

山东省中学课本

数学

SHUXUE

中学复习读物



前 言

为了帮助应届高中毕业生和知识青年复习中学的部分课程，我们根据一九七九年全国高考复习大纲和现行教材，组织编写了这套中学复习读物，其中包括语文、英语、数学、物理、化学、历史和地理共七个学科。语文由我组编写，其余各科分别请济南市委教育局教研室、青岛市委教育局教研室、菏泽行署教育局教研室、山东师范学院地理系组织编写，由我组统一审订。

这套读物，力求简明扼要、重点突出、便于自学。学习时，应结合教材系统复习已经学过的基础知识，加强基本技能的训练，提高分析问题和解决问题的能力。为升入高等学校学习或从事其他工作打下坚实的基础。

由于我们水平所限，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，希望读者批评指正。

山东省中小学教材编辑组

一九七九年一月

目 录

第一篇 代 数

第一章 数	1
一 自然数	1
二 有理数	2
三 实数	2
复习题一	4
第二章 代数式	6
一 代数式的基本概念	6
二 整式	6
三 因式分解	7
四 分式	9
五 根式	9
复习题二	17
第三章 代数方程	19
一 方程的一般理论	19
二 整式方程	23
三 高次方程	29
四 分式方程和无理方程	33
五 方程组	39
六 列方程(组)解应用题	48
复习题三	51

第四章 不等式	56
一 不等式和它的性质	56
二 不等式的解法	57
三 不等式的证明	67
复习题四	72
第五章 函数	75
一 函数的基本概念	75
二 几种常见的代数函数	82
复习题五	90
第六章 指数和对数	93
一 指数	93
二 指数函数	96
三 对数	98
四 对数函数	100
五 指数方程和对数方程	108
复习题六	117
第七章 数列与极限	121
一 数列的概念	121
二 等差数列和等比数列	122
三 数列的极限	129
四 无穷递缩等比数列	132
复习题七	134

第二篇 平面几何

第一章 线段、角、平行线	138
一 直线、射线、线段	138

二 角	140
三 两条直线的位置关系	142
四 命题和定理	143
五 基本作图	145
复习题一	150
第二章 三角形	153
一 三角形的分类	153
二 三角形中的角和主要线段	153
三 三角形的性质	156
四 全等三角形和相似三角形	158
复习题二	175
第三章 四边形	186
一 轴对称图形和中心对称图形	186
二 四边形	186
三 特殊四边形的性质及其判定	187
复习题三	196
第四章 圆	202
一 圆及其基本性质	202
二 与圆有关的角	204
三 点与圆、直线与圆、圆与圆的位置 关系	204
四 圆和多边形的关系	207
五 基本轨迹	209
六 与圆有关的作图	210
复习题四	225

第三篇 立体几何

第一章 直线和平面	234
一 直线与直线的位置关系	234
二 直线与平面的位置关系	235
三 平面与平面的位置关系	237
四 有关距离的概念	240
复习题一	248
第二章 多面体	255
一 棱柱	255
二 棱锥	257
三 棱台	258
复习题二	268
第三章 旋转体	274
一 圆柱	274
二 圆锥	275
三 圆台	276
四 球	277
复习题三	282

第四篇 三角函数

第一章 三角函数的定义及其性质	294
一 角的概念	294
二 三角函数的定义、性质	295
复习题一	319

第二章 三角恒等式	324
一 和角与倍角公式	324
二 半角公式	325
三 积与和差的互化	325
复习题二	355
第三章 解三角形	360
一 解直角三角形	360
二 解任意三角形	361
复习题三	383
第四章 反三角函数和三角方程	388
一 反三角函数	388
二 三角方程	390
复习题四	401

第五篇 平面解析几何

第一章 平面直角坐标系	404
一 平面直角坐标系	404
二 两点间的距离公式	405
三 线段的定比分点	406
复习题一	412
第二章 曲线与方程	414
一 曲线与方程的关系	414
二 由曲线求方程	414
三 由方程画曲线	415
四 曲线与曲线的交点	416
复习题二	420

