

弹性流变力学

蔡中林 黄临平 著

 原子能出版社

东华理工学院重点学科建设资助计划

弹性流变力学

蔡中林 黄临平 著

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性流变力学/蔡中林,黄临平著. —北京:原子能出版社,2005
ISBN 7-5022-3411-X

I. 弹… II. ①蔡… ②黄… III. 弹性力学-流变学 IV. 037

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 042903 号

内容简介

本书从基本假设(或从基本原理)出发,应用高等数学和工程数学的有关知识,全面系统地阐述了弹性流变力学的基本概念、基本理论和基本方法,本书属于原理型著作,是高层次的、更符合实际的弹性理论体系。

本书建立了弹性流变基本方程,证明了弹性流变基本定理,介绍了弹性流变问题各种解法,讨论了静力学弹性流变的平面问题和空间问题,以及动力学弹性流变的弹性波问题。

本书可以作为大学本科生有关材料科学、地球物理科学、工程设计和工程建筑、机械设计和机械制造等专业的专业课教材,亦可供相关领域的研究生和科技工作者参考。

弹性流变力学

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)

责任编辑 张琳

责任校对 徐淑惠

责任印制 丁怀兰

印刷 保定市印刷厂

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 16

字数 399 千字

版次 2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

书号 ISBN 7-5022-3411-X

经销 全国新华书店

印数 1—1000

定 价 50.00 元

前 言

弹性流变力学或弹性流变理论是一门研究连续体弹性流变规律及其应用的科学,它广泛用于材料科学、地球物理科学、工程设计和工程建筑、机械设计和机械制造;它亦是研究弹性波的发生和传播的理论基础。

《弹性流变力学》一书分为两大部分,第一章至第七章为理论创立部分,第八章至第十二章为理论应用部分。

一、理论创立部分

第一、二章中,从连续流变体出发,应用有关函数的台劳级数展开等数学知识,阐述了弹性体的弹性流变、流变位移、流变内力、全应变、一点应变、一点应变张量、全应力、一点应力和一点应力张量等基本概念及其数学表述;证明了流变定理和流变等效定理;建立了弹性流变几何方程,一点应变状态方程和一点应力状态方程;讨论了主应变、应变主轴、主应力和应力主轴。它们为进一步阐述弹性流变理论奠定了基础。

第三章中,从经典流变体出发,依据弹性体弹性流变遵循经典物理学的基本定律,建立了弹性体弹性流变所遵循的弹性流变物理方程,如弹性流变质量方程、弹性流变运动方程、弹性流变运动平衡方程、弹性流变旋动方程、弹性流变旋动平衡方程、弹性流变能量方程、弹性流变热传导方程和弹性流变变分方程等等。

第四章中,从弹性流变体出发,应用有关函数的幂级数展开公式和应变能公式,建立了反映应力、应变和热变三者之间关系的弹性流变本构方程,建立了线弹性流变本构方程。建立了各向同性线弹性流变本构方程,以及它的各种表示式;建立了反映容变与热变之间关系的热变弹性本构方程。

第五章中,从协变流变体出发,依据应变函数的单值连续性,应用弹性流变几何方程、弹性流变运动方程和热变弹性本构方程等,建立了各种形式的弹性流变协调方程。

第六章中,综合前五章所建立的各种方程,组建了动力学弹性流变基本方程和静力学弹性流变基本方程;本章给出了初始条件和边界条件的提法;给出了弹性流变基本方程的各种解法;本章为解决弹性体弹性流变问题提供了完备的数学方程和各种解法。

第七章中,证明了弹性体弹性流变问题解的弹性流变惟一性定理和弹性流变迭加定理;证明了弹性体弹性流变问题的弹性流变互等定理、弹性流变位移变分定理和弹性流变应力变分定理;介绍了圣维南原理;本章为动力学弹性流变问题和静力学弹性流变问题的求解可行性,提供了理论依据,为弹性流变问题的解法多样性和解题捷径等问题,提供了理论依据。

二、理论应用部分

第八章至第十一章中,讨论了静力学弹性流变的平面问题和空间问题。第八章讨论了直角坐标的平面问题,第九章讨论了极坐标的平面问题,第十章讨论了直角坐标的单元法问题,第十一章讨论了空间问题。这几章中,介绍了弹性流变位移解法、弹性无旋流变位移势解法、

弹性流变应力解法、弹性无旋流变应力函数解法、弹性流变位移变分法解法和弹性流变单元法解法等等。

第十二章中,讨论了动力学弹性流变的弹性波问题。导出了弹性流变波动方程和热弹性流变波动方程,讨论了弹性流变波动方程的各种解答;阐述了弹性流变波的反射规律和折射规律等等。

