

PAIDUI HE BIANZU DE AOMIAO
—— TANTAN PAILIE HE ZUHE



排队和编组的奥妙 ——谈谈排列和组合

上海教育出版社



张为人 沈石山

排队和编组的奥妙

——~~论~~排列和组合

上海教育出版社

内 容 提 要

排列、组合是一个很重要的数学方法。通俗地说，这种方法就是研究在按某一规则做某件事时，一共有多少种不同的作法。本书生动而简单地介绍了有关排列和组合的最基本的知识，小学高年级学生就能阅读。

排队和编组的奥妙

——谈谈排列和组合

张为人 沈石山

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1.875 字数 29,000

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数 1—18,300本

统一书号：7150·3319 定价：0.21元

目 录

一、 有几种走法——乘法原理	1
1. 围棋布局问题	1
2. 想问题要有条理	4
3. 哪条路最近	8
4. 和昨天的不一样	11
5. 找出规律	13
二、 按一定顺序排队——排列问题	18
1. 用数字卡片组成数	18
2. 选班长有几种可能结果	22
3. 准备几种飞机票	24
4. 排列种数的计算	28
5. 全部元素都取出来	33
三、 都是一家人，别再分先后——组合问题	37
1. 一个新的问题	37
2. 组合种数的计算	41
3. 意外的发现	45

四、学无止境,继续向前	49
1. 排列、组合不灵了?	49
2. 有重复排列种数的计算	50
3. 继续前进	54



有几种走法

——乘法原理

1. 围棋布局问题



这里是新建的居民住宅区，一幢幢楼房四周种着花草树木。住宅区中心有个小小的花园，草地、小湖、假山、亭子，人们经常来这里学习、休息。

在一张石桌边，一群孩子正围住一位花白胡子的老人。他就是大家所熟悉的“数学老人”。孩子们七嘴八舌地嚷嚷要老爷爷讲故事。只听见数学老人笑呵呵

地说：

“好！我给你们讲一个古老的围棋布局问题吧！围棋创始于我国，后来传至国外。很久很久以前，有个父亲和儿子下围棋。忽然儿子提出一个问题：围棋棋盘上纵横各 19 道等距离的平行线互相交叉，构成 361 个交叉点。用黑、白共 361 个子儿，在它上面能摆出多少种不同的布局呢？这一问可把父亲给难倒了。他左思右想，总讲不出个数儿来。父亲没办法了，只好去问爷爷。可是爷爷捋着白花花的胡须，哼哼哈哈，太阳都快下山了，也没说出个数儿来。于是这个问题就这样一代一代给传了下来。”

说到这儿，数学老人忽然住了口，看着大家。只见一个胖墩墩的男孩耐不住了：“老爷爷，后来怎么样了？”

“小嘉，你先想想。”数学老人慈爱地一边摸着小嘉胖乎乎的脸，一边指着两个方木盒里的黑、白子儿和刻在石桌上的棋盘。小嘉一见棋子可来了劲，原来他还是个小围棋迷呢！

“老爷爷，这也不难呀！我放一个黑子在星位，就是一种布局；下一步白子来个小飞挂，又是一种布局；再将黑子、白子对调一下位置，又成了一种布局；……”

“不错，现在你已摆出了三种布局，第四种、第五种呢？”数学老人眯着眼睛笑嘻嘻地点了点头，象是鼓励，

又象是在考验他。小嘉是个急性子，挺憨厚，一个劲儿地往下摆弄着子儿。一会儿棋盘上就摆上了十多个子儿，而数学老人呢，只管记数儿。“嗯，现在已摆到二十一种啦，还有吗？”等摆到四十种布局的时候，小嘉有点犯疑了，正在举棋不定的时候，一直紧挨着他的小澄开口了。

“小嘉，这样不行！你已经摆过的布局都满四十种了，这四十种你能全记住吗？保证与后面摆出的布局不重复吗？何况棋盘上可放 361 个子儿，得摆到什么时候才算完呢？”

数学老人赞许地点了点头说：“小澄，你说得好。要回答这道题，不能用数数儿的办法，得从中找出规律性的东西来。好比团体广播操，问你有多少人参加，难道你也一个一个去数吗？得花多少时间啊！其实只要将每一行人数乘上总的行数就可以了。这个乘法就是解这个题的规律。可见会不会从已知的条件中找出规律性的东西，是学好数学的一个关键。当然我们这道围棋布局问题比较复杂，表面上看来毫无规律，白子、黑子都可随意乱放，实际上它是有规律的。”

“那您给我们说说吧！”小嘉又耐不住了。

“哦，不到时候啊！你们还有许多东西没学呢！”

“那您先告诉我们答案吧！”几个小朋友齐声说。

“听着，在一张围棋棋盘上，共可能摆出 3^{361} 种不

同的布局。 3^{361} 就是 361 个 3 连乘, 相当于 10^{172} , 即 1 后面画上 172 个零。这是个多么大的数啊! 要是你一秒钟能数 300 个数, 那么一年还数不到一百亿个, 就算数到一百亿个吧! 一百年也不过一万亿, 与 10^{172} 还差得远呢!”

