吴　松
张志宏　编著
寇建国

MAN TAN HUANG JIN FEN GE

漫谈黄金分割

WU SONG ZHANG ZHI HONG
KOU JIAN GUO　BIAN ZHU

- 黄金分割的几何性质
- 黄金矩形
- 黄金分割的代数性质
- 黄金分割与人体艺术
- 黄金分割与生理节律
- 黄金分割与人类文明
- 黄金分割与买卖股票
- 黄金分割的美学原理

XIN JIANG KE JI WEI SHENG CHU BAN SHE (K)

新疆科技卫生出版社(K)

漫 谈 黄 金 分 割

吴　松
张志宏　编著
寇建国

新疆科技卫生出版社（K）

责任编辑：魏　锦
封面设计：车晓虎

漫淡黃金分割

吴松　张志宏　寇建国　编著

新疆科技卫生出版社（K）出版
（乌鲁木齐市延安路4号　邮政编码830001）
新疆新华书店发行 新疆新华印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　6印张　130千字
1994年6月第1版　　1994年7月第1次印刷
印数：1—5 000

ISBN7－5372－0984－8/0－14　定价：5.80元

序

黄金分割是古希腊著名数学家毕达哥拉斯学派首先发现的，后经许多著名学者进一步研究、完善，使得黄金分割越来越光彩夺目。黄金分割不仅在数学上，而且在很多方面都有着极大的美学价值和经济价值。作者从实例出发，对黄金分割作了精彩的论述，并进行了全面深入的研究和探讨，其研讨的广度与深度，在国内目前尚不多见。阅读这本书，不但使读者对黄金分割有一个较为详实的了解，而且对提高读者的思维、想象能力，拓宽读者的知识面很有帮助。大、中学生、教师、科技与文艺工作者，以及各行各业的读者，均可以在这本书中受到启发，获得益处。《漫淡黄金分割》是值得向社会推荐，尤其是向青少年推荐的一本优秀科普书籍。

新疆数学学会秘书长

杜　越

1994年2月

黄金分割是一个古老、永恒的课题，它是全人类共同拥有的财富。它的内容极其丰富，应用极其广泛，在我们的工作和生活中，黄金分割似乎无所不包，无所不在。我们需要它，如同需要衣、食一样。假如一旦失去它，真不知道我们的世界会变成什么样子。

当我们翻开书的第一页，仔细地“品味”它时，我们的思绪便会沉醉在黄金分割那瑰丽而奇妙无比的世界里，使我们惊叹不已！读完全书，也就获得了关于黄金分割的许多有用而有趣的知识。

啊，黄金分割，我们赞美它，它给我们带来和谐、欢乐与七彩的阳光。

目　录

第一章 黄金分割概述

黄金分割是一个很诱人的字眼，它是大自然创造的奇迹，它包含着极其丰富的内容，充满着无穷的奥秘。由植物界的叶、花、果实，到动物界的小小爬行动物的螺壳；由雄伟壮观的摩天大厦，到芭蕾舞演员迷人的身姿；由令人陶醉的音乐，到给人以美的享受的绘画等等，无不闪耀着黄金分割的奇光异彩。

在大千世界里，在人类生活中，哪里有黄金分割，哪里便增添了生活的情趣，黄金分割在哪里出现，哪里便洋溢着美的芬芳……。那么什么叫黄金分割呢？还是从下面的一个实例说起吧！

比如，一台文艺晚会开始了，帷幕徐徐拉开，一位女报幕员手拿话筒款款地走上舞台，当她走到离舞台中心偏离一段距离的位置时，便停下来开始报幕。台下的观众对报幕员的这一举动并不介意，不因为她未站在舞台正中央而有什么不舒服的感觉，反觉得她站的位置很合适，与舞台空间、长度的比例很协调，似乎是恰到好处。再观赏她的服饰，她穿的是一件裁剪合体的连衣裙，腰间束有一条醒目的腰带，这腰带色调淡雅，恰如其分地衬托出她匀称袅娜的身姿，婷婷玉立的体态。腰带一侧还点缀了一只可爱的蝴蝶结，这蝴蝶结大有锦上添花之效，此刻，没有人提出疑义：报幕员本身就是这台晚会上的一件艺术品。