三、本书特点

为了便于教学和阅读,本书在叙述上,力求做到表述简洁,语言规范,概念清晰,通俗易懂;在结构上,尽量做到层次分明,依次递进,由易及难,由浅入深,理论与应用相互结合,来龙去脉清楚无误。

本书是从基本假设(或基本原理)出发,应用高等数学和工程数学等有关数学知识,阐述了弹性体弹性流变的基本概念、基本理论和基本方法。建立了描述弹性流变规律的弹性流变基本方程;证明了反映弹性流变特点的弹性流变基本定理;讨论了弹性流变理论的实际应用;形成了弹性流变的理论体系,构成了《弹性流变力学》这本著作。本书属于原理型的著作,原理简单明了,数学演绎清晰,理论严谨可信。

《弹性流变力学》一书是作者在现有弹性理论的教学过程中进行深入研究,并加以创新发展,从而建立起来的高层次更符合实际的弹性理论体系。可以说,没有现有弹性理论,也就没有《弹性流变力学》一书。在本书中,许多概念、名词、方法、甚至例题,都是现有弹性理论中所有的。但是,它们也有所不同。

例如应变,现有弹性理论中,应变是描述微线元伸缩变化的强度;而本书中,应变不仅是描述微线元伸缩变化的强度,而且也是描述微线元取向变化的强度。

又如弹性流变基本方程,现有弹性理论的基本方程只是本书的静力学弹性流变基本方程的零级近似。而且,在本书的弹性流变基本方程中,少不了弹性流变旋动方程和热变弹性本构方程,而现有弹性理论中,它们是找不到的。

又如应力解法,现有弹性理论表明,动力学弹性流变问题的应力解法是不可能的;而本书的弹性流变理论表明,动力学弹性流变问题的应力解法是可行的。

又如单元法,本书作者提出了公式分维法和单元整体化法,使单元法更加具有解析性,从而能够简便地编写程序,应用计算机进行数值近似计算。

又如例题,在本书中,例题是应用本书的弹性流变理论进行求解,以便与现有弹性理论的例题求解进行比较。

又如弹性波问题,本书弹性流变理论得出的纵波波速公式与现有弹性理论得出的纵波波速公式有所不同;而且,现有弹性理论表明,纵波波速总是比横波快,而本书弹性流变理论表明,纵波波速既可以比横波波速快,也可以比横波波速慢;此外,本书弹性流变理论还表明,波速还具有色散现象。

弹性流变分为有旋流变($\epsilon_{ij} \neq \epsilon_{ji}$ 或 $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$)和无旋流变($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ 或 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)。本书弹性流变理论表明,动力学弹性流变问题只能是有旋流变,不可能出现无旋流变;静力学弹性流变问题中,只有一级流变和二级流变(应力函数空间变化比较小的变形状态)才是无旋流变,而三级流变和三级流变以上的高级流变,也都是有旋流变。现有的弹性理论只是一种静力学无旋流变的弹性理论。

本书的弹性流变理论,可以推导出现有弹性理论的基本方程,现有弹性理论只是本书弹性流变理论的一个特殊部分,即静力学弹性流变的无旋流变部分。本书弹性流变理论表明,现有弹性理论(包括连续介质力学的各力学分支)只能运用于静力学弹性流变的无旋流变问题,或应力函数的空间变化率比较小的静力学弹性流变问题。现有弹性理论不仅不能套用动力学弹性流变问题,而且,也不能套用静力学弹性流变的有旋流变问题。

