高中数学

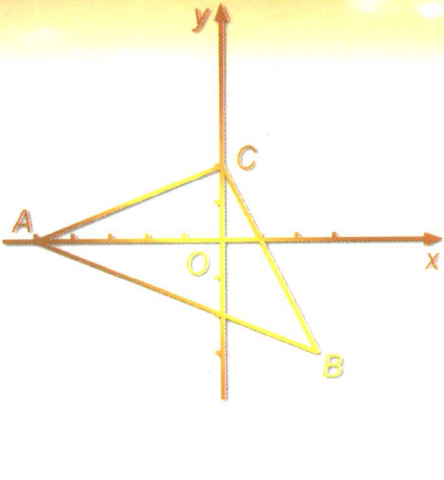
龙门专题

直线和圆的方程

主编 傅荣强

本册主编 常青

最新修订



龍門書局
www.Longmen.com.cn

直线和圆的方程

龙门专题

最新修订

主　编　傅荣强
本册主编　常　青
编　者　常　青　孙吉利　朱　岩　宋冰倩

龍門書局
北京

图书在版编目(CIP)数据

直线和圆的方程/傅荣强主编;常　青本册主编.—修订版.—北京:龙门书局,2005

(龙门专题)

ISBN 7-80160-137-8

Ⅰ.直…　Ⅱ.①傅…②常…　Ⅲ.几何课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第081157号

责任编辑:马建丽　韩安平/封面设计:郭　建

龍　門　書　局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.longmen.com.cn

中国青年出版社印刷厂 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2001年2月第　一　版　开本:A5(890×1240)

2005年8月第四次修订版　印张:7 1/2

2005年8月第十一次印刷　字数:265 000

印数:260 001—290 000

定　价:9.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、语文、英语、地理、生物七个学科，共计112种。

本套书在栏目设置上，主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中**“知识点精析与应用”**着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。**“视野拓展”**则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为“拓展”，但仍然立足于教材本身，主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容)，另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势，综合题与应用题越来越多，试行“3+X”高考模式以后，这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局品牌教辅的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. *以“专”为先*　本套书共计112种，你尽可以根据自己的需要从中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2．讲解细致完备　由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3．省时增效　由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4．局限性小　与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5．主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2005 年 8 月

编者的话

《龙门专题·高中数学》在面世近几年的时间里，以其传承经典、创新脱俗的写作风格，赢得了广大读者的一致称道。策划、作者、编辑、版务于其中呕心沥血、殚精竭虑，使得每一次修订后的《龙门专题·高中数学》年年更上新台阶。

本次《龙门专题·高中数学》修订版有以下特点：

一、知识讲解有广度有深度

“知识点精析与应用”栏目，覆盖了本阶段的全部内容，循序渐进，深入浅出，除了基本的讲解之外，还校正了一些思维上的偏差，有广度，有深度。

二、题目搭配有梯度有难度

书中例题与习题的选取，瞄准高考，从易到难，使潜心研读的读者能一步跃上一个台阶；同时本书又为学有余力的读者配置了一定数量的难题，尤其是创新脱俗的开放性试题。此外，本书配备例题、习题时，注意到联系已经学过的内容，使之形成上下贯通、前后衔接、左右协调、立体交叉的优良格局。

三、视野拓展有高度有尺度

“视野拓展”栏目，旨在学习方法、思维形式、解答策略等方面的拓展，对许多知识点实施了引入、扩充、推广，在力求高度的同时，又把握一定的尺度，使之既超过了高考试题的难度，又不偏离高考方向。

四、高考探索有精度有力度

“高考探索”栏目收集了最新的高考试题，一年一更新。作者精辟分析了试题产生的背景、形成过程乃至发展，并附高考探索训练题、精度高、力度大。近几年高考试题与书中例题、习题相似、相同的不乏其例，足见使用《龙门专题·高中数学》复习高考的广阔前景。

