善于思考，就可以顺利地学好本书。

2. 普及与提高相结合。相对于正规的课堂教学，数学课外活动是一个提高的过程，但相对于培养各级数学竞赛的优秀选手，课外活动应视为普及，即面向大多数学生，普遍提高学生的数学素质并促进其全面发展。基于这一想法，本书用 * 号标出教材中没有，竞赛有要求的内容，习题的编排也分节按难易程度分为 A 级和 B 级。A 级强调普及，注重基础，是课堂教学内容的加深和拓宽，帮助学生加深对现行课本的理解；B 级强调提高，帮助学生拓展知识视野，介绍课堂教学中没有，而竞赛中要求的内容、方法、技巧。读者可根据自己的实际情况和要求选做。

通过本书的学习，既可帮助读者打好初二数学学习的基础，提高数学学习水平，又可破除对数学竞赛的神秘感，激发学习数学的兴趣，最终达到全国“希望杯”数学邀请赛初中二年级的水平。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作初中数学竞赛的指导参考书。

朱华伟

1998 年 5 月

目　　录

第一章　因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解.

因式分解与整式乘法是互为相反的变形.我们通过因式分解可以把一个多项式化成几个次数较低的整式的乘积形式以达到降次的目的,为我们解高次方程做好了充分的准备.掌握因式分解的基本方法及特殊多项式因式分解的技巧,善于根据多项式的不同特征采取不同的分解方法,将有助于解题灵活性的培养.下面我们就因式分解的基本方法、特殊多项式因式分解的技巧进行讨论,并对多项式中的对称式、交代式和轮换式的因式分解方法做一简单介绍.

§1.1　因式分解的基本方法

一　提公因式法

如果一个多项式各项有公因式,就可以把它提出来作为多项式的一个因式,这种因式分解的方法叫做提公因式法.提公因式法应注意的问题是:提公因式要彻底.

例1　将 $x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$ 分解因式.

解　原式 $=x(a-b)^{2n}-y(a-b)^{2n+1}$

$=(a-b)^{2n}[x-y(a-b)]$

$=(a-b)^{2n}(x-ay+by).$

注 $(b-a)^{2n}=(a-b)^{2n}$，$(b-a)^{2n+1}=-(a-b)^{2n+1}$. 其中 n 为自然数. 同时我们把 $a-b$ 看作一个整体，则 $x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$ 便是关于它(新元)的一个二项式，由于两项都有因式 $a-b$，所以可以用提公因式法分解因式.

二 运用公式法

在因式分解过程中，有时可以运用公式以简化过程，提高解题速度. 运用公式法应注意的问题是：运用公式要准确.

例 2 分解因式：$x^6(x+y-z)+y^6(z-y-x)$.

解 原式 $=x^6(x+y-z)-y^6(x+y-z)$

$=(x+y-z)(x^6-y^6)$

$=(x+y-z)(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y-z)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

注 因式分解并非每一个单一方法就可完成，有时需要多种方法的综合运用. 但不管运用哪种方法，我们首先应做的都是提公因式，而后再进一步进行分解.

例 3 分解因式：$1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$.

分析 观察式子中各项的指数，可以发现它和 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ 的左边的结构比较接近.

解 原式 $=1-3\times 4x^2y^2+3\times(4x^2y^2)^2-(4x^2y^2)^3$

$=(1-4x^2y^2)^3$

$=(1+2xy)^3(1-2xy)^3$.

例 4 分解因式：$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$.

解 原式 $=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)][(c^2-b^2+d^2$

$-a^2)-2(ab-cd)]$

$=[(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2+2ab+b^2)]$

$=[(c-d)^2-(a-b)^2][(c+d)^2-(a+b)^2]$

$=(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b).$

三　分组分解法

对于三项以上的多项式，我们通常采用合理分组的方法使其达到能进一步分解的目的．而其关键之处在于“合理”二字，这也是我们分组的基本原则：(1)一般情形下，每组的项数相等．(2)每组中各项都有公因式．(3)每组提取公因式后所得的另一个因式是各组的公因式．(4)不能使每组项数相等的，各组提取公因式后往往要用公因式法继续分解．

运用分组分解法应注意的问题是：分组要合理，即分组后能继续完成整个多项式的因式分解．

例 5　分解因式：a^3+3a^2+3a+2．

解法一　原式$=(a^3+3a^2+3a+1)+1$

$=(a+1)^3+1^3$

$=(a+1+1)[(a+1)^2-(a+1)+1]$

$=(a+2)(a^2+a+1).$

解法二　原式$=(a^3+2a^2)+(a^2+2a)+(a+2)$

$=a^2(a+2)+a(a+2)+(a+2)$

$=(a+2)(a^2+a+1).$

解法三　原式$=(a^3+a^2+a)+(2a^2+2a+2)$

$=a(a^2+a+1)+2(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a+2).$

解法四 原式$=(a^3-1)+(3a^2+3a+3)$

$$=(a-1)(a^2+a+1)+3(a^2+a+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a+2).$$

由上面四个解法我们可以看出分组分解法的“分法”运用非常灵活.这里对分组的合理性给予了充分的体现.我们在如何分组时,要通过尝试从而预见到分组后因式分解的下一步骤时,再着手进行.

