中学数学精讲丛书

中学数学专题精讲

[illegible] 游令民 郑映光 编

上海科学技术出版社

中学教学精讲丛书

中学数学专题精讲

朱世楫　游令民　郑映光　编

上海科学技术出版社

中学教学精讲丛书
中学数学专题精讲
朱世楫 游令民 郑映光 编
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张12.5 字数276,000
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷
印数：1—14,000
ISBN7-5323-2208-4/G·360
定价：3.90元

出版说明

为适应广大中学生课外阅读和中学教师教学辅导的需要，为配合各中学抓好语文、数学、外语这三门主课的毕业复习工作，并基于复旦大学附属中学的教学实力与教研能力，我们组织了以该校的一些骨干老教师——特级教师和高级教师为核心的编写组，共同编写了《中学教学精讲丛书》。本丛书以教材内容的要点、重点与难点为脉络，结合毕业复习的系统性、专题性与综合性的要求，分别选择了一些具有较强知识性、技能性与实用性的专题，进行了认真的汇集整理，深入的综论精讲。每一讲都力争贯彻加强基础、注重能力与优化方法的意图，并通过各类范例的剖析与论述，力求做到讲清概念，阐明规律，指点技巧，开宽思路。本丛书具有简炼、深刻、全面与清新的特点，它既反映了编著者从事数十年教学的经验积累和研究成果，也在一定程度上吸收了当前教学动态中的较新成就，因而它十分有益于读者的自学与提高，不失为中学的学生、教师、家长与自学青年的良师益友。特别是对于高中毕业生，更为实用。

本丛书共分语文、数学与外语三种。

上海科学技术出版社

1989 年 5 月

前　言

本书是根据教学大纲要求并结合编者多年教学实践编写而成的。其目的在于帮助读者在牢固掌握中学数学的基本知识的基础上，再进一步启迪思维，增长智慧，提高解题能力。本书不同于一般的题解式的复习资料，它着重于解题方法的探索和分析，书中还通过选用各种典型的例题来介绍一些常用的解题技巧。不少例题是某一类题目的典型模式，读者掌握它的解法，则可帮助从题海中跳跃出来。本书也不同于常见的自学丛书，它对于学习过但还没有掌握好中学数学知识的读者来讲，有着复习、巩固、加深和提高之突出功用。它特别对高中一、二、三年级学生进行单元复习或毕业复习是很适用的。还有，它对参加工作时间不长的青年教师，或者需开有关数学讲座的教师来讲，也有一定的参考价值。

本书一共有十六讲。为了帮助读者温故而知新，每一讲开头均有一节基础知识（或基本概念）提要，末尾则附有难度适当的少量练习题，供读者练习、巩固之用。书末还附有参考答案或解法提示。

限于水平，书中难免有缺点、错误之处，殷切希望读者批评指正。

编　者

1989年5月

目　录

第一讲

三角条件恒等式的证明与技巧

三角中的恒等式可分为两类：一类是在式子有意义的前提下不附有其它条件的恒等式，称为绝对恒等式；另一类是附有其它条件的恒等式，称为条件恒等式。后者的证明变动性较大，需要一定的证题技巧。本文将通过例题分析，对这类条件恒等式的证明思路和解题方法，作些概括性的介绍。

一、条件恒等式的几种证法

1. 综合法

综合法是从条件推出求证的一种证法。证明恒等式实质上是作定向变换，即把作为条件的等式变换为求证的等式。怎样完成这个变换，这是证明的首要问题。一要以角的比较为证题的线索，通过考察条件等式与求证等式中角的异同，以设法实现把条件中的角变换为求证等式的角；二要以函数的比较为证题的钥匙，通过分析条件等式与求证等式中函数的相互关系，以找出把条件等式中的函数转换成求证等式中的函数的方法。通常，总是既要比较角又要比较函数，并把两者很好地结合起来。

例 1 已知 $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$($\alpha$, β, $x\pm\alpha$, $x\pm\beta$ 都不等于 $(2n+1)\pi$, $n\in Z$)，试证：

$$\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{x+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\beta}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