由于水平所限，书中还有缺点和不足，敬请广大读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　录

第一篇 基础篇

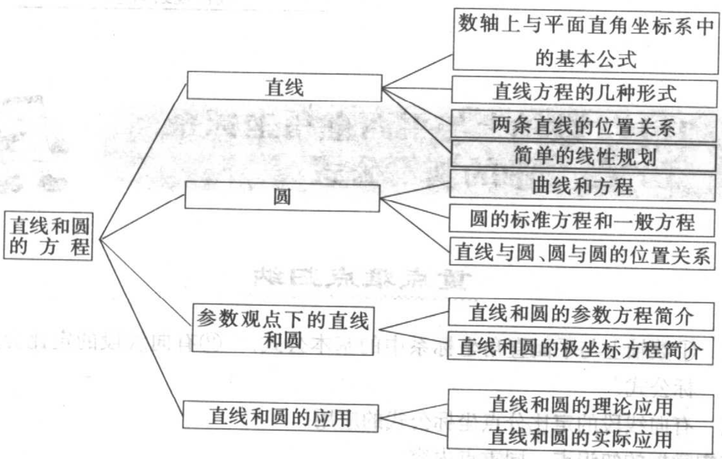
数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”与“形”的学科．解析几何是它的“用代数的方法研究几何问题”的一个分支．

解析几何研究的基本问题有两类——根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；通过方程，研究平面曲线的性质．

解析几何研究的主要对象（模型）是：直线，圆，椭圆，双曲线，抛物线；主要任务是建立上述五种曲线上的点和二元方程的解的对应关系，使每一种曲线都有自己的方程，从而实现用曲线的方程、方程的曲线其一去研究其二的最终目的；主要方法是解析法，即坐标法．其中，坐标系有平面直角坐标系和极坐标系两种．

在解析几何的研究中，无论是解题方法还是逻辑方法，直线和圆都具有较强的代表性，除了它们的个性外，绝大多数方法都可以类比地推广到椭圆、双曲线、抛物线的研究中．主要标志是：①在讨论直线和圆的过程中所形成的坐标观点延续到椭圆、双曲线、抛物线的讨论之中；②直线与圆的位置关系的类比推广．

本书知识框图



第一讲 直线

本讲知识框图

- 直线
  - 数轴上与平面直角坐标系中的基本公式
    - 有向线段
    - 线段的定比分点
  - 直线方程的几种形式
    - 直线的倾斜角、斜率
    - 直线方程的五种形式
  - 两条直线的位置关系
    - 两条直线的位置关系
    - l_1到l_2的角与l_1、l_2的夹角
    - 点线距离、线线距离
    - 直线系方程
    - 对称问题
  - 简单的线性规划
    - 用二元一次不等式(组)表示平面区域
    - 线性规划问题

1.1 数轴上与平面直角坐标系中的基本公式

重点难点归纳

重点 ①数轴上与平面直角坐标系中的基本公式. ②有向线段的定比分点坐标公式.

难点 有向线段的定比分点坐标公式的应用.

本节需掌握的知识点 同重点内容.

知识点精析与应用

【知识点精析】

学习直线和圆,尤其是直线,引入向量理论是非常必要的.为了本书知识体系的需要,这里向读者们介绍一些向量的相关内容.

1. 数轴上的基本公式

(1)数轴

一条给出了原点、度量单位和正方向的直线,叫做数轴或直线坐标系.

当点 P 与实数 x 对应时,称 x 为点 P 的坐标,记为 $P(x)$.例如,如图 1-1(1) 所示,数轴 x 上的点 P、Q、R 的坐标依次是 x、-1、2,可分别记为 $P(x)$、$Q(-1)$、$R(2)$.

(1)　　　　(2)

图 1-1

(2)向量

当数轴上的任意一点 A 移动到另一点 B 时,就说点在轴上作了一次位移,当点不动时,就说点作了零位移.位移是一个既有大小又有方向的量,通常叫做位移向量,简称为向量.今后,我们统一用有向线段表示向量.

起点为 A、终点为 B 的向量,记为 $\overrightarrow{AB}$.线段 AB 的长度叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度或模,记为 $|\overrightarrow{AB}|$,它体现的是向量的大小;向量的方向由起点指向终点.

同向且等长的向量叫做相等的向量;模为 1 个单位长度的向量叫做单位向量;向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标或称数量 AB 是一个实数,实数的绝对值就是 $|\overrightarrow{AB}|$,当向量的起点指向终点的方向与轴同向时,这个实数就是 $|\overrightarrow{AB}|$;反之,就是 $-|\overrightarrow{AB}|$.例如,如图 1-1(2)所示,$AB=x_2-x_1$,$BA=-(x_2-x_1)=x_1-x_2$.

起点和终点重合的向量是零向量,它没有确定的方向,它的模和坐标都是 0.

(3)数轴上的基本公式

从图 1-1(2)不难看出,下面的公式成立:

$$AC=AB+BC,$$

$$AB=x_2-x_1,$$

$$d(A,B)=|x_2-x_1|=|x_1-x_2|.$$

其中,$d(A,B)$表示 A、B 两点的距离.