这时，观众席上的您是否知道，舞台上表现出来的美与

和谐，正是黄金分割的作用。

报幕员站的位置，到舞台边的距离与整个舞台长的比是0.618。她的腰带将连衣裙的长分成两部分，这两部分的比也是0.618。另外，蝴蝶结把腰带的正面还分成两部分，这两部分长的比仍然是0.618。比值是0.618的比例具有天然的和谐与美，我们把这样的比就叫做黄金比。下面再用数学方法对黄金分割予以解释。

已知线段AB，在AB上确定一点N，使得$AN=NB$，即$\frac{AN}{NB}=1$，则点N二等分线段AB，N是AB的中点。

如果在AB上确定一点Q，使得$AQ=\frac{1}{2}QB$，即$\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}$，则点$Q$三等分线段$AB$，$Q$是$AB$的一个三等分点。在线段$AB$上的点$Q$的另一端还有一个三等分点，它是点$Q$的对称点。

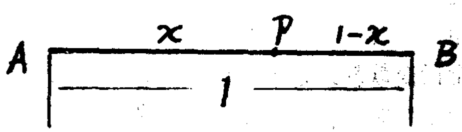

图1—1

如果在线段AB上确定一点P，把AB分成长、短两部分，使得$\frac{AP}{AB}=\frac{PB}{AP}$，也就是点$P$分线段$AB$成中外比（图1—1）。

设线段 $AB=1$，长段 $AP=X$，那么短段 $PB=1-X$，于是

$$\frac{X}{1}=\frac{1-X}{X}，即 X^2+X-1=0$$

解得

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

舍去负根，得

$$X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

我们取 $\sqrt{5}\approx2.236$，则

$$X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx\frac{2.236-1}{2}=0.618。$$

这样，点 P 将线段 AB 的长分成两部分，这两部分的比是 0.618。图 1—1 中的 P 点，我们叫做黄金分割点。显然，P 点在线段 AB 上的对称点，也是一个黄金分割点。

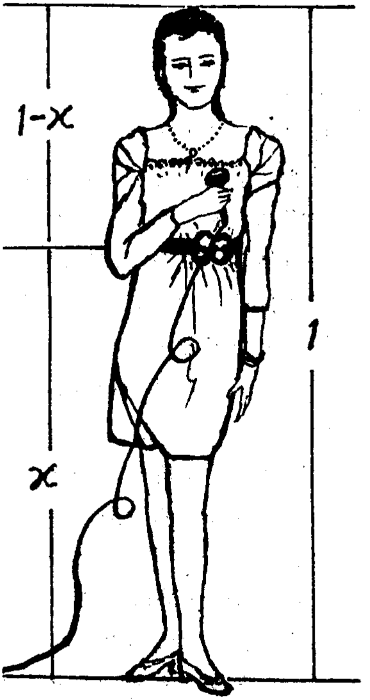

图 1—2

在上例中，假如整个舞台长度为 1，那么报幕员就必定是站在舞台的 0.618 处（或 0.618 处的近旁）。

我们如果将线段 AB 作为报幕员的身长，把线段 AB 竖立起来。令报幕员身高为 1，则腰带在身高的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$

的位置，这个位置大约在人的腰部肚脐眼的地方。显然，它是人身上的一个黄金分割点（图1—2）。

0.618的倒数是1.618，即$\frac{1}{0.618}\approx1.618$，在美学和数学上我们把1.618∶1或0.618∶1叫做黄金分割。其中将1.618∶1叫做外黄金分割比，0.618∶1叫做内黄金分割比，又通常把内黄金分割比0.618∶1叫做黄金比或黄金律。特别地将0.618尊之为黄金数。黄金数0.618与我们人类的生活及自然界的万物都有着紧密的联系，它在美学上还被称做“美的数”。判断某一比例是否是黄金分割比例，就是要看它是否符合黄金比，其比值是不是黄金数——0.618。

