# 結構动力学例題及習題

Н.И.别祖霍夫著

高等教育出版社

統一書号 15010·719
定价 ¥ 1.20

# 結構动力学
# 例題及習題

Н. И. 别祖霍夫著
唐克偉譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立建筑書籍出版社（Государственное издательство строительной литературы）出版的别祖霍夫（Н. И. Безухов）教授所著“結構动力学例題及習題”（Динамика сооружений в примерах и задачах）一書1947年版譯出。

本書內容共分兩篇：第一篇为彈性振动；第二篇为实用結構动力学。書中每章之前均有理論內容摘要，用建筑实踐中的許多实例来闡述結構动力学理論的实际应用。除例題外，書中还收集了大量習題，供作独立練習之用。

本書可供設計师、研究生及工程师們作为研究和应用結構动力学的实用参考書，同时亦可作为土建学院及运輸学院路工系的学生在学習結構动力学課程时的参考書。

# 結構动力学例題及習題

Н. И. 别祖霍夫著

唐克偉譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号15010·719　開本850×1168 $1/32$　印張8 $2/16$

字數218,000　印數0001—4,000　定價（10）¥1.20

1958年11月第1版　1958年11月北京第1次印刷

# 序

本书准备作为建筑工程学院和运輸学院的路工系在学习"結构动力学"課程时的教学参考书。

书中的重点为动力学計算方法运用的示范，即着重于习题和例题；就这一点来說，本书可作为結构动力学的习题課本。

考慮到在建筑工程的实踐中工程师所遇到的动力学計算問題极为多种多样，本书从各种工程中收集了最值得注意的例题和习题。

考慮到目前有关結构动力学的教学参考书还不够多，而这門科学的原理在建筑实踐各个部門內的应用，則在各种参考书中分散論述，并由各个著者采用不同的說法、符号等等，因此，著者認为有必要在每一章的前面編写有关理論知識的摘要，扼要地介紹最起碼的理論知識，这在求解相应章节的习题时是完全够用的。

从叙述这种或那种理論原理的各种方案中，我們选用其形式上最簡单和在建筑实踐中最广泛通用的方案。这一点对于在計算手續上以及甚至在外观形式上与結构靜力学相似的那些計算方式和方法，尤为注意：当采用这些对于工程师是习惯了的方法（角变形法、参数法）时，对于大多数建筑工程方面的問題，就不必直接应用和探討微分方程式，这些方程式在工程实踐中在很大程度上使得动力学的計算問題变得繁杂。

本书由两篇組成：講述少量彈性振动原理的理論部分和将这些理論应用于实际工程結构的实用部分。鉴于以上所述，本书的第一篇为彈性振动理論的习题汇編，并可供一些学院（除建筑工程学院外）采用，在这些学院里需要学习振动理論这門課程，或者振

动理論在材料力学教学大綱中以一个篇章来充分学习。

本书的取材是根据著者最近几年来講授結构动力学的經驗和在 1939 年用石印本刊行的同名手稿。

著者对本书的評閱者 C. A. 白尔希金 (Бернштейн)教授和国立建筑书籍出版社的編审 M. C. 魯道米涅尔 (Рудоминер)工程师表示衷心的感謝;他們的有益而重要的批評,著者已予重視。

著者

# 常用量的符号

| 符号 | 名称 | 单位 |
|---|---|---|
| $T$ | 具有一个自由度的系統的固有振动周期（系統具有多个自由度时，为基調振动的周期）…… | 秒 |
| $\omega$ | 固有振动的圓周頻率，即在$2\pi$秒时間間隔內的振动次数（系統具有多个自由度时，为基調振动的頻率）…… | 秒$^{-1}$ |
| $n$ | 每分鈡的振动次数…… | 次/分 |
| $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots\cdots$ | 系統具有多个自由度时，与其固有振动的各种形式相对应的圓周頻率（按数值增大的次序排列）…… | 秒$^{-1}$ |
| $T_1, T_2, T_3 \cdots\cdots$ | 与各个固有頻率相对应的固有振动的周期（按数值减小的順序排列）…… | 秒 |
| $\tau$ | 强迫振动的周期，即周期性（扰动）載荷的变化完成一个循环所需要的时間（由一个冲击到次一个冲击的时間；由某个力的开始作用到紧随着的同样的力开始作用时的时間等等）…… | 秒 |
| $\theta$ | 强迫振动的圓頻率，即扰动載荷在$2\pi$秒时間間隔內的重复次数…… | 秒$^{-1}$ |
| $t$ | 由計算开始到所研討瞬間的时間…… | 秒 |
| $g$ | 重力加速度…… | 公分/秒$^2$ |
| $M$ | 集中質量…… | $\frac{公斤\text{-}秒^2}{公分}$ |
| $m$ | 单位长度上的質量，即質量沿結构长度的分布集度…… | $\frac{公斤\text{-}秒^2}{公分^2}$ |
| $Q=Mg$ | 重力——即質量$M$的自重…… | 公斤 |
| $q$ | 結构固定載荷的集度…… | 公斤/公分 |
| $J_{ox}$ | 質量对于某軸的慣性矩，該軸应通过原点并平行于坐标軸$x$…… | 公斤-秒$^2$-公分 |
| $P$ | 在某一瞬間作用在結构上的无質量外力…… | 公斤 |
| $C_a$ | 結构一定点$a$处的系統剛度，即在該点$a$沿力的作用方向引起单位位移（沉陷，移动等等）所需加的力的数值…… | 公斤/公分 |
| $\delta_{aa}$ | 点$a$的基本位移，即点$a$由于作用在該点的单位力所引起的位移（其值等于点$a$的系統剛度的倒数）…… | 公分/公斤 |