欢迎同行和前辈们对《弹性流变力学》一书进行指点、批评和讨论,以利于本学科的发展、进步。

南昌大学的龚仁山教授认真细致地审阅了《弹性流变力学》书稿。在这里,致以衷心感谢。由于作者水平有限,本书中不妥之处和错误地方在所难免,敬请读者批评指正。

作 者

二〇〇三年九月

目 录

第一章 全应变理论	(1)
1.1 弹性流变概述	(1)
1.2 流变位移	(1)
1.3 流变定理	(3)
1.4 流变等效定理	(5)
1.5 全应变和一点应变	(6)
1.6 弹性流变几何方程.....	(10)
1.7 一点应变状态方程.....	(12)
1.8 主应变和主切应变.....	(13)
1.9 一点应变状态圆.....	(18)
1.10 一点应变状态椭球	(19)
1.11 一点应变张量	(20)
第二章 全应力理论	(23)
2.1 流变内力.....	(23)
2.2 全应力和一点应力.....	(24)
2.3 一点应力状态方程.....	(26)
2.4 主应力和主切应力.....	(27)
2.5 一点应力状态圆.....	(32)
2.6 一点应力状态椭球.....	(34)
2.7 一点应力张量.....	(35)
第三章 弹性流变物理方程	(38)
3.1 弹性流变质量方程.....	(38)
3.2 弹性流变运动方程.....	(39)
3.3 弹性流变旋动方程.....	(44)
3.4 弹性流变能量方程.....	(48)
3.5 弹性流变热传导方程.....	(52)
3.6 弹性流变位移变分方程.....	(55)
3.7 弹性流变应力变分方程.....	(56)
第四章 弹性流变本构方程	(58)
4.1 弹性流变本构方程.....	(58)
4.2 应变式弹性本构方程.....	(61)
4.3 位移式弹性本构方程.....	(64)
4.4 应力式弹性本构方程.....	(65)
4.5 无旋式弹性本构方程.....	(66)
4.6 主轴式弹性本构方程.....	(67)
4.7 容变弹性本构方程.....	(67)

4.8	偏变弹性本构方程	(68)
4.9	热变弹性本构方程	(68)
4.10	隐热型弹性本构方程	(69)
4.11	应力主轴与应变主轴一致性	(71)
第五章	弹性流变协调方程	(72)
5.1	应变协调方程	(72)
5.2	应力协调方程	(74)
5.3	运动协调方程	(75)
5.4	隐热协调方程	(78)
第六章	弹性流变基本方程	(81)
6.1	动力学弹性流变基本方程	(81)
6.2	动力学一级流变基本方程	(83)
6.3	动力学二级流变基本方程	(84)
6.4	静力学弹性流变基本方程	(86)
6.5	静力学无旋流变基本方程	(86)
6.6	静力学有旋流变基本方程	(89)
6.7	初始条件和边界条件	(90)
6.8	弹性流变问题分类	(91)
6.9	弹性流变问题解法	(92)
6.10	动力学弹性流变问题位移解法	(93)
6.11	静力学弹性无旋流变问题位移解法	(94)
6.12	静力学弹性有旋流变问题位移解法	(96)
6.13	动力学弹性流变问题应力解法	(97)
6.14	静力学弹性无旋流变问题应力解法	(101)
6.15	静力学弹性有旋流变问题应力解法	(101)
第七章	弹性流变基本定理	(104)
7.1	弹性流变惟一性定理	(104)
7.2	弹性流变迭加定理	(106)
7.3	弹性流变互等定理	(108)
7.4	弹性流变位移变分定理	(110)
7.5	弹性流变应力变分定理	(112)
7.6	圣维南原理	(113)
第八章	静力学弹性流变直角坐标系平面问题	(115)
8.1	平面问题	(115)
8.2	平面问题弹性流变基本方程	(117)
8.3	弹性流变位移解法	(119)
8.4	端载荷悬臂梁弹性有旋流变位移解法	(122)
8.5	弹性无旋流变位移势解法	(126)
8.6	长散热片弹性无旋流变位移势解法	(128)

8.7	弹性流变应力解法	(130)
8.8	均布载荷简支梁弹性有旋流变应力解法	(132)
8.9	弹性无旋流变应力函数解法	(136)
8.10	弯矩矩形柱弹性无旋流变应力函数解法	(138)
8.11	弹性流变位移变分法解法	(140)
8.12	常体力矩形板弹性流变位移变分法解法	(140)
第九章	静力学弹性流变极坐标系平面问题	(143)
9.1	平面的坐标变换和应力变换	(143)
9.2	极坐标的弹性流变几何方程	(146)
9.3	极坐标的运动平衡方程和旋动平衡方程	(148)
9.4	极坐标的协调平衡方程和应力函数方程	(152)
9.5	极坐标的弹性流变基本方程	(153)
9.6	极坐标的应力函数解法	(154)
9.7	轴对称平面问题应力函数解法	(156)
9.8	均布压力厚壁圆筒应力函数解法	(157)
9.9	圆孔边缘应力集中	(159)
9.10	线均布面力的沉陷公式	(162)
9.11	带均布面力的沉陷公式	(165)
第十章	静力学弹性流变平面问题单元法	(168)
10.1	单元法概述	(168)
10.2	单元方程	(169)
10.3	单元载荷移置公式	(173)
10.4	结点力平衡方程	(175)
10.5	单元结点本构方程	(178)
10.6	整体化本构方程	(180)
10.7	整体结点本构方程	(182)
10.8	整理综合	(183)
10.9	单元法解题步骤	(184)
10.10	角压力方形板单元法解法	(186)
第十一章	静力学弹性流变空间问题	(193)
11.1	空间问题弹性流变基本方程	(193)
11.2	扭转圆柱体问题应力解法	(196)
11.3	均布载荷半空间体问题位移解法	(199)
11.4	集中载荷半空间体问题位移解法	(200)
第十二章	动力学弹性流变波问题	(203)
12.1	弹性流变波波动方程	(203)
12.2	热弹性流变波波动方程	(205)
12.3	边界条件	(207)
12.4	弹性流变波波动方程平面波解	(208)