例6 分解因式:$2acx+4bcx+adx+2bdx+4acy+8bcy+2ady+4bdy$.

分析 容易发现,前四项有共同公因式x,后四项有共同公因式y.

解 原式$=(2acx+4bcx+adx+2bdx)+(4acy+8bcy+2ady+4bdy)$

$$=x(2ac+4bc+ad+2bd)+2y(2ac+4bc+ad+2bd)$$

$$=(2ac+4bc+ad+2bd)(x+2y)$$

$$=[2c(a+2b)+d(a+2b)](x+2y)$$

$$=(a+2b)(2c+d)(x+2y).$$

例7 分解因式:$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

分析 显然,这个式子无公因式可提,又无乘法公式直接可用.在这种情况下,先将式子乘开,然后分组.

解 原式$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^6-x^3$

$$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x^3-1)$$

$$=(1+x+x^2)[(1+x+x^2)+2x^3+x^3(x-1)]$$

$$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

例8 分解因式:$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解 原式$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$$
\begin{aligned}
&=a^2(b-c)+b^2c-bc^2-ab^2+ac^2\\
&=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\\
&=(b-c)[a^2+bc-a(b+c)]\\
&=(b-c)(a-b)(a-c).
\end{aligned}
$$

四　十字相乘法

我们将形如 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的二次三项式进行因式分解时通常采用十字相乘法.

我们知道:两个一次二项式 $mx+n$ 与 $kx+l$ 相乘时,可以把系数分离出来,按如下方式进行演算:

$$
\begin{array}{ccccc}
m & & n & & (mx+n\text{ 的系数})\\
 & \times & & & \\
k & & l & & (kx+l\text{ 的系数})\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
mk & (ml+nk) & nl & &
\end{array}
$$

所以有 $(mx+n)(kx+l)=mkx^2+(ml+nk)x+nl$.

由于演算时在排好的四个系数之间画"×"用以说明得出一次项系数的方法,所以通常把这一方法称为十字相乘法.

如果把上述演算过程逆转过来,就可以把二次三项式 $mkx^2+(ml+nk)x+nl$ 分解因式.

$$
\begin{array}{cccc}
mk & (ml+nk) & nl & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
m & & n & (mx+n)\\
 & \times & & \\
k & & l & (kx+l)
\end{array}
$$

由于二次三项式 ax^2+bx+c 的二次项系数 a 与常数项 c 的分解有多种可能,不同的分解和同一分解的不同的排列方法

都会影响交叉相乘的结果，因此在运用十字相乘法时，往往要经过多次尝试才能得出分解的结果. 这使它具有很大的灵活性，增加了掌握它的难度. 因此我们必须同时兼顾一二两列的四个因素，考虑到它们的数值、符号及组合方式上的变化特点，以求尽快找到因式分解的答案.

例 9 分解因式：$4x^2(a+b)^2-8xy(a+b)^3-5y^2(a+b)^4$.

解 原式 $=(a+b)^2[4x^2-8xy(a+b)-5y^2(a+b)^2]$

$=(a+b)^2[2x-5y(a+b)][2x+y(a+b)]$

$=(a+b)^2(2x-5ay-5by)(2x+ay+by)$.

例 10 分解因式：$x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$.

解法一

原式 $=x^2-(2y+1)x-(8y^2+14y+6)$

$=x^2-(2y+1)x-2(4y+3)(y+1)$

$=(x-4y-3)(x+2y+2)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -4y-3 \\ 1 & & 2y+2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2y+2-4y-3=-2y-1} \end{array}$$

解法二

原式 $=(x-4y)(x+2y)-(x+14y)-6$

$=(x-4y-3)(x+2y+2)$.

$$\begin{array}{ccc} x-4y & \times & -3 \\ x+2y & & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2x-8y-3x-6y=-x-14y} \end{array}$$

注 这里的解法一是将上述多项式按 x 的降幂排列且把 y 当作常量而将它认为是其关于 x 的二次三项式运用十字相乘法进行因式分解的. 而解法二是将多项式运用两次十字相乘法因式分解得到的.