| 符号 | 名称 | 单位 |
|---|---|---|
| $y$ | 結构軸綫上的点沿任意預先指定方向的位移…… | 公分 |
| $\varphi$ | 断面轉角…… | 弧度 |
| $y_{cm(P)}$ | 靜荷位移(伸长,撓度,剪切),卽假定力 $P$ 为理想的靜荷作用时所引起的位移…… | 公分 |
| $y_{\max(P)}$ | 实际的最大位移，該位移乃由实际的动载荷力 $P$ 所引起的…… | 公分 |
| $\mu$ | 动荷系数,卽力 $P$ 的动荷效应与其靜荷效应的比値…… | 无名数 |
| $\varepsilon$ | 固有振动的阻尼系数…… | 无名数 |
| $K_\omega=\sqrt[4]{\dfrac{q\omega^2}{gEJ}}$ | 固有振动的頻率特性(指数有时被降低)…… | 公分$^{-1}$ |
| $K_\theta=\sqrt[4]{\dfrac{q\theta^2}{gEJ}}$ | 强迫振动的頻率特性…… | 公分$^{-1}$ |

# 目　录

# 第一篇　彈性振动

## 第一章　一个自由度系統的振动

### 理論內容摘要

为了完全确定某系統在任意瞬間的几何状态，若只需知道一个参数例如一个固定点的位置卽已足够时，这种系統称为具有一个自由度的系統。确定其他各点位置的問題，不屬于动力学問題的范圍，而可以用一般的靜力学方法解决。

一个自由度系統的典型实例，为带有一个集中質量而沒有自重的彈性梁（彈簧，軸），該梁仅可能沿一个方向具有位移（图 1,*a*—*в*）。当这个質量振动时，梁上各点的位移和上述質量的位移成一定的比例关系；然而位移的特征（梁的彈性曲綫，彈簧中心綫上各点的位移图）和系統的动力学性質无关，并且用普通的靜力学方法卽能确定。

实际的梁，若梁上装有重載（发动机等）时，就可以認为是接近于这种計算方案的；因为梁的自重，相对于上面的重載来講，可以忽略不計。

这种机构可能是具有一个自由度的系統，該机构由几个固定在剛性不变形梁上的沉重質量所組成（图 1,*г*），但梁能圍繞某一固定中心（鉸鏈支座）而轉动。該梁为几个彈簧所支持，这些彈簧的質量，和沉重的質量 $M_1$、$M_2$、$M_3$ 相比較，可以被忽略。在这种情况下，为了完全确定該系統在任意瞬間的几何状态（任何一个質量，取自彈簧上的任何一个点等等），只需知道一个参数——剛性

梁的轉角卽已足够。

对称于軸的薄壁圓筒(图 1,д),其徑向振动的研究也可列为一个自由度的問題。在这种情况下,为了完全确定圓筒壁在任意瞬間的几何状态,总共只需知道一个参数——內徑的增量——卽已足够。