黄金分割是一种对研究对象不是绝对等分的独特的比例形式，它的内容极为丰富，它的用途非常广泛，黄金分割有着极高的美学价值与经济价值。

黄金分割的发现者是古希腊著名数学家毕达哥拉斯（公元前580—500年）及其弟子们，他们发现：一条线段分成两部分，当两部分的比值是1.618时，这种比例，即1.618∶1是最优美的比例关系。

希腊数学家普罗克鲁（公元410—485年）在《几何原本》的注解中将这种比例称为卓越的“分割”。

古希腊与古希腊时代以后的一些著名学者，如柏拉图（古希腊哲学家公元前427—347年）、泽辛（德国美学家）、路巴·巴乔里（十五世纪末法兰西传教士）等，为毕达哥拉斯发现的比例关系：1.618∶1，起了一个举世瞩目的名字——黄金分割。其意是这种比例关系像分割黄金一样，其价值似黄金一样的珍贵。

柏拉图的弟子，柏拉图学派的数学家攸多克萨斯（约公

元前 408—355 年）对黄金分割作了进一步的研究，给出了黄金分割的几何作图，并将此作图方法予以推广。

欧洲文艺复兴时期，意大利最著名的艺术家、科学家达芬奇（1452—1519 年），对黄金分割的研究及应用，也曾做出过杰出的贡献。

黄金分割"热"首先在古希腊兴起，随后，从意大利波及欧洲，甚至全世界都掀起黄金分割"热"。到了 2500 年后的今天，黄金分割"热"似乎没有丝毫降温，反而一直在升温，这一举世瞩目的名称也一直沿用至今，没有改变。

攸多克萨斯首先使用规尺作图方法，分已知线段为中外比（即黄金比），现将他的作图方法叙述如下（图 1—3）。

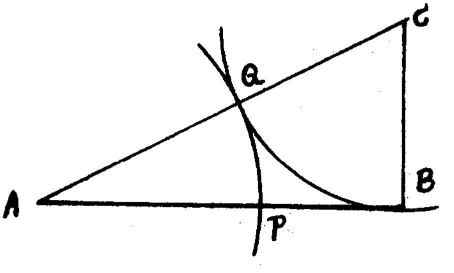

图 1—3

已知线段 AB，过 B 点作 $CB \perp AB$，且 $CB=\frac{1}{2}AB$，连结 AC，以 C 为圆心，CB 为半径画弧，交 AC 于 Q。再以 A 为圆心，AQ 为半径画弧，交 AB 于 P，则，点 P 为所求的黄金分割点，即 P 点分线段 AB 成黄金分割。

证明：

令 $AB=a$，则 $CB=\frac{a}{2}$，

由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

那么

$$AQ=AC-QC=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

又知 $AQ=AP$

则 $AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

若 $a=1$，得

$$AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

≈ 0.618

由此可知，P 点已分线段 AB 成黄金分割。此作图方法叫做黄金分割法。从图 1－3 中显然也可以得出，$\dfrac{AB}{AP}\approx 1.618$。

历史上的许多学者、科学家、艺术家，都曾被黄金分割那独特、神奇的效应所迷惑，16 世纪的威尼斯数学家帕乔里，不得不宣称黄金分割是“神赐的比例”。

为进一步了解黄金分割，揭示黄金分割之谜，还须从黄金分割的基本图形慢慢谈起。我们在这些黄金图形里再来细细地品味黄金分割那无穷的奥妙！

第二章　黄金分割的几何性质（黄金图形）与代数性质

一、黄金三角形

什么样的三角形叫做黄金三角形呢？我们定义如下：

定义：如果等腰三角形的底与腰的比等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即0.618时，那么这样的三角形就叫做黄金三角形。

我们现在计算一下黄金三角形的内角度数。

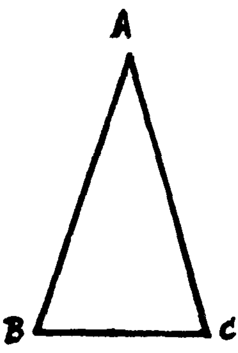

图 2—1

因为△ABC是黄金三角形（图2—1），所以

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

由正弦定理

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin A}{\sin C}$$

得

$$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

而 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}}=\frac{1}{2\cos36^\circ}=\frac{\sin36^\circ}{2\sin36^\circ\cos36^\circ}=\frac{\sin36^\circ}{\sin72^\circ},$$