12.5	弹性流变波波动方程球面波解.....	(210)
12.6	弹性流变波波动方程简谐平面波解.....	(211)
12.7	弹性流变波波强公式.....	(213)
12.8	弹性流变波的反射规律.....	(215)
12.9	弹性流变波的反射规律、折射规律	(219)
附录一	基本假设.....	(224)
附录二	字母约定.....	(225)
附录三	脚标约定.....	(227)
附录四	积分计算.....	(230)
附录五	系数关系.....	(238)
附录六	基本定理简介.....	(239)
附录七	基本方程简介.....	(242)
参考文献		(246)

第一章 全应变理论

1.1 弹性流变概述

假设:物体由无数均匀连续分布的质点(或微体元)组成,称为连续体,连续体依靠内力将无数的质点(或微体元)凝聚在一起,描述连续体的物理量是时间和空间的连续函数。

具有质量而无大小和形状的微小单元,称为质点,质点虽然是微小单元,但它仍然由无数的粒子(如分子、原子和电子等)组成,质点仍是个物理系统,给定时刻,质点具有确定的物理量(如质量密度和温度等)。当质点运动时,描述其运动的物理量是时间和空间的连续函数。

具有质量又有大小和形状的微小单元,称为微体元,其相应的体积,称为体元,相应的面元,称为微面元,相应的线元,称为微线元,微体元虽然是微小单元,但它仍然是由无数质点组成,微体元是个物理系统,其物理量的空间分布及随时间变化是连续的,可以用时间和空间的连续分布函数表示。

连续体与外界(环境)能够发生相互作用,相互作用的种类一般有:力作用、热作用和电磁作用(本书不讨论电磁作用),相互作用方式有:实体接触作用和场致作用等等。

无外界作用,或外界作用可以略去时,或连续体与外界处于平衡态时,连续体具有确定的大小和形状,具有确定的温度,连续体的这种状态,称为自然状态,或称平衡态。

外界作用时,连续体各质点会发生相对运动,导致连续体的大小和形状发生变化,使得连续体的内力和温度发生变化。连续体的内力变化,称为流变内力,温度变化称为热变,连续体的大小变化称为体变,形状变化称为形变,大小和形状都变化称为变形。连续体由于质点相对运动而发生变形,称为流变。

外界作用下,连续发生流变,出现变形和流变内力,当变形变化时,流变内力也随之变化,变形消失时,流变内力也随之消失,反之,当流变内力变化时,变形也随之变化,流变内力消失时,变形也随之消失。连续体(或材料)的这种属性,称为弹性,具有弹性的物体,称为弹性体,弹性体的流变,称为弹性流变。

研究弹性体弹性流变规律及其应用的科学,称为弹性流变理论(或弹性流变力学),它广泛应用于材料科学、地球物理科学、工程设计和工程建筑、机械设计和机械制造,它也是弹性波的发生和传播的理论基础。

1.2 流变位移

外界作用下,弹性体发生流变,弹性体的大小、形状和温度发生变化,弹性体内各质点发生相对运动,质点的位置发生变化。弹性体流变所发生的质点位置变化,称为流变位移,或称为变形位移,用 u 表示。在直角坐标系中,表示为

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 u_i e_i = u_i e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中: e_i 为坐标轴的单位矢, u_i 为流变位移分量; 下脚标 i 出现偶数次表示求和。(详见附录三, 脚标约定)

弹性体流变过程中, 同一时刻, 不同质点的流变位移一般不相同。不同时刻, 同一质点的流变位移一般也不相同。假设弹性体是个连续体, 则流变位移就是坐标 x_j 和时间 t 的连续函数, 表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(x_j, t) \quad (2)$$

$\mathbf{r}$ 为质点的矢径, 将 $\mathbf{u}$ 对时间取导数

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} \quad (3)$$

$\mathbf{v}$ 称为质点的流变速度, $\mathbf{a}$ 称为质点的流变加速度, 在直角坐标系中, 表示为

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{du_i}{dt} \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2 u_i}{dt^2} \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