对于厚壁圓筒的各层,在每一瞬間可能具有不同的徑向位移(由于壁厚的徑向变形所引起),然而振动时各层厚度的变化(变

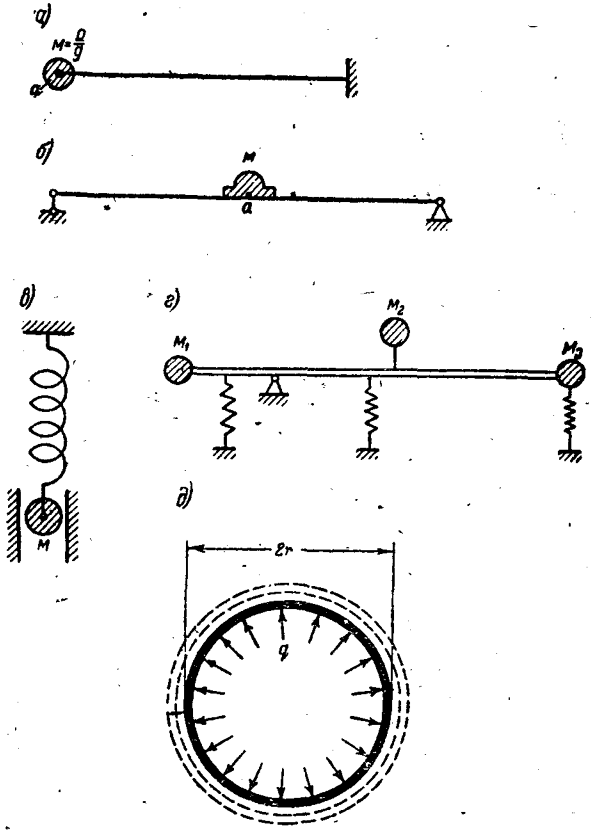


图 1

形）和振幅相比較，可以略而不計；因此，这种系統也是一个自由度的問題。

实际的工程結构，通常都和一个自由度的系統相去甚远。然而实际上許多进行結构动力学計算的問題，都可以被代换成研究最后結果等同的、特意选擇的一个自由度系統的問題。

根据上述理由，对一个自由度系統振动問題的研究，乃是結构动力学极为重要的一个組成部分。

如果一个自由度系統的靜止状态遭到破坏（对質量加一个冲量，或者使質量离开原来为靜止平衡状态的位置然后任其自由），則在沒有阻力的情况下，該系統将发生自由振动（或者称为固有振动或自然振动）；而振动将隨时間按簡諧規律变化①：

$$y=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t; \tag{1}$$

$$v=v_0\cos\omega t-y_0\omega\sin\omega t, \tag{2}$$

式中 $y$ 和 $v$ ——时間为 $t$ 时，質量的位移和速度；

$y_0$ 和 $v_0$——时間 $t=0$ 时，質量的初位移和初速度；

$\omega$ ——圓頻率或循环頻率（往后簡称“頻率”），即 $2\pi$ 秒时間間隔內的振动次数。

公式(1)和(2)中的位移 $y_0$ 和速度 $v_0$，由振动过程开始时質量所处的位置——即靜止平衡位置算起。

位移幅度与运动的开始条件有关，并可写成公式：

$$y_{\max}=\sqrt{y_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}. \tag{3}$$

頻率由下述公式之一求得：

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{M}}=\sqrt{\frac{cg}{Q}}=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}=\sqrt{\frac{1}{M\delta_{aa}}}. \tag{4}$$

---

① С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, 1931 年版，第 9 頁。

式中　$y_{cm}$——静荷位移(伸長,撓度),卽由于沿自由度方向作用的力的影响,質量在該方向所具有的位移,作用力的大小和重物自重的数值相等;

$c$——用静力方法产生单位位移所需要的作用力(当变形数值 $y=1$ 时,由于彈性而具有的恢复力),或者是系統的剛度;

$M=\dfrac{Q}{g}$——集中質量;

$\delta_{aa}=\dfrac{1}{c}$——基本位移,卽質量的固定点由于作用在該点的假想单位力所引起的静荷位移。

振动頻率 $\omega$ 和周期 $T$(振动一个循环所需要的时間)之間的关系为:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{5}$$

根据公式(3)和(4),1分鈡的振动次数按下式确定:

$$n=\frac{60}{T}\approx\frac{300}{\sqrt{y_{cm}}},$$

式中　$y_{cm}$ 以公分計。

自由振动的周期与其振动頻率間的关系,是結构的主要动力学特性。

如果載荷是在結构的自由振动周期的一部分或仅为几个(2—3)这样的周期的时間之內增大(一般是发生变化),則这种載荷对于結构来說就可以認为是动載荷和快速变化的載荷。

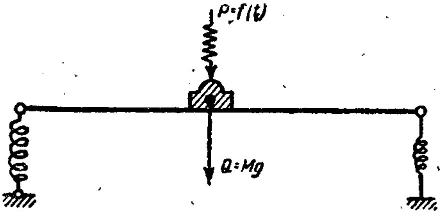

图 2

如果載荷增加或变化

是在等于自由振动周期的 5—10 倍和更大倍数的时間之內，則这种載荷的效果接近于靜載荷。

若質量上的作用力，随时間而按任意規律 $P=f(t)$（图2）变化时，这个系統将发生强迫振动。

在这种情况下，質量在任意瞬間 $t$ 时的位移求自公式①：

$$y=\frac{1}{\omega M}\int_0^t f(t_1)\sin\omega(t-t_1)dt_1. \tag{6}$$

如果在受該力作用的同时，系統还发生自由振动，則質量的总位移由公式(1)和(6)的代数和而求得。

系統受具有冲量 $S=Pdt$ 的瞬时力作用时，該系統所經过的最大位移（这将是在力消逝之后）用下列公式表示：

$$y_{\max}=\mu\, y_{cm(P)}=\frac{S}{\omega M}, \tag{7}$$

而相应的动荷系数为

$$\mu=\omega dt=2\pi\frac{dt}{T} \tag{8}$$

系統中若具有与运动速度一次方成比例的阻尼力时，自由振动方程式变成以下的形式：

$$y=e^{-\varepsilon t}\left\{y_0\left[\cos\omega_1 t+\frac{\varepsilon}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right]+\frac{v_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right\}, \tag{9}$$