2. 平面直角坐标系中的基本公式

(1)平面内两点的距离公式

以 $A(x_1,y_1)$为起点、$B(x_2,y_2)$为终点的有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度,即 A、B 两点的距离是

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

在上下文明确的前提下,$|\overrightarrow{AB}|$也可记为$|AB|$.

(2)线段的定比分点

如图 1-1(2),设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$是直线 l 上的两点,$P(x,y)$是 l 上不同于P_1、P_2 的任意一点,这时我们把使得$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$成立的 λ 叫做点P 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比.

显然,当点 P 在线段P_1P_2 上时,$\lambda>0$;当点 P 在线段P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上时,$\lambda<0$,且 $\lambda\neq-1$.

由$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$可得有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的定比分点坐标公式:

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{cases}$$

公式中x_1与x_2、y_1与y_2是有顺序的

特别地,当 $\lambda=1$,即当 P 是线段P_1P_2 的中点时,我们可以得到有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的中点坐标公式:

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$$

值得注意的是:

第一,在有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的定比分点的讨论中,P_1、P、P_2 是共线且互不重合的三点,因此,使得$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$成立的 λ 的取值范围是$\{\lambda\in\mathbf{R}\mid\lambda\neq-1,\lambda\neq0\}$,也就是说,问题的初衷就约定了 $\lambda\neq-1,\lambda\neq0$.

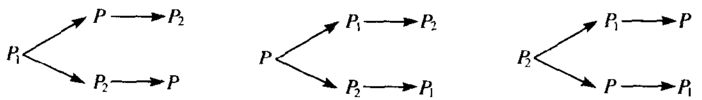
第二,在$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$中,字母是左右有序的,其顺序是

$$P_1\longrightarrow P\longrightarrow P_2.$$

与$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$协调一致

λ 的意义是随着P_1、P、P_2 的左右顺序的变化而变化的,如:在$\overrightarrow{PP_1}=\lambda\overrightarrow{P_1P_2}$中,$\lambda$ 是点P_1 分有向线段$\overrightarrow{PP_2}$所成的比.

字母 P_1、P、P_2 的左右顺序如下:



第三,在$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}$中,$\lambda$ 的值可按如下方法确定:

λ 的符号:当$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$同向时,取"+"号,当$\overrightarrow{P_1P}$与$\overrightarrow{PP_2}$反向时,取"-"号.

λ 的绝对值:$|\lambda|=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{PP_2}|}$.

第四,在$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}$中,"正序"是"端点在两端,分点在中间",即

(起点,左端点 P_1) $\longrightarrow \overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2} \longleftarrow$ (终点,右端点 P_2).

分点

出现"乱序"时,要对其中出现两次的字母实施调序,以确保$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}$始终处在"正序"的状态下.如,$\overrightarrow{PP_1}=k\,\overrightarrow{PP_2}$应当调整为$-\overrightarrow{P_1P}=k\,\overrightarrow{PP_2}$,即$\overrightarrow{P_1P}=-k\,\overrightarrow{PP_2}$,这时 $\lambda=-k$.

【解题方法指导】

1.与数轴上的基本公式相关的问题

[例1] 已知数轴上的三点 $A(-1)$、$B(5)$、$C(x)$.

(1)当$|\overrightarrow{AB}|+d(B,C)=8$时,求 x;

(2)当 $AB+CB=0$ 时,求 x;

(3)当$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$时,求 x;

(4)当 $AC=1$ 时,验证:$AB+BC=AC$.

分析 本例用到两个公式,即 $MN=x_2-x_1$,$d(M,N)=|\overrightarrow{MN}|=|MN|=|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$.其中 x_1 与 x_2 分别是 M、N 两点的坐标.

解(证) (1)由 $A(-1)$、$B(5)$、$C(x)$,可知

$$|\overrightarrow{AB}|=|5-(-1)|=6,d(B,C)=|x-5|.$$

当$|\overrightarrow{AB}|+d(B,C)=8$时,有

$$6+|x-5|=8,$$

解得
$$x=3 \text{ 或 } x=7.$$

(2)由 $AB+CB=0$,可知

$$5-(-1)+5-x=0,$$

解得
$$x=11.$$

(3)由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$可知,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$,且$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$同向,

所以$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|=5-(-1)=6$,且 $BC=x-5=|\overrightarrow{BC}|$,

所以 $$x-5=6,$$

解得 $$x=11.$$

(4)当 $AC=1$ 时,有

$$x-(-1)=1,$$

解得 $$x=0,$$

所以 $$AB+BC=5-(-1)+0-5=1=AC.$$

2. 与平面直角坐标系中的基本公式相关的问题

(1)平面内两点的距离公式的使用

[例 2] 等腰直角三角形 ABC 中,$\angle C=90^\circ$,P 为 AB 边上任意一点.