其中

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \dot{u}_i, \quad a_i = \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{dv_i}{dt} = \ddot{u}_i = \dot{v}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

v_i 为流变速度分量; a_i 为流变加速度分量。

设连续体内任意取一微线元 $d\mathbf{r}$, 其坐标投影为 dx_j , 弹性体流变过程中, 微线元上各质点都出现流变位移。微线元发生变形, 设微线元的始点为 p , 其坐标为 x_j , 流变位移为 $u_i(x_j, t)$, 微线元末点为 g , 其坐标为 $(x_j + dx_j)$, 流变位移为 $u'_i(x_j + dx_j, t)$, 将 u'_i 按台劳级数展开, 表示为

$$u'_i = u_i + dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2!} \left(dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 u_i + \cdots + \frac{1}{n!} \left(dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n u_i + \cdots \quad (6)$$

$(n = 0, 1, 2, 3 \cdots \quad i, j = 1, 2, 3)$

可见, 微线元上各点的流变位移并不相同, 微线元变形成为弧线元, 若取一级近似, 并将其改写为

$$u'_i = u_i + dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (7)$$

$(i, j = 1, 2, 3)$

据刚体力学, 第一项为微线元的刚性平动位移, 第二项为微线元绕始点 p 的刚性转动位移, 最后一项只能是微线元变形运动的位移。可见, 微线元变形过程中, 既有刚性的平动和转动, 又有变形运动; 微线元末点的流变位移, 既有微线元刚性运动的位移, 又有微线元变形运动的位移。将式(6)改写为

$$u_r = u'_i - u_i = dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2!} \left(dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 u_i + \cdots + \frac{1}{n!} \left(dx_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^n u_i + \cdots \quad (8)$$

$(n = 0, 1, 2, 3 \cdots \quad i, j = 1, 2, 3)$

u_r 称为微线元的相对位移, 它是微线元末点与始点的流变位移之差。给定时刻, dx_j^n 的系数为确定值, 微线元的相对位移具有确定值。可见, 微线元的变形状态可以用微线元的相对位移来表征。

设 t 时刻, 微线元始点 p 移至 p' 点, 流变位移为 $\mathbf{u}$, 末点 g 移至 g' 点, 流变位移为 $\mathbf{u}'$, 如图(1-1)所示。联结 $p'g'$, 则得微线元 $d\mathbf{r}'$, 它可以看作 t 时刻的微线元, 微线元 $d\mathbf{r}$ 的相对位移为

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}' - \mathbf{u} \quad (9)$$

将 $\mathbf{u}_r$ 对时间取导数, 则得

$$\begin{cases} \mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{u}'}{dt} - \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i)\mathbf{e}_i \\ \mathbf{a}_r = \frac{d^2\mathbf{u}_r}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{u}'}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{a}' - \mathbf{a} = (\mathbf{a}'_i - \mathbf{a}_i)\mathbf{e}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

$\mathbf{v}_r$ 称为微线元的相对速度; $\mathbf{a}_r$ 称为微线元的相对加速度。

将微线元 $d\mathbf{r}'$ 平移, 使 p' 点与 p 点重合, g' 点移至 G 点, 如图(1-1)所示, 联结 gG , 则 gG 为 t 时刻微线元 $d\mathbf{r}$ 的相对位移 ($\mathbf{u}_r = gG$)。图示可见, 相对位移 $\mathbf{u}_r$ 反映微线元的变形状态, 它既反映微线元的伸缩变化, 同时又反映微线元的取向变化。

取自然坐标系 $p-n\tau$, 其坐标面为 $d\mathbf{r}$ 和 gG 决定的平面, 原点在 p 点, n 轴沿 $d\mathbf{r}$ 方向, τ 轴垂直于 $d\mathbf{r}$, 如图(1-1)所示, 将 $\mathbf{u}_r$ 分解为

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_\tau = u_n \mathbf{n} + u_\tau \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

$\mathbf{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为坐标轴的单位矢, u_n 称为微线元的正位移, 它

反映微线元的伸缩变化, u_τ 称为微线元的切位移, 它反映微线元的取向变化。

取直角坐标系 $O-x_i$, 微线元的相对位移 $\mathbf{u}_r$ 可以分解为

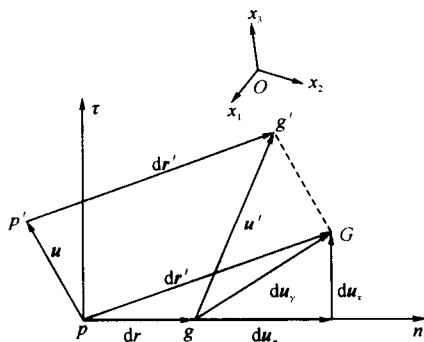
$$\mathbf{u}_r = u_{ir} \mathbf{e}_i \quad (u_{ir} = u'_i - u_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

u_{ir} 为微线元的相对位移分量。

设弹性体既有外力作用又有传热作用, 则微线元既有外力引起的相对位移 $\mathbf{u}'_r$, 又有传热引起的相对位移 $\mathbf{u}''_r$, 微线元的相对位移为