式中 頻率 $\omega_1=\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}$，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$. (10)

用 $\varepsilon$ 表示 $\frac{\alpha}{2M}$，其中 $\alpha$ 是阻力系数（运动速度等于一时所产生的阻力）；$\omega$ 仍然是沒有阻力时的自由振动頻率。

---

① Акад. Л. Н. Крылов, Диференциальные уравнения математической физики, АН СССР, 1934。

Проф. И. М. Рабинович, Расчет сооружений на действие нагрузок, изменяющихся во времени по любому закону, "Вестник ВИА РККА," №20。

这种系統受扰动力作用时，其位移公式写成:

$$y=\frac{1}{M\omega_1}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-t_1)}f(t_1)\sin\omega_1(t-t_1)dt_1. \tag{11}$$

当随时間按簡諧規律变化的扰动力持續作用时，即 $P_1=$ $=P\sin\theta t$（最普遍的情况），正如对公式(11)的探討所示，系統将发生具有扰动力频率为 $\theta$ 的振动（稳定状态），并且在定期重复的最大幅度（$y_{\max(P)}$）和静荷位移之間，具有以下的关系式[①]：

$$y_{\max(P)}=\mu y_{cm(P)},$$

其中动荷系数

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\left(\frac{2\varepsilon}{\omega}\right)^2}}, \tag{12}$$

而 $y_{cm(P)}$——最大扰动力 $P$ 所引起的静荷位移。

当阻力很小而被忽略不計和一般在共振被消除的范圍之內（此时 $\theta$ 和 $\omega$ 的数值相差很大）时，可以認为:

$$\mu=\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \tag{13}$$

变形的动荷系数同时也是应力的动荷系数，即

$$\sigma_{\partial u н}=\mu\sigma_{cm}. \tag{14}$$

系統具有几个自由度时，表示应力和变形的动荷系数公式，将具有不同的形式(参閱第二章和第三章)。

扭轉振动时的計算公式，可将公式(1—11)进行以下的代换而求得:

用 $\varphi$ 和 $\varphi_0$ 代替 $y$ 和 $y_0$——时間为 $t$ 和 $t=0$ 时的扭轉角;

用 $\varphi'$ 和 $\varphi_0'$ 代替 $v$ 和 $v_0$——时間为 $t$ 和 $t=0$ 时的轉动角速度;

① С. И. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, стр. 33, 1933

用 $J$ 代替 $M$——质量对于轉动軸的慣性矩。

## §1. 自由振动

**1.** 悬臂梁的长度 $l=1$ 公尺，其末端裝有重量 $Q=123$ 公斤的发动机(图3)。鋼梁($E=2.1\times10^6$ 公斤/公分$^2$)用№8工字型鋼($J=78$ 公分$^4$)构成。梁的自重和发动机的重量相比較，可略而不計。試决定自由振动的頻率和周期①。

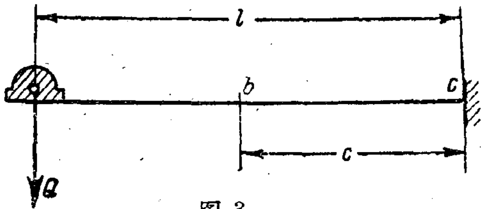


图 3

解：由于发动机的重量作用，在悬臂梁末端产生的撓度为：

$$y_{cm}=\frac{Ql^3}{3EJ}.$$

振动頻率：

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}=\sqrt{\frac{981\times3\times2.1\times10^6\times78}{123\times100^3}}=62.8\ 秒^{-1}。$$

周期：
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\times3.14}{62.8}=0.1\ 秒。$$

一分鈡的振动次数：$\dfrac{60}{T}=600$ 次/分。

**1,a.** 金属支柱的上端作用有重量 $Q=123$ 公斤。試求支柱的横向振动頻率和周期。跨距 $l$、断面、支柱的材料等和前一习题的数据相同。忽略縱向力所引起的柱的变形（縮短）和縱向振动，即認为支柱是不可压縮的。

答：前一习题的結果仍然有效，因为用来进行計算的公式(4)

---

① 除去特別指明的情况之外，所有的习題都不考慮振动阻力。