第三章 直线	423
一 直线的倾斜角与斜率	423
二 直线方程的特殊形式	424
三 直线方程的一般形式	425
四 两条直线的相对位置	427
五 直线系	428
复习题三	435
第四章 圆锥曲线	441
一 抛物线	441
二 椭圆	442
三 双曲线	445
四 圆锥曲线的切线和法线	447
五 圆锥曲线	453
复习题四	475
第五章 坐标轴的平移	480
一 平移公式	480
二 利用移轴公式化简二次方程	480
三 二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的讨论	481
复习题五	485
第六章 参数方程	487
一 参数方程	487
二 几种常见曲线的参数方程	488
三 化参数方程为普通方程	488
复习题六	493

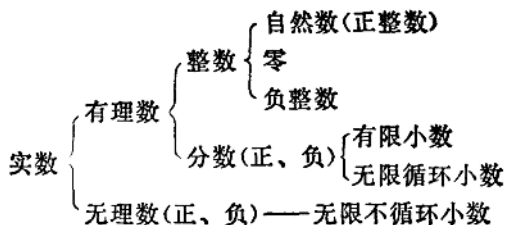
第六篇 总 复 习

范例	494
总复习题	566
复习题答案	585

第一篇 代 数

第一章 数

在中学数学里，我们所学过的数，可归纳成下列的数系表：



一、自 然 数

1. 定义 数 1, 2, 3, …… , n , …… , 叫做自然数, 也叫正整数。

2. 主要性质

(1) 自然数有无限多个；1是最小的自然数，但没有最大的自然数；

(2) 任意两个自然数，都可以比较大小；

(3) 在自然数集合内，可以施行加法和乘法运算；

(4) 在自然数集合内，除1以外只能被1和这个数本身

整除的数，叫做质数(或素数)；还能被其他数整除的数，叫做合数。数1既不是质数，也不是合数。

二、有 理 数

1. 定义 正、负整数及正、负分数和零统称为有理数。

有理数总可以表示为 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数，且 $q \neq 0$)的形式。

2. 主要性质

- (1) 有理数没有最小的数，也没有最大的数；
- (2) 任意两个有理数都能比较大小；
- (3) 在有理数集合内，可以施行加、减、乘、除(除数不为零)四种运算，即任意两个有理数的和、差、积、商仍为有理数。

三、实 数

1. 无理数 无限不循环小数叫做无理数。

2. 实数 有理数和无理数统称实数。

3. 实数的主要性质

- (1) 实数中没有最小数，也没有最大数；
- (2) 任意两个实数可以比较大小；
- (3) 实数与数轴上的点之间具有一一对应的关系；
- (4) 在实数集合内，可以施行加、减、乘、除(除数不为零)四种运算。

4. 实数的绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}) \\ -a, & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

范 例

【例 1】两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）是不是无理数？

答：两个无理数的和、差、积、商（除数不为零）可能是无理数，也可能是有理数。例如， $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})$

$$= 4; \lg 20 - \lg 2 = 1; \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4}, \frac{\sin 225^\circ}{\cos 135^\circ} = 1;$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}; \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}; \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{6}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【例 2】 $|a|$ 和 $3a$ 谁大？

答：若 $a > 0$ ，则 $|a| < 3a$ ；

若 $a < 0$ ，则 $|a| > 3a$ ；

若 $a = 0$ ，则 $|a| = 3a$ 。

【例 3】计算： $\sqrt{5} + \frac{1}{7} - 4.375 + \frac{4}{3}$ 。（精确到 0.01）

$$\text{解：} \quad \sqrt{5} + \frac{1}{7} - 4.375 + \frac{4}{3}$$

$$\approx 2.236 + 0.143 - 4.375 + 1.333$$

$$= -0.663$$

$$\approx -0.66.$$

【例 4】不用绝对值符号，化简下列各式：

$$(1) |a| + |-a| + |a^2| + |-a^2|,$$

$$(2) |2x-1| + |x+1|.$$

$$\text{解: (1) } |a| + |-a| + |a^2| + |-a^2|$$

$$= \begin{cases} a+a+a^2+a^2=2(a+a^2), & (\text{当 } a>0 \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } a=0 \text{ 时}) \\ -a-a+a^2+a^2=2(a^2-a), & (\text{当 } a<0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$$(2) |2x-1| + |x+1|$$

$$= \begin{cases} 2x-1+x+1=3x, & (\text{当 } x \geq \frac{1}{2} \text{ 时}) \\ 1-2x-x-1=-3x, & (\text{当 } x \leq -1 \text{ 时}) \\ 1-2x+x+1=2-x, & (\text{当 } -1 < x < \frac{1}{2} \text{ 时}) \end{cases}$$