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}'_r + \mathbf{u}''_r \quad (13)$$

$\mathbf{u}'_r$ 称为微线元的力致相对位移; $\mathbf{u}''_r$ 称为微线元的热致相对位移。



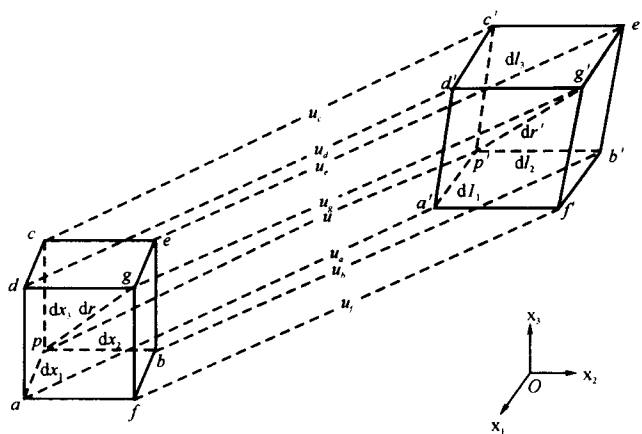
图(1-1)

1.3 流变定理

连续体内任意取一正微体元 $p-abc$ 。其相邻三边与坐标轴平行。三边长为 dx_j 。如图(1-2)所示, 设 t 时刻, p 点移到 p' 点。端点 $abc \cdots$ 分别移到 $a'b'c' \cdots$, 联结 $p'a', p'b', p'c' \cdots$, 则得微体元 $p'-a'b'c'$, 它可以看作 t 时刻微体元的流变状态, 设其相邻三边为 dl_j 。

设 p 点坐标为 x_j , 流变位移为 $\mathbf{u}(x_j, t)$ 。正微体元各端点的流变位移可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_a(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_b = \mathbf{u}_b(x_1, x_2 + dx_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c(x_1, x_2, x_3 + dx_3, t) \\ \mathbf{u}_d = \mathbf{u}_d(x_1 + dx_1, x_2, x_3 + dx_3, t) \\ \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(x_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) \\ \mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3, t) \\ \mathbf{u}_g = \mathbf{u}_g(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) \end{cases}$$



图(1-2)

将各端点的流变位移按台劳级数展开,略去耦合项,表示为

$$\begin{cases}
 u_a = u + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \cdots \\
 u_b = u + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n} dx_2^n + \cdots \\
 u_c = u + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_3^n} dx_3^n + \cdots \\
 u_d = u + (dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3})u + \cdots + \frac{1}{n!} (dx_1^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + dx_3^n \frac{\partial^n}{\partial x_3^n})u + \cdots \\
 u_e = u + (dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3})u + \cdots + \frac{1}{n!} (dx_2^n \frac{\partial^n}{\partial x_2^n} + dx_3^n \frac{\partial^n}{\partial x_3^n})u + \cdots \\
 u_f = u + (dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2})u + \cdots + \frac{1}{n!} (dx_1^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + dx_2^n \frac{\partial^n}{\partial x_2^n})u + \cdots \\
 u_g = u + (dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3})u + \cdots + \frac{1}{n!} (dx_1^n \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + dx_2^n \frac{\partial^n}{\partial x_2^n} + dx_3^n \frac{\partial^n}{\partial x_3^n})u + \cdots
 \end{cases} \quad (1)$$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

据矢量运算的三角形法则,并利用上式,则变形的微体元的各边长可表示为

$$\begin{cases}
 dl_1 = p'a' = dx_1 + u_a - u = dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \cdots \\
 dl_2 = p'b' = dx_2 + u_b - u = dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n} dx_2^n + \cdots \\
 dl_3 = p'c' = dx_3 + u_c - u = dx_3 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_3^n} dx_3^n + \cdots \\
 c'd' = dx_1 + u_d - u_c = dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \cdots \\
 e'g' = dx_1 + u_g - u_e = dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \cdots \\
 b'f' = dx_1 + u_f - u_b = dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \cdots
 \end{cases} \quad (2)$$