“啊!” 小朋友都伸长了舌头叫了起来。小嘉却为刚才的鲁莽而脸红了。但他已暗暗下了决心, 一定要把这个问题弄懂。小澄呢? 她也被这个问题迷住了, 决心要跟数学老人学好数学。

2. 想问题要有条理

第二天放学后, 小澄和小嘉急急忙忙来找数学老人。

“啊, 是小澄、小嘉。你们是为了围棋布局问题来的吧! 要彻底弄清这个问题, 得学点准备知识才行。” 数学老人高兴地笑着说。

“学什么呢?” 小嘉、小澄齐声问。

“不忙, 得一步步地学。” 说着, 老人拿出一张纸, 上面画着下面的图, 说:



“你们看，这儿是我们住的新村。由新村往东走，便是小庄和龙镇。新村和小庄中间有两条线，代表2条路；小庄和龙镇中间有3条路。为了区别，每条路都标上了号码。请你们想一想，从新村到龙镇有几种可供选择的走法呢？”

数学老人刚讲完，小嘉就接着说：“这个问题不复杂。我来算： $① \rightarrow ③$ 是一种走法， $② \rightarrow ④$ 也是一种走法，还有 $① \rightarrow ⑤$ ， $② \rightarrow ③$ ， $① \rightarrow ④$ ， $② \rightarrow ⑤$ ，共有6种走法。”

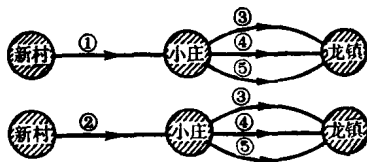
数学老人说：“你算的结果是正确的，但这样算有什么问题呢？”

小澄想了想说：“这样算太乱了，如果路线较多，就容易遗漏或重复计算，应该有次序地进行。例如先算走路线①的情况，就有 $① \rightarrow ③$ ， $① \rightarrow ④$ ， $① \rightarrow ⑤$ 3种可能的走法；再算走路线②的情况，有 $② \rightarrow ③$ ， $② \rightarrow ④$ ， $② \rightarrow ⑤$ ，也是3种可能走法，所以一共是6种可能的走法。”

数学老人赞许地说：“好！这样计算就不会遗漏或重复。小嘉，你认为怎样？”小嘉点头称是。“那么有没有更简便的方法呢？”数学老人又问。

两个孩子楞住了，他们都静静地思考着。不一会小澄开口了：“喔，因为从新村到小庄有2种走法，而小庄到龙镇有3种走法，所以从新村到龙镇共有 $2 \times 3 = 6$ 种走法。”小澄一边说，一边把上面的图画成了下面的

两张图。



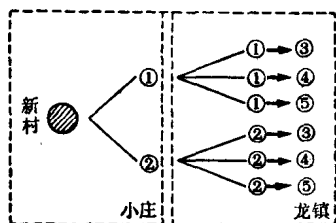
数学老人笑了：“小澄，你算得很好。因为从新村到小庄每取1种走法，后面小庄到龙镇就有3种不同的路线可供选择，现在从新村到小庄有2种走法，所以共有 $2 \times 3 = 6$ 种走法。这两种算法都对，但后面的算法更简洁，更合理些。如果可供选择的路线比较多，那么这种算法的优点就更明显了。譬如从新村到小庄有50条路可走，从小庄到龙镇有100条路可走。按前面的方法计算就麻烦了，但按后面的方法呢？”数学老人把期待的眼光投向了小嘉。小嘉领悟地说：

“我懂了，从新村到小庄每取一种走法，从小庄到龙镇就有100种走法可供选择，现在从新村到小庄有50条路，所以从新村到龙镇就有 $50 \times 100 = 5000$ 种走法。”

数学老人笑呵呵地赞许说：“真是聪明的孩子。从这里可以看出，这类问题，除了要有条理、有次序地计算，以保证得数不遗漏、不重复外，还要从中寻找某些规律，使计算既简便又正确。

象上面的那种线条图叫‘有向图’。这种图的特点

是只能沿一个方向前进，不能倒退。它的优点是比较形象直观，能帮助我们分析问题。这种图还可画成如右的形式，叫做‘树图’，因为它的结构有点象‘树’。用这图，把从新村经过小庄到龙镇的每一种可能的走法，清清楚楚地表示出来了。



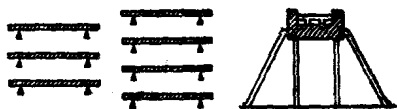
好！今天就讲到这里。下面两道习题请你们练习。”

练 习

1. 玉屏山上有棵神奇的树，它结的果会闪闪发光，人们叫它仙人果。有个名叫小丰的孩子，每天到天池中了取了水去浇这棵树。从他家住的山峰到天池有4条路可走，从天池到仙人果树有2条路可走（下图）。从小丰家到仙人果树，有几种可供选择的走法？