【分析】 要把条件中的 x、α、β 化为 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\beta}{2}$、$\frac{x\pm\alpha}{2}$、$\frac{x\pm\beta}{2}$，可用和差化积或积化和差或倍角公式；而要把条件中的余弦化为正切，则可用公式 $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$。

证 为了出现 $\cos\frac{x\pm\alpha}{2}$，从已知得

$$\cos x+\cos\alpha=\cos\alpha(\cos\beta+1),$$

再由和差化积得

$$2\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}=2\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2};$$

为了出现 $\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}$，又由已知可得

$$\cos x-\cos\alpha=\cos\alpha(\cos\beta-1),$$

即 $$2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}=2\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

两式相除得

$$\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{x-\alpha}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2};$$

同理，由 $\cos x\pm\cos\beta$，可得

$$\mathrm{tg}\frac{x+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{x-\beta}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

再相加得

$$\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{x+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\beta}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

例 2 已知 $\dfrac{\operatorname{tg}(A-B)}{\operatorname{tg}A}+\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，求证：

$$\operatorname{tg}^2 C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

【分析】 要把已知中的角化为单角 A、B、C，把函数都化为正切，可用公式展开 $\operatorname{tg}(A-B)$，并化简已知条件。

证 由条件得 $\dfrac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A(1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)}+\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1$，

可写作

$$\frac{1-\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}+\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}=1,$$

去分母得

$$\sin^2 A-\sin^2 A\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}B+\sin^2 C+\sin^2 C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$$
$$=\sin^2 A+\sin^2 A\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B,$$
$$-\sin A\cos A\operatorname{tg}B+\sin^2 C+\sin^2 C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$$
$$=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B-\cos^2 A\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B,$$

化简得 $\sin^2 C+\sin^2 C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B,$

$$\sin^2 C=\cos^2 C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2 C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B.$$

例 3 已知 $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$，求证：

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.$$

【分析】 要降低已知中 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的次数，升高 $\sin\beta$、$\cos\beta$ 的次数。

证 方法一：先降低 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的次数。

去分母得 $\cos^4\alpha\sin^2\beta+\sin^4\alpha\cos^2\beta=\sin^2\beta\cos^2\beta,$

$$\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta+\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta$$
$$=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$

化简得

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$

再升高 $\sin\beta$、$\cos\beta$ 的次数，由上式

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\sin^2\alpha\cos^2\beta(\sin^2\beta$$
$$+\cos^2\beta)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$
$$\cos^2\alpha\sin^4\beta+\sin^2\alpha\cos^4\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta$$
$$-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$
$$\cos^2\alpha\sin^4\beta+\sin^2\alpha\cos^4\beta=\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$
$$\therefore\quad \frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.$$

方法二：由上面知

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\beta\cos^2\beta,$$

分解得 $(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)=0,$

$$\therefore\quad \sin^2\alpha=\sin^2\beta,\ \ \cos^2\alpha=\cos^2\beta,$$

代入求证的左方得

$$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\beta}=1,$$
$$\therefore\quad \frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1.$$

注 (1) 公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$、积化和差与倍角公式等，可起到消去某元或降低三角式次数的作用，而

$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

与和差化积等，则可升高三角式的次数，如上例。

(2) 证法二就是后面要介绍的代入法。

例 4 已知 $x+y+z=\frac{\pi}{4}$ $(x,y,z\neq n\pi+\frac{\pi}{4},n\in Z)$，求证：

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}+\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}$$
$$=\frac{(1+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}y)(1+\operatorname{tg}z)}{(1-\operatorname{tg}x)(1-\operatorname{tg}y)(1-\operatorname{tg}z)}.$$

【分析】 已知与求证中的角和函数完全一样，又求证的等式在形式上跟恒等式

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\quad(A+B+C=\pi)$$

近似，此恒等式在三角中已证过，现在用它证明此题.

证 $\because$ $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$,

$\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)$, $\quad\frac{1+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}z}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right)$,

又 $\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\left(\frac{\pi}{4}+y\right)+\left(\frac{\pi}{4}+z\right)=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}=\pi$,

$\therefore$ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right)$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right),$$

$\therefore$ 求证的等式成立.

注 证题中用到的三角形中内角三角函数恒等式，没有作为公式提出来，但是，在它已证的情况下，可作为公式来应用。有一些恒等式用它来证明比较方便，如此例.