由上式可得：

$$dl_1 = c'd' = e'g' = b'f' \quad (3)$$

利用式(2)，相邻两边的点乘可以表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} dl_1 \cdot dl_2 = (dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \dots) \\ \quad (dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n} dx_2^n + \dots) \neq 0 \\ dl_2 \cdot dl_3 = (dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n} dx_2^n + \dots) \\ \quad (dx_3 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_3^n} dx_3^n + \dots) \neq 0 \\ dl_3 \cdot dl_1 = (dx_3 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_3^n} dx_3^n + \dots) \\ \quad (dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} dx_1^n + \dots) \neq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

可见，微体元 $p'-a'b'c'$ 中， dl_i 相对应边不仅相互平行，边长相等，而且相邻三边相互不垂直。因而，变形的微面元是平行四边形，变形的微体元是斜微体元。

任何材料、任何结构体、任何时刻发生流变时，正微面元流变成为平行四边形，正微体元流变成为斜微体元，微体元的流变状态由其相邻三边的流变状态确定，微体元的流变状态由其相邻三个微面元的流变状态确定，称为流变定理。

1.4 流变等效定理

设连续体内任意取一正微体元 $p-abc$ ，其相邻三边与坐标轴平行，三边长为 dx_i ，正微体元的对角线为 $dr (dr = pg)$ ，如图(1-2)所示，据矢量合成定则，则

$$dr = dx_1 + dx_2 + dx_3 \quad (1)$$

连续体流变过程中，微体元相应地发生流变。据流变定理，正微体元 $p-abc$ 流变成为斜微体元 $p'-a'b'c'$ ，其相邻三边为 dl_i ，对角线为 $dr' (dr' = p'g')$ ，如图(1-2)所示，据矢量合成定则，则

$$dr' = dl_1 + dl_2 + dl_3 \quad (2)$$

设正微体元对角线 dr 的相对位移为 u_r ，据矢量合成定则，则

$$dr' = dr + u_r \quad (3)$$

设正微体相邻三边 dx_i 的相对位移分别为 u_1, u_2 和 u_3 ，据矢量合成定则，则

$$dl_1 = dx_1 + u_1 \quad dl_2 = dx_2 + u_2 \quad dl_3 = dx_3 + u_3 \quad (4)$$

上式代入式(2)，并利用式(1)，则得

$$dr' = dr + u_1 + u_2 + u_3 \quad (5)$$

上式与式(3)比较，可得

$$u_r = u_1 + u_2 + u_3 \quad (1-4-1)$$

上式称为流变等效定理，它表明：连续体流变过程中，微体元对角线的相对位移，等于微体元相邻三边的相对位移之矢量和。或说，连续体流变过程中，微线元的相对位移等于微线元三个投

影边的相对位移之矢量和。

设直角坐标系中, u_r 的三个分量为 u_x, u_y 的三个分量为 u_{ij} , 则

$$u_r = u_x e_i \quad u_j = u_{ij} e_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

将上式代入式(1-4-1), 则得:

$$u_r = u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-4-2)$$

上式为流变等效定理的分量表示式, 它表明, 连续体流变过程中, 沿任一坐标轴上, 微体元对角的相对位移分量, 等于微体元相邻三边的相对位移分量的代数和。或说, 连续体流变过程中, 沿任一坐标轴上, 微线元的相对位移分量, 等于微线元三个投影边的相对位移分量之代数和。

1.5 全应变和一点应变

连续体流变过程中, 微线元相应地发生流变, 微线元的相对位移虽然可以反映微线元的流变状态, 但是, 由于相对位移与微线元的长度有关, 所以, 相对位移还不能反映微线元上各点的流变状态。

一、全应变

设连续体内任意取一点 p , 过 p 点引一有向线元 Δr , 其取向为 n , 长度为 Δr , 线元的相对位移为 Δu_r , 作 Δu_r 与 Δr 之比, 并取极限, 表示为

$$\epsilon_r = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_r}{\Delta r} = \frac{du_r}{dr} \quad (1-5-1)$$

ϵ_r 称为全应变(或称应变), 它表示微线元 p 点的单位长度的相对位移, 它反映微线元 p 点的流变强度, 它描述微线元 p 点的流变状态, 它既描述微线元 p 点的伸缩状态(或伸缩强度), 同时又描述微线元 p 点的取向状态(或取向强度)。

设连续体既受外力作用, 同时又受传热作用, 则全应变可以表示为

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{du'_r}{dr} + \frac{du''_r}{dr} = \epsilon'_r + \epsilon''_r \quad (1)$$