2. 儿童公园里的滑梯前面有两排独木桥，前排3架，后排4架（见图）。小朋友玩滑梯必须先过前后两架独木桥。问有几种可供选择的走法。



3. 哪条路最近

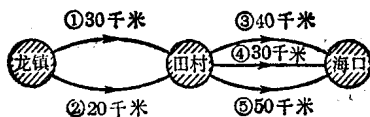
朦胧的夜色，悄悄地遮住了新村。数学老人屋里却灯火明亮，小澄、小嘉正听着数学老人讲故事出了神。

“抗日战争时，新村还是农村，就在咱新村东边那个龙镇上，有个民兵连部。当时镇上一个被监视的汉奸突然骑车往田村方向潜逃了，据侦察，他准备从海口乘船外逃。民兵们研究，龙镇有2条路通往田村，而田村到海口有3条路可走。为了抓住这个汉奸，必须把他各种可能的潜逃路线都估计出来。”数学老人说到这里突然停住，把期待的眼光投向了小嘉和小澄。机灵的小嘉又抢先开了腔：“他有 $2 \times 3 = 6$ 种走法。”

“是啊！”数学老人说，“但据情报分析，这个汉奸必须赶在天亮前逃出海口，因此估计他一定会选择一条最近的路逃跑，所以我们不必平均分配兵力，而把主

要兵力放到最近的一条路上。然而哪一条是最近的路呢？”

数学老人把一张有向图推到了桌上，只见图上标着各条小路的路程。



小澄看着地图认真思索着，小嘉的嗓门又响了：

“老爷爷，我把6条路的路程都算出来，划成表格再比较一下，不就可以了吗？”说着，他列出了下面的表格。

小嘉高兴地说：“画张表格多清楚，一眼就能看出②→④这条路最短。”等了片刻，小澄才说：“我还有一种算法，为了走最近的路到达海口，他必定要在龙镇到田村和田村到海口中都选一条最近的路。”

路 线	千 米
① → ③	$30+40=70$
① → ④	$30+30=60$
① → ⑤	$30+50=80$
② → ③	$20+40=60$
② → ④	$20+30=50$
② → ⑤	$20+50=70$

“说得好！继续讲下去。”老爷爷鼓励地说。

“从田村到海口的3条路中，第④条最短；龙镇

到田村第②条路最短。因此从龙镇到海口最近的路是②→④，我们的主要兵力就该埋伏在这一条路上。”小澄说得有条有理，简直象个指挥官了。

数学老人摸着小澄的头乐呵呵地说：“你讲得很好。照小嘉的算法，要做6次加法，还要比较得数的大小。而小澄的方法，只要经过几次比较就可以了。这里也要动脑筋呀！”

小嘉信服地点点头。忽然想起了什么，便问：“那个汉奸抓到了吗？”

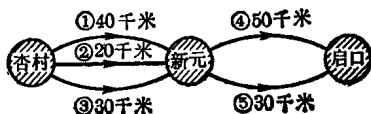
“抓到了。他刚出田村，踏上第④条路，就被民兵逮住了。”

“数学还能抓汉奸啊！”小嘉自言自语地说。

“是啊，它的用处可大着呢。这类问题还可深入研究，明天再讲吧！”

练 习

3. 某部队接到命令，必须以最快的速度，从杏村经新元赶到启口执行任务。从杏村到启口的有向图如下。你认为该走哪一条路？



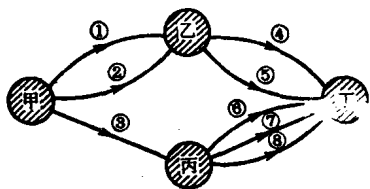
4. 和昨天的不一样

放学了，小嘉、小澄连家也不回，就背着书包来找数学老人了。

“老爷爷，你说这类问题还可以深入研究，请你给讲讲好吗？”这回是小澄先张口了。

“嗯，看这里。”数学老人拿出一张纸来，上面画着

右面的图。小嘉和小澄心中明白准是算算从甲地到丁地有几种走法。两人拿出笔就算了起来。小嘉想：今天我可



别象昨晚那样算得太繁了，该动动脑筋用简单明了的方法。小澄只是想：这道题和昨天的很相象，但实际上是有区别的，可区别在哪儿呢？正想着，忽地小嘉跳了起来，拉着数学老人急急地说：“老爷爷，听我说，甲地到乙地和丙地共有 3 条路可走，而从乙地或丙地出发到丁地共有 5 条路，那么从甲地到丁地共有 $3 \times 5 = 15$ 条路可走。这不是和昨天的题目一样吗？”

数学老人捋着胡子，笑了笑反问道：“为什么和昨天的一个样呢？小澄你说说，他讲得对吗？”

小澄仰起脸，摇了摇头说：“不对。开始我也这么

想,以为和昨天的题目一样,其实它们是有区别的。甲地和丁地间不是只有乙地,而是多了一个丙地,而且乙地和丙地是互不相通的。因此甲→乙→丁和甲→丙→丁实际上是互不相关的两部分。”

“说得好!”数学老人高声地赞扬说:“那么究竟该怎么算呢?”

“应该这样算。从甲到乙有 2 条路,乙到丁也有 2 条路,因此从甲经过乙到丁共有 $2 \times 2 = 4$ 种走法,这部分和昨天一样。再看下