大学本科数学教材

高等数学（上册）

GAODENG SHUXUE

蔡高厅　邱忠文　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学本科数学教材

高等数学

（上册）

蔡高厅　邱忠文　主编

天津大学出版社
Tianjin University Press

内 容 提 要

《高等数学》分上、下两册，覆盖现行理工类院校高等数学教学的全部内容，还特别注意针对远程高等教育、成人教育和高等职业技术教育的教学需要，做到内容选择适当，重点突出，难点分散；叙述深入浅出，便于自学；理论分析注重几何和物理解析，有必要的抽象概括和严密的逻辑推理.

本书是《高等数学》上册，内容包括函数、极限、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、不定积分、定积分、向量代数和空间解析几何等 7 章，书后附录收入"集合的初步知识"和"初等数学常用公式和常用曲线".

本书适合做一般理工类院校及远程高等教育、成人教育、高等职业教育本科生的教材，也适合高等数学自学者使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/蔡高厅，邱忠文主编．—天津：天津大学出版社，2004.9
ISBN 7-5618-2007-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①蔡…　②邱…　Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080456 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
网　　址	www.tjup.com
电　　话	发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷	河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	148mm×210mm
印　　张	13.375
字　　数	408 千
版　　次	2004 年 9 月第 1 版
印　　次	2004 年 9 月第 1 次
印　　数	1－4 000
定　　价	22.00 元

前 言

为了适应高等工科院校本科生对高等数学课程的教学需要，结合当前的教学实际，我们编写了《高等数学》教科书．本书是编者根据全日制高等工业学校高等数学课程教学基本要求和全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求编写的，无论对全日制普通高等学校的本科生，还是对网络高等教育、成人高等教育、函授和高等职业技术教育的本科生都是学习高等数学适宜的教科书．

高等数学是高等学校理工、经济、管理类院校最主要的基础理论课之一，课程的教学对提高学生的科学文化素质、对在校期间的学习和今后的发展都将产生深远影响．本书的编者在全日制普通高等学校长期从事高等数学及应用数学的教学工作，最近几年又在远程高等教育、成人教育及高等职业技术教育的教学中积累了丰富的经验，对教学内容、教学要求和学生的学习情况都有深刻了解．教材内容和编写的针对性都尽力做到内容选择适当，符合教学要求；章节编排重点突出，难点分散；文字叙述深入浅出，便于自学；理论分析注意几何和物理的解析，进行必要的抽象概括和严密的逻辑推理．

本书分上、下两册．全书内容覆盖了现行理工类院校高等数学教学的全部内容．书中有 * 的部分为非重点要求的内容或练习题，供选学时参考．

为了帮助学生学习，我们还编写了与本教材相配套的辅导参考书：《高等数学习题解答与测试（上、下册）》（天津大学出版社出版）和《高等数学专题辅导讲座（上、下册）》（国防工业出版社出版）．

本书的编写和出版，得到了天津大学网络教育学院的大力支持及教学管理部全体老师的具体帮助，编者在此表示深切感谢．

参加本书编写的有蔡高厅、邱忠文、李君湘、严丽、韩健、韩月丽、孙秀萍、刘瑞金等．由于编者水平有限，敬请读者对书中的错误之处予以批评指正．

编者

2004年2月于天津大学

目 录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第1章 函　　数

函数是描述现实世界中,量与量之间的变化及依从关系的数学概念,函数是高等数学主要的研究对象.本章将在中学已经学过函数初步知识的基础上,进一步进行综合、概括和提高,并介绍复合函数、反函数及初等函数的概念,总结基本初等函数的性态,为学习高等数学打好必要的基础.

§1　函数的概念

1.1　区间与邻域

1.区间

在高等数学中用区间来表示一类实数集是用得较多的记号.设 a, b 都是实数,且满足 $a<b$,则数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\},$$

其中 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点,这里 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$.

类似地,数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

其中 a 和 b 分别称为闭区间 $[a,b]$ 的左端点和右端点,这里 $a \in$

$[a,b]$, $b\in[a,b]$.

同时把数集

$$\{x\mid a\leqslant x<b\},\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

都称为半开区间,分别记为

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

上述的这些区间都是有限区间,差值“$b-a$”称为这些有限区间的长度.

如果引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),它们不表示任何数,仅是记号,就有无限区间:

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\};$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

而全体实数所组成的集合 **R** 可记为$(-\infty,+\infty)$,即

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

对于区间(a,b),$[a,b]$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$可以在数轴上分别用图 1-1(a)、(b)、(c)、(d)表示出来.

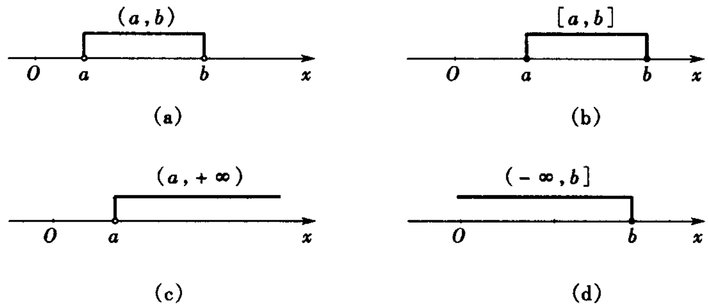

图 1-1

在本课程中,如果无需辩明所讨论的区间是否包含端点,也无需辩明是有限区间还是无限区间,就简称为区间,常用字母 I 表示.