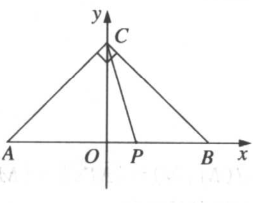
求证:$|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$.

证法 1 以$\triangle ABC$ 的斜边 AB 的中点 O 为坐标原点,AB 所在的直线为 x 轴建立如图 1-2(1)所示的平面直角坐标系,这时 C 点在 y 轴上. ⇐ 建系

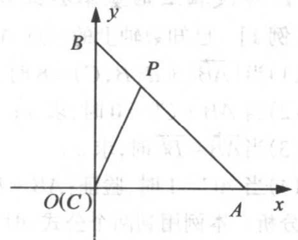
设 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$C(0,a)$,$P(x,0)$,则 ⇐ 设点

$$|AP|^2+|BP|^2=(x+a)^2+(x-a)^2=2(x^2+a^2),$$
$$|CP|^2=(x-0)^2+(0-a)^2=x^2+a^2,$$

$\therefore$ $|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$.



(1)



(2)

图 1-2

证法2 如图1-2(2),分别以边 AC、BC 所在的直线为 x 轴、y 轴,C 为原点建立直角坐标系,依题意 $A(a,0)$,$B(0,a)$,$C(0,0)$.

令 $P(x,y)$,则

$$\begin{aligned}|AP|^2+|BP|^2&=(x-a)^2+(y-0)^2+(x-0)^2+(y-a)^2\\&=2x^2+2y^2-2a(x+y)+2a^2\\&=2x^2+2y^2-2a(x+y-a).\end{aligned}$$

$$2|CP|^2=2x^2+2y^2.$$

$x+y-a=0$(点 P 在 A、B 确定的一次函数的图象上).

$\therefore \qquad |AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2.$

点评 恰当地建立平面直角坐标系,是用解析法证明问题的关键.

[例 3] (1)用解析法证明直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

(2)已知正三角形 ABC 的边长为 a,在平面上求一点 P,使 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 最小,并求此最小值.

(1)**证明** 如图 1-3(1),以直角三角形两直角边所在的直线为 x 轴、y 轴建立直角坐标系,设 A、B、C 的坐标依次是 $A(2a,0)$,$B(0,2b)$,$C(0,0)$,则

斜边中点为 $M(a,b)$,

$$|MA|=\sqrt{(2a-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|MB|=\sqrt{(a-0)^2+(b-2b)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|CM|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$\therefore \quad |MA|=|MB|=|MC|.$

(2)**分析** 此题若任取平面内一点为原点建立坐标系,计算较繁,若取一边所在直线为 x 轴,其中垂线为 y 轴,建立坐标系可使问题简化.

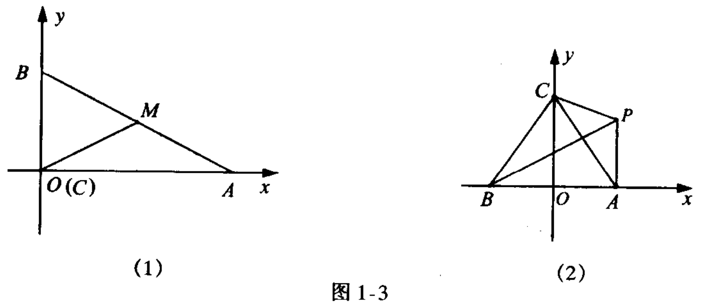


图 1-3

解 如图 1-3(2),以边 BA 所在的直线为 x 轴,线段 AB 的中垂线为 y 轴,建立直角坐标系,这时 A、B、C 的坐标为

$$A\left(\frac{a}{2},0\right),B\left(-\frac{a}{2},0\right),C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

设 P 点的坐标为(x,y),则

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$$

$$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$=3x^2+3y^2-\sqrt{3}ay+\frac{5}{4}a^2$

$=3x^2+3\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2+a^2\geqslant a^2$. 表示成这三项的平方的和是关键

当且仅当 $x=0,y=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 时等号成立，所求最小值为 a^2，此时 P 点为正$\triangle ABC$ 的中心 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$. 坐标系的选择是否适当是解决问题的重要一环，它直接影响解析法解题的难易程度

[例 4] 对一切 $x\in\mathbf{R}$，证明 $|x+2|+|x-3|\geqslant 5$.