习题 1.1

A 级

1. 下列 5 个恒等变形式中，属于因式分解的是（　）.

(A)$2x-2y+4=2(x-y)+4$　　(B)$a^4-16=(a^2+4)(a^2-4)$

(C)$a^2b+ab^2=a^2b^2(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})$　　(D)$\frac{1}{9}-a+\frac{9}{4}a^2=(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}a)^2$

2. 对于多项式 x^2+y^2，x^2-y^2，$-x^2+y^2$，$-x^2-y^2$ 在有理数范围内可以进行因式分解的有（　）.

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

3. 与多项式 x^2-5x+4 有一个相同因式的多项式是（　）.

(A)x^2+5x+6　(B)x^2+5x-6　(C)x^2-5x+6　(D)x^2-5x-6

4. 已知 $x^2+mx+36$ 能分解成系数为整数的一次因式的积，整数 m 可能取的值有（　）.

(A)2 个　(B)5 个　(C)8 个　(D)10 个

5. 若 x^n-y^n 可分解为 $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$，则 n 等于（　）.

(A)2　(B)4　(C)6　(D)8

6. 分解因式

(1)$x^2y^2+xy-x^2-y^2+x+y+2$　　(2)$a^2-b^2+4a+2b+3$

(3)$x^4+x^2-2ax+1-a^2$　　(4)$a^3c-4a^2bc+4ab^2c$

(5)$(18x)^2-17\times19x-1$　　(6)$x^2-(m-8)x+7(m+1)$

(7)$(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$　　(8)$x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

(9)$x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8$

(10)$x^2y-xy^2+x^2z-xz^2-2xyz+y^2z+yz^2$

(11)$a^2-10ab+25b^2-5a+25b-6$　　(12)$a(a-1)+b(b-1)+2ab$

(13)$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-2x-2y-2z+1$

7. 整数 a、b 满足 $6ab=9a-10b+303$，求 $a+b$.

B 级

1. 如果 $a※b=a^2+2ab$，那么 $x^2※y$ 所表示的代数式分解因式的结果是（ ）.

(A) $x^2(x^2+2y)$ (B) $x(x+2)$ (C) $y^2(y^2+2x)$ (D) $x^2(x^2-2y)$

2. 把 $x^3+x^2y-xy^2-y^3$ 分解因式，结果是（ ）.

(A) $(x+y)(x-y)$ (B) $(x^2+y^2)(x-y)$

(C) $(x+y)^2(x-y)$ (D) $(x+y)(x-y)^2$

3. n 为某一自然数，代入代数式 n^3-n 中计算其值时，四个同学算出如下四个结果，其中正确的结果只能是（ ）.

(A) 388944 (B) 388945 (C) 388954 (D) 388948

4. 多项式 $18a^3-8ab^2+27a^2c-12b^2c$ 分解成因式积的形式是______.

5. 分解因式 (1) $(x+y+z)^2+yz(y+z)+xyz$

(2) $a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$

(3) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$ (4) $ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

(5) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$

(6) $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

6. 两个正整数之和比积小 1000，且其中一个是完全平方数，试求较大的数.

7. 试确定所有的四元数组 (p_1,p_2,p_3,p_4)，其中 p_1,p_2,p_3,p_4 是素数，且满足：

(1) $p_1<p_2<p_3<p_4$； (2) $p_1p_2+p_2p_3+p_3p_4+p_4p_1=882$.

§1.2 换元法

换元法又称为变量替换法，换元的实质就是转化，它是用一种变数形式取代另一种变数形式，使问题得到简化的一种解题方法. 利用这一方法有时可以简化多项式因式分解的过程. “换

元"是数学方法论中最根本的方法之一.

一　整体换元

例 1　分解因式:

(1) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

(2) $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$.

分析　观察题型,把(1)中的 x^2+4x+8 和(2)中的 $2x^2-3x+1$ 分别看成一个整体.

解　(1)令 $x^2+4x+8=y$,则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=y^2+3xy+2x^2\\
&=(y+x)(y+2x)\\
&=(x^2+4x+8+x)(x^2+4x+8+2x)\\
&=(x^2+5x+8)(x^2+6x+8)\\
&=(x^2+5x+8)(x+2)(x+4).
\end{aligned}
$$

(2)令 $2x^2-3x+1=y$,则 $2x^2-3x=y-1$,

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(2x^2-3x+1)^2-11(2x^2-3x)-1\\
&=y^2-11(y-1)-1\\
&=y^2-11y+10\\
&=(y-1)(y-10)\\
&=(2x^2-3x)(2x^2-3x-9)\\
&=x(2x-3)(2x+3)(x-3).
\end{aligned}
$$

例 2　分解因式:

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

(2) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$.