2.邻域

定义1.1　设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,则称数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域,记为 $N(a,\delta)$.由于不等式 $|x-a|<\delta$ 等价于

$$-\delta<x-a<\delta,\text{或 } a-\delta<x<a+\delta,$$

从而 $N(a,\delta)$ 可表示为

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

这里,点 a 称为这个邻域的中心,δ 称为这个邻域的半径.由区间的概念可知,邻域 $N(a,\delta)$ 实际上就是以 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$(见图1-2).

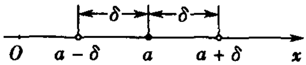

图1-2

为了表明点 a 的 δ 邻域就是 x 轴上点 a 附近的地方,一般总认为 δ 是很小的正数,虽然邻域的定义并无此限制.

本课程在用到邻域时,有时要把邻域的中心去掉,去掉中心点 a 的邻域 $N(a,\delta)$,称为点 a 的去心邻域,记为 $N(\hat{a},\delta)$,即

$$N(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或

$$N(\hat{a},\delta)=N(a,\delta)\setminus\{a\}.$$

1.2　函数的概念

1.函数的定义

定义1.2　设 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集,f 是一个确定的对应规律,如果对于每一个 $x\in X$,通过 f 都有惟一的实数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in X.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量.

自变量 x 取值的实数集 X 称为函数的定义域,也可记为 D_f.当自变量 x 取数值 $x_0\in X$ 时,通过 f 与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为

$$f(x_0),\text{或 } y|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取 X 中一切数值时，与它对应的函数值 y 的全体组成的数集

$$V_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\},$$

称为这个函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中的记号“f”表示自变量 x 与因变量 y 的对应规律，只有指明了这个对应规律才能知道 $f(x)$ 究竟是什么函数. 如果只写出“$y=f(x)$”，那么只知道现在论及的变量 y 是变量 x 的函数，其中 $f(x)$ 代表抽象的函数，比如，写出 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，那么这个 $f(x)$ 就是具体的特定函数，这时等号两端的 x 是同一个量，即给出了一个填充 x 值的框架：

$$f(\quad)=\sqrt{1-(\quad)^2},$$

比如要求函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，就把 $\frac{1}{2}$ 填充到上式左、右两端的括号内，得到

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由此可见，在函数的定义中，只要给出了函数的定义域 X 及自变量 x 与因变量 y 的对应规律 f，函数的值域 V_f 也就随之确定，因此，定义域和对应规律是构成函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，并且对应规律也相同，则它们是同一函数；反之，如果两个函数的定义域不同或对应规律不同，则它们不是同一函数.

在同一个问题里有时会遇到几个不同的函数，这时就要用不同的函数记号，如 $f(x),g(x),\varphi(x),\psi(x),\mu(x),\cdots$ 等分别代表它们，也可以用附加下标的函数记号 $f_1(x),f_2(x),\cdots$ 等等.

在定义 1.2 中要求对于每一个 $x\in X$，通过 f 都有惟一的实数 y 与之对应，这种函数称为单值函数. 如果对应的实数 y 不只一个，就称为多值函数. 今后如不作特别说明，本书所涉及的函数都是指单值函数，遇有多值函数时，每次只限于选定其中的一个单值分支来讨论.

2. 单变量函数的几何意义

在平面上建立直角坐标系 xOy，设已给函数 $y=f(x)$，其定义域为 X，对任意取定的 $x\in X$，对应的函数值为 $y=f(x)$，那么以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 坐标面上确定了一点 (x,y). 当 x 遍取函数定

义域 X 上的每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 $\mathbf{P}$，即

$$\mathbf{P}=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\},$$

这个点集 $\mathbf{P}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形，而等式 $y=f(x)$ 称为图形的方程.

例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$. 它的图形是圆心在原点的单位圆的上半圆周（见图 1-3）. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是自然数集 $\mathbf{N}^+$，即 $x\in\mathbf{N}^+$，则称为整标函数. 通常写为 $y=f(n)$，$n\in\mathbf{N}^+$. 整标函数的图形是一系列孤立的点. 例如 $y=\frac{1}{3^{n-2}}$ 的图形如图 1-4 所示.

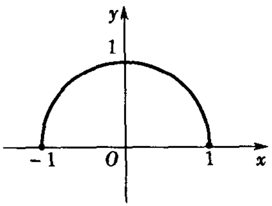

图 1-3

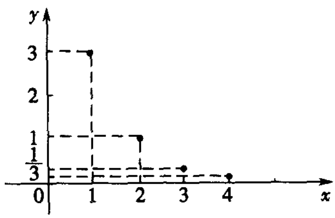

图 1-4

3. 函数的定义域

定义域是构成函数关系的两个要素之一，当研究函数 $y=f(x)$ 时，要先考虑它的定义域 D_f，当且仅当自变量 x 在定义域 D_f 内取值时，因变量 y 才有确定的值与之对应，这时函数 $y=f(x)$ 才有定义.

在求函数的定义域时，应当注意：对于反映实际问题的函数关系，其定义域应根据问题的实际意义确定. 例如考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的函数关系，应由公式

$$A=\pi r^2$$

给出. 根据问题的实际意义可知，这个函数的定义域应是 $(0,+\infty)$.

对于用数学式所表示的函数，通常应在数学式后面注明定义域，而在没有注明定义域的情况下约定：函数的定义域就是自变量所能取的使数学式有意义的一切实数值. 下面举例说明如何从表示函数的数学式来求定义域和值域.

例 1.1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域和值域.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com