复 习 题 一

1. 说明下列各数及各式的运算结果哪些是有理数? 哪些是无理数?

$$(1) \pi, \quad (2) 3.1416, \quad (3) \sqrt[3]{64},$$

$$(4) \sqrt{1000}, \quad (5) \sqrt[3]{-1000}, \quad (6) 0.9,$$

$$(7) \frac{31}{353}, \quad (8) \sqrt[3]{12}, \quad (9) 5 + \sqrt{3},$$

$$(10) \lg 2, \quad (11) \cos 45^\circ, \quad (12) \lg \lg 45^\circ.$$

2. 零是实数吗? 是有理数吗? 是无理数吗? 是整数吗? 是正数吗?

3. 若 $|m| = |n|$, 则 $m = n$ 对吗?

若 $|m| > |n|$, 则 $m > n$ 对吗?

若 $m < n$, 则 $|m| < |n|$ 对吗?

4. 计算: $32 + 14\frac{2}{7} + \sqrt{1880}$. (精确到 0.1)

5. 设 x, y 是有理数, 且 $(x - y\sqrt{2})^2 = 9 - 4\sqrt{2}$, 求 x, y 的值.

6. 不用绝对值符号, 化简下列各式:

(1) $a - |a - 2|$; (2) $|a + 3| - |a - 6|$;

(3) $|6 - a| - |2a + 1| - \sqrt{a^2}$;

(4) $3a + |6 - a| - |2a + 1|$;

(5) $\frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$. ($-1 < x < 0$)

7. 计算:

(1) $0 - (0 - 1) \times 2 + 0 \div (2 - 1) - (0 + 1) \times 1$;

(2) $8\sqrt[3]{20\frac{1}{4}} + 5\sqrt[4]{0.25} - (40\sqrt{0.08} - 10\sqrt[3]{0.162})$.

(精确到 0.01)

8. 怎样理解如下断语: 所有实数的集合与数轴上的所有点的集合成一一对应的关系.

9. x 为何值时, 下列各式成立:

$x < 2x$; $x = 2x$; $x > 2x$.

10. 求证: $\sqrt{2} + 1, \log_2 3$ 都是无理数.

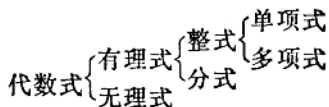
第二章 代 数 式

一、代数式的基本概念

1. 代数式及其分类

(1) 代数式：用运算符号将数和表示数的字母连结而成的式子叫做代数式。

(2) 代数式的分类



2. 代数式的值 如果用数值代替代数式里的字母，并且按照指定的顺序进行计算，所得到的结果叫做代数式的值。

求代数式的值时，应先化简后代入求值。

3. 恒等式和恒等变形

若两个代数式，对于变数字母所允许取的各个值，都有相等的值，那么这两个代数式就是恒等式。

把一个代数式变为另一个与它恒等的代数式叫做代数式的恒等变形。

二、整 式

1. 整式

只含有加、减、乘(包括正整数次乘方)、除四种运算的

代数式叫做有理式。

不含分母或含有分母但分母中不含字母的有理式，叫做整式。不含加法和减法运算的整式叫做单项式。若干个单项式的代数和叫做多项式。

2. 整式的运算

除了熟练整式的加、减、乘、除四种最基本的运算外，还要熟练地掌握幂的运算法则和乘法公式。

幂的运算法则：

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad (m, n \text{ 为正整数}, m > n, a \neq 0)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (m, n \text{ 为正整数, 下同})$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (b \neq 0)$$

乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ = a^3+b^3+c^3-3abc,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

三、因式分解

1. 因式分解的意义

把一个多项式分解成几个整式的乘积的形式，叫做因式分解。

2. 因式分解的方法

(1) 提取公因式法： $ma + mb - mc = m(a + b - c)$ 。

(2) 公式法：

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

(3) 分组分解法：

把多项式的项适当分组，再应用(1)或(2)进行分解。

(4) 二次三项式的因式分解可用十字相乘法、求根法：

① 十字相乘法：

$ax^2 + bx + c$ 中，若 $a = pq$ ， $c = rs$ ，且 $b = qr + ps$

即

则 $ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$ 。

② 求根法： $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，

其中 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

在分解因式时，要注意在什么数集上进行分解，有时，在不同的数集上有不同的结果，例如，分解 $a^4 - 4b^4$ 。