(3) $(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$.

解　(1)令 $x^2+x+1=y$,则

原式 $=y(y+1)-12$

$=y^2+y-12$

$=(y-3)(y+4)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+5)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$.

(2)原式$=[(x-3)(x+4)][(x-1)(x+2)]+24$

$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)+24$

令 $x^2+x-12=y$，

则 $x^2+x-2=(x^2+x-12)+10=y+10$，

原式$=y(y+10)+24$

$=y^2+10y+24$

$=(y+4)(y+6)$

$=(x^2+x-8)(x^2+x-6)$

$=(x^2+x-8)(x-2)(x+3)$.

(3)原式$=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90$

$=[(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90$

$=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90$.

令 $2x^2+5x+3=y$，则

原式$=y(y-1)-90$

$=y^2-y-90$

$=(y+9)(y-10)$

$=(2x^2+5x+12)(2x^2+5x-7)$

$=(2x^2+5x+12)(2x+7)(x-1)$.

二　均值换元

A、B 是两个代数式，设 $y=\frac{1}{2}(A+B)$，那么 $A=y+\delta$，$B=y-\delta$，其中 $\delta=\frac{1}{2}(A-B)$，这样，可将有关 A、B 的问题转化成

关于 $y+\delta$、$y-\delta$ 这样的对称形式来处理. 特别是当 A、B 有若干相同项时, $\delta=\frac{1}{2}(A-B)$ 的形式比较简单, 甚至为常数, 这给我们解题带来很多方便.

当我们所研究的问题含有多个代数式时, 也可以用它们的平均数来作替换.

例 3 分解因式: $(x^2-x-3)(x^2-x-5)-3$.

解 设 $y=\frac{1}{2}[(x^2-x-3)+(x^2-x-5)]=x^2-x-4$, 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(y-1)(y+1)-3\\
&=y^2-4\\
&=(y-2)(y+2)\\
&=(x^2-x-6)(x^2-x-2)\\
&=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2).
\end{aligned}
$$

例 4 $(x+5)^4+(x+3)^4-82$.

解 设 $y=\frac{1}{2}[(x+5)+(x+3)]=x+4$, 则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(y+1)^4+(y-1)^4-82\\
&=2(y^4+6y^2+1)-82\\
&=2(y^4+6y^2-40)\\
&=2(y^2-4)(y^2+10)\\
&=2(y+2)(y-2)(y^2+10)\\
&=2(x+6)(x+2)(x^2+8x+26).
\end{aligned}
$$

三 局部换元

例 5 分解因式: $(2a^2+2a+1)b+a(a+1)(b^2+1)$.

分析 这题如果展开后合并, 不易找出分解的方法, 如果把 $a+1$ 看成一个整体, 用换元法设 $a+1=x$, 则 $a^2+2a+1=x^2$, 原

式变形为$(x^2+a^2)b+ax(b^2+1)$. 这个式子展开后为一个四项式,较容易用分组分解法分解因式.

解 设$a+1=x$,则$a^2+2a+1=x^2$,

原式$=(x^2+a^2)b+ax(b^2+1)=x^2b+a^2b+axb^2+ax$

$=(x^2b+ax)+(a^2b+axb^2)=x(xb+a)+ab(xb+a)$

$=(xb+a)(x+ab)=[(a+1)b+a][(a+1)+ab]$

$=(a+b+ab)(a+1+ab)$.

四 $\begin{cases}x+y=u\\xy=v\end{cases}$型换元

对于含有x,y的代数式,有时将$x+y=u,xy=v$代入其中,就能转化为仅含u,v的简单易解的代数式.

例 6 分解因式:$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

解 设$x+y=u,xy=v$,则

原式$=(v-1)^2+(u-2)(u-2v)$

$=(v-1)^2+u^2-2u-2uv+4v$

$=(v+1)^2-2(v+1)u+u^2$

$=(v+1-u)^2$

$=(xy+1-x-y)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$.

五 多变量换元

这种换元是用两个或两个以上的字母去代替"一元"问题中的一个字母,把"一元"问题转化为"多元"问题来解.

例 7 分解因式:$4(2x^2-x+1)(x^2-2x+3)-(3x^2-3x+4)^2$.

解 $\because (2x^2-x+1)+(x^2-2x+3)=3x^2-3x+4$,

$\therefore$设$2x^2-x+1=u,x^2-2x+3=v$,则$3x^2-3x+4=u+v$.