即

$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin36^\circ}{\sin72^\circ}$，又知$\triangle ABC$是锐角三角形，

得

$A=36^\circ$，$C=72^\circ$。

由此，还可以这样来定义黄金三角形：

顶角为36°的等腰三角形叫做黄金三角形。其中$\cos36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$是这样推导出来的，先求$\sin18^\circ$的值，由

$\sin36^\circ=\cos54^\circ$

即

$\sin2\times18^\circ=\cos3\times18^\circ$，

得

$2\sin18^\circ\cos18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos18^\circ$

$\because\cos18^\circ\neq0$

得

$2\sin18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$

$=4\ (1-\sin^2 18^\circ)\ -3$

$\therefore4\sin^2 18^\circ+2\sin18^\circ-1=0$

得

$\sin18^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

舍去负根，则

$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

最后，得

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}。$$

黄金三角形还有下面一些有趣的性质。

性质一：黄金三角形三内角之比为：1∶2∶2。

因为黄金三角形是顶角为36°的等腰三角形，显然二底角是72°，那么三个内角的比必定是1∶2∶2。

由性质一可知，凡一个三角形的三内角之比为1∶2∶2，这个三角形就一定是黄金三角形。

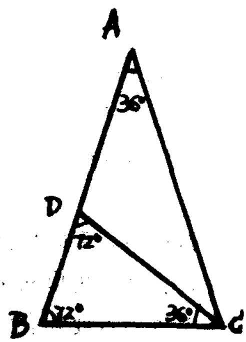

图 2—2

图2－2所示，我们在黄金三角形内作一底角C的角平分线，交对边AB于D，得到一个小三角形CDB，这里

$$\angle CDB = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2} \times 72° = 36°。$$

而$\angle B = 72°$，

则$\angle BDC = 72°$，

这时$\angle DCB : \angle B : \angle BDC = 1:2:2$，

故$\triangle CDB$是黄金三角形。

性质二：由黄金三角形一底角的平分线与底边所围成的三角形，是黄金三角形。

由性质二得知，我们再作$\angle CDB$的平分线交BC于E，得到$\triangle DBE$也是黄金三角形（图2－3）。再作$\angle DEB$的平分

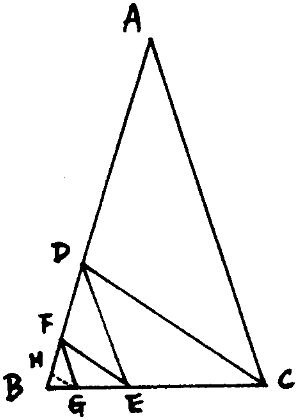

图 2—3

线交 DB 于 F，得到的$\triangle BEF$还是黄金三角形。

我们这样无限地作下去，于是得到一连串的黄金三角形，每一个三角形都“套”在前一个三角形内，形成“黄金三角形套”，这黄金三角形套里有无穷多个黄金三角形，从而它们组成了庞大的“黄金三角形家族”。

如果我们把黄金三角形家族中的两个相邻的三角形（如$\triangle ABC$与$\triangle DBC$，$\triangle DBC$与$\triangle DBE$等）称为“母子三角形”，那么任一个三角形与它相邻的前一个三角形，便合称为“祖孙三角形”，以此类推，在黄金三角形套中就得到了一系列有“亲缘”关系的黄金三角形。

由图 2—3 容易看出，折线 $CDEFGH$……，无限地向 B 点靠近，并以 B 点为极限点。可想而知，黄金三角形的家族是何等的庞大，它的子孙后代真是无穷无尽，若要和我们人类相比，我们任何一个延续了数千年的家族，都无法与之相提并论。

性质三：黄金三角形套中的三角形都是相似三角形，每两个相邻的黄金三角形（即母子三角形）的相似比，都等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即为 0.618。

由图 2—3 容易看出：$AC /\!/ DE /\!/ FG /\!/ \cdots\cdots$，