分析 讨论 $x\leqslant -2$ 或 $-2<x\leqslant 3$ 或 $x>3$ 三段可求得原不等式的解. 这里给出用数轴上两点的距离公式解题的方法，即将 $|x+2|$ 看成数轴上坐标为 x 与 -2 的两点的距离，把 $|x-3|$ 也看成两点的距离，结合数轴求解不等式.

解 设点 A、B、P 在数轴上的坐标为 $-2,3,x$，则

$$|AB|=|-2-3|=5,|AP|=|x+2|,|BP|=|x-3|.$$

由平面几何知识知 $|AP|+|BP|\geqslant|AB|$，当且仅当 P 点在线段 AB 上时取“=”，

“>”成立的依据：P 在线段 AB 或 BA 的延长线上

$\therefore\quad |x+2|+|x-3|\geqslant 5$.

上式当且仅当 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时，“=”成立.

[例 5] 求 $y=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-4x+13}$ 的最小值及相应的 x 值.

分析 本题形式上是代数问题，但用代数方法求这类函数的最小值非常困难. 通过观察解析式的外形，发现与两点的距离公式非常接近，因此可以考虑利用两点的距离公式. 巧妙！以后你会发现，设法很有规律性

解 将原式化为 $y=\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0+3)^2}$，

上式为 x 轴上的点 $P(x,0)$ 与 $A(1,1)$ 和 $B(2,-3)$ 两点的距离之和，原题等价转化为求此和的最小值. 重要语句，它说清了等价转化关系

$\because\quad |PA|+|PB|\geqslant|AB|$，

$\therefore\quad y_{\min}=|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}$.

此时 A、P、B 三点共线，

$\therefore\quad \frac{x_P-x_A}{x_B-x_P}=\frac{y_P-y_A}{y_B-y_P}$，即 $\frac{x-1}{2-x}=\frac{0-1}{-3-0}$， 横比等于纵比

解得 $\quad x=\frac{5}{4}$.

$\therefore\quad y$ 的最小值为 $\sqrt{17}$，相应的 $x=\frac{5}{4}$.

点评 一个代数问题通过构造几何模型获得其解，独具特色！其中 B 点的

纵坐标凑成负数，使定点 A、B 在 x 轴的两侧实乃匠心之举. 当 A、B 两定点在 x 轴的同侧时，可作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，后同.

［例 6］ 求 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域.

分析 本题需将解析式化为两点的距离公式的形式.

解 设 $P(x,0)$、$A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为平面内三点，则

$$|PA|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{x^2-x+1},$$

$$|PB|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{x^2+x+1},$$

$$y=|PB|-|PA|.$$

$\because$ $||PB|-|PA||<|AB|$，且 $|AB|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=1$， 难点

$\therefore$ $|y|<1$，即 $-1<y<1$，函数的值域是 $(-1,1)$.

(2)中点坐标公式的使用

［例 7］ 在 $\triangle ABC$ 中，已知顶点 $A(4,-1)$，边 AB 的中点 $M(3,2)$，重心 $G(4,2)$，求顶点 B、C 的坐标.

分析 依中点坐标公式，由 A、M 两点的坐标可求得点 B 的坐标，再把 A、B、G 三点的坐标代入三角形的重心坐标公式可求得 C 点的坐标.

解 设 $B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则

由中点坐标公式，得 $\begin{cases}\dfrac{4+x_2}{2}=3,\\ \dfrac{-1+y_2}{2}=2,\end{cases}$

$\therefore$ $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=5,\end{cases}$ 即 B 点的坐标是 $(2,5)$.

再由重心坐标公式，得 $\begin{cases}\dfrac{4+x_2+x_3}{3}=4,\\ \dfrac{-1+y_2+y_3}{3}=2,\end{cases}$

$\therefore$ $\begin{cases}x_3=6,\\ y_3=2,\end{cases}$ 即 C 点的坐标是 $(6,2)$.

综上，B、C 的坐标分别为 $(2,5)$，$(6,2)$.

点评 注意先求 B 点的坐标，后求 C 点的坐标的顺序. 求 B 点时，不妨理解记忆下列结论：点 (a,b) 关于点 (m,n) 的对称点的坐标为 $(2m-a,2n-b)$.