2．分析法

综合法从已知到求证，分析法与综合法相反，是从求证到已知．从求证的等式开始，通过逆推，寻求每一步待证等式成立的充分条件，直到某一步的充分条件或为已知，或为从已

知可以推出的等式，或为一成立的等式。因为最后这一步的充分条件成立，就能说明每步的充分条件成立，进而求证的等式的充分条件也成立，于是求证成立。因为分析法所寻求的是逆推过程中每步的充分条件，所以，它的每一步都是可逆的。这是它和综合法的最大区别。

分析法是从求证向已知的推移，对于证明恒等式来讲，就要从角的形式与函数形式上去设法完成这个推移，如果求出的充分条件是已知，证明是从求证反推到已知的过程；如果是一个由已知推出的等式，则证明就是既从求证推向已知，又从已知推向求证，并使之相互接近而最后合一的过程。

例5 若 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$，试证：

$$(a-b\cos 2\alpha)(a-b\cos 2\beta)=a^2-b^2.$$

【分析】 要寻求求证成立的充分条件，就要把求证中的 2α、2β 化为单角 α、β，把函数化为正切。

证 去掉求证中的括号，得

$$a^2-ab(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+b^2\cos 2\alpha\cos 2\beta=a^2-b^2,$$

即 $b[b-a(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+b\cos 2\alpha\cos 2\beta]=0$,

等式成立的充分条件是 $b=0$，或

$$b-a(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+b\cos 2\alpha\cos 2\beta=0.$$

$$\because\quad b-a(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+b\cos 2\alpha\cos 2\beta$$
$$=b-2a\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$+\frac{b}{2}[\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)]$$
$$=b-2a(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)$$
$$+2b(\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)-b$$
$$=2(a+b)\sin^2\alpha\sin^2\beta-2(a-b)\cos^2\alpha\cos^2\beta,$$

$\therefore\quad (a+b)\sin^2\alpha\sin^2\beta-(a-b)\cos^2\alpha\cos^2\beta=0.$

又由 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$，得 $\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{a-b}{a+b}$，再化成 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$，得

$$(a+b)\sin^2\alpha\sin^2\beta-(a-b)\cos^2\alpha\cos^2\beta=0.$$

因为求证的等式所需的充分条件成立，故而求证成立。

例 6 设 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$，求证：

$$2\sin 2\beta-\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta).$$

【分析】 寻求结论成立的充分条件，并把求证中的角化为 α 和 $\alpha+\beta$。

证 $2\sin 2\beta-\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta)$，

即
$$\sin 2\beta+(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)=\sin 2(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\beta\cos\beta+2\cos(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta),$$

化简得

$$\sin\beta\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$\therefore\quad \sin\beta\cos\beta=2\sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$，

$\therefore\quad$ 求证成立的充分条件为 $\cos\beta=0$，或

$$\sin\beta=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta),$$

再由
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha,$$

得
$$\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)=3\sin\alpha\cos(\alpha+\beta),$$

即
$$\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta),$$

可得 $\sin\beta=2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$，这就是求证的充分条件。因为求证所需的充分条件成立，故而求证成立。

3．代入法

代入法是把已知代入求证中，或把从已知推出的某个等

式代入求证中去。这个代入的等式，可以是一个值，或角的关系式，或函数的关系式，等等。

例7 已知 α、β 为锐角，$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，

$$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0。$$

求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

证 把已知看作 α、β 的方程组，从条件求出 α 或 β 的函数值，进而求出 $\sin(\alpha+2\beta)$.