其中

$$\epsilon'_r = \frac{du'_r}{dr} \quad \epsilon''_r = \frac{du''_r}{dr} \quad (2)$$

ϵ'_r 为外力作用引起的全应变, 称为力致全应变; ϵ''_r 为传热作用引起的全应变, 称为热致全应变。

自然坐标系 $o-n\tau$ 中, 全应变可以分解为

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{du_n}{dr} n + \frac{du_\tau}{dr} \tau = \epsilon_n n + \epsilon_\tau \tau \quad (3)$$

其中

$$\epsilon_n = \frac{du_n}{dr} \quad \epsilon_\tau = \frac{du_\tau}{dr} = \tan \varphi \quad (4)$$

ϵ_n 称为正应变, 它描述微线元 p 点的伸缩状态(或伸缩强度); ϵ_τ 称为切应变, 它描述微线元 p 点的取向状态(或取向强度); φ 称为偏转角, 它表示微线元 p 点的取向偏转的角度。将 $\tan \varphi$ 按级数展开, 表示为

$$\epsilon_r = \tan \varphi = \varphi + \frac{1}{3} \varphi^2 + \dots \quad (5)$$

当偏转角较小时,取一级近似,则

$$\epsilon_r = \tan \varphi \approx \varphi \quad (6)$$

可见,一级近似下,切应变等于偏转角。

直角坐标系 $O-x_i$ 中,全应变可以分解为

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{du_{ir}}{dr} e_i = \epsilon_{ir} e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

其中

$$\epsilon_{ir} = \frac{du_{ir}}{dr} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

ϵ_{ir} 称为全应变分量。

二、一点应变

连续体内任意取一点 p , 过 p 点引一正微体元, 其相邻三边与坐标轴平行, 三边长为 dx_i , 如图(1-3)所示, 连续体流变过程中, 微体元相应地发生流变, 据流变定理, 微体元的流变状态由其相邻三边的流变状态确定。下面讨论正微体元相邻三边的流变状态。

设微线元 dx_1 的相对位移为 du_1 ($du_1 = du_{i1} e_i$), 则 dx_1 顶点 P 的全应变为

$$\epsilon_1 = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{du_{i1}}{dx_1} e_i = \epsilon_{i1} e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

其中

$$\epsilon_{i1} = \frac{du_{i1}}{dx_1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

ϵ_{i1} 为 dx_1 顶点 p 的全应变分量, 其中 ϵ_{11} 为正应变分量; ϵ_{21} 和 ϵ_{31} 为切应变分量, 它们分别为

$$\epsilon_{11} = \frac{du_{11}}{dx_1} \quad \epsilon_{21} = \frac{du_{21}}{dx_1} = \tan \varphi_{21} \quad \epsilon_{31} = \frac{du_{31}}{dx_1} = \tan \varphi_{31} \quad (11)$$

设微线元 dx_2 的相对位移为 du_2 ($du_2 = du_{i2} e_i$), 则 dx_2 顶点 p 的全应变为

$$\epsilon_2 = \frac{du_2}{dx_2} = \frac{du_{i2}}{dx_2} e_i = \epsilon_{i2} e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

其中

$$\epsilon_{i2} = \frac{du_{i2}}{dx_2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

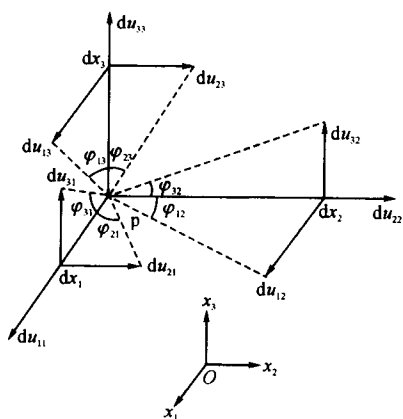
ϵ_{i2} 为 dx_2 顶点 p 的全应变分量, 其中 ϵ_{22} 为正应变分量; ϵ_{12} 和 ϵ_{32} 为切应变分量, 它们分别为

$$\epsilon_{22} = \frac{du_{22}}{dx_2} \quad \epsilon_{12} = \frac{du_{12}}{dx_2} = \tan \varphi_{12} \quad \epsilon_{32} = \frac{du_{32}}{dx_2} = \tan \varphi_{32} \quad (14)$$

设微线元 dx_3 的相对位移为 du_3 ($du_3 = du_{i3} e_i$), 则 dx_3 顶点 P 的全应变为

$$\epsilon_3 = \frac{du_3}{dx_3} = \frac{du_{i3}}{dx_3} e_i = \epsilon_{i3} e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

其中



图(1-3)