由 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，得 $3\sin^2\alpha=\cos 2\beta$；

又 $$\frac{3}{2}\sin 2\alpha=\sin 2\beta,$$

两式平方相加得

$$9\sin^4\alpha+\frac{9}{4}\sin^2 2\alpha=1,$$

即 $$9\sin^4\alpha+9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1,$$

化简得 $\sin^2\alpha=\frac{1}{9}$， $\because$ α 为锐角， $\therefore$ $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

把上面的 $\sin 2\beta$、$\cos 2\beta$ 代入下式并化简得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+2\beta)&=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta\\&=3\sin^3\alpha+\frac{3}{2}\cos\alpha\sin 2\alpha\\&=3\sin\alpha=1,\end{aligned}$$

又 α、β 为锐角， $\therefore$ $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

例8 已知 $\sin A+\sin B+\sin C=0$,

$\cos A+\cos B+\cos C=0$， 求证：

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C),$$
$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C).$$

证 由条件寻求 A、B、C 的关系。

$$\because \quad \sin A+\sin B=-\sin C, \qquad ①$$

$$\cos A+\cos B=-\cos C, \qquad ②$$

两式平方相加得 $2+2\cos(B-A)=1$,

$$\therefore \quad \cos(B-A)=-\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{A-B}{2}=\pm\frac{1}{2},$$

同理可得 $\cos(C-A)=-\dfrac{1}{2}$,

$$\therefore \quad B-A=2m\pi\pm\frac{2}{3}\pi, \quad C-A=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi,$$

即

$$B=2m\pi\pm\frac{2}{3}\pi+A, \quad C=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi+A \quad (m,n\in Z).$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad & \sin 3A+\sin 3B+\sin 3C \\ & =\sin 3A+\sin(6m\pi\pm 2\pi+3A) \\ & \quad +\sin(6n\pi\pm 2\pi+3A)=3\sin 3A.\end{aligned}$$

同理可得 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos 3A$.

又由①、②分别得

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=-\sin C,$$

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=-\cos C,$$

两式相乘得

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos C$$

$$=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin C,$$

因 $\cos\dfrac{A-B}{2}\neq 0$, 可约去$\cos\dfrac{A-B}{2}$, 并移项得

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}-C\right)=0,$$

$\therefore\quad \frac{A+B}{2}-C=k\pi(k\in Z)$，有

$$A+B+C=2k\pi+3C, \qquad ③$$

又 $3C=6n\pi\pm2\pi+3A$，代入③可得

$$3\sin(A+B+C)=3\sin 3A,$$

$$3\cos(A+B+C)=3\cos3A.$$

$\therefore\quad \sin3A+\sin3B+\sin3C=3\sin(A+B+C)$，

$\cos3A+\cos3B+\cos3C=3\cos(A+B+C)$.

例 9 设$m\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)(|m|<1)$，试证：

$$\frac{1}{1-m\sin2\alpha}+\frac{1}{1-m\sin2\beta}=\frac{2}{1-m^2}.$$

证 将左式通分并代入条件.

$$\frac{1}{1-m\sin2\alpha}+\frac{1}{1-m\sin2\beta}$$

$$=\frac{2-m(\sin2\alpha+\sin2\beta)}{1-m(\sin2\alpha+\sin2\beta)+m^2\sin2\alpha\sin2\beta}$$

$$=2-2m\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)/\{1-2m\sin(\alpha+\beta)$$

$$\times\cos(\alpha-\beta)+\frac{m^2}{2}[\cos2(\alpha-\beta)-\cos2(\alpha+\beta)]\}$$

$$=\frac{2-2\cos^2(\alpha-\beta)}{1-2\cos^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)+m^2\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{1-\cos^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{2}{1-m^2}.$$

例 10 已知 a、b 不全为零，$\alpha-\beta\neq2k\pi(k\in Z)$，$\alpha$、$\beta$ 为

方程$a\cos x+b\sin x=c$的解。试证：

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

证 把α、β代入方程，求出α、β的关系式。

$$\because\quad a\cos\alpha+b\sin\alpha=c, \qquad ①$$

$$a\cos\beta+b\sin\beta=c, \qquad ②$$

两式相减得 $a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0$,

差化为积得

$$-a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

由$\alpha-\beta\neq 2k\pi\,(k\in Z)$，知$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$,

$$\therefore\quad a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0,$$

令 $$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

显然有 $$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)=0,$$

$$\therefore\quad \frac{\alpha+\beta}{2}+\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in Z),$$

$$\therefore\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\pm\cos\theta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\pm\sin\theta=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

又①、②两式相加得

$$a(\cos\alpha+\cos\beta)+b(\sin\alpha+\sin\beta)=2c.$$

和化为积得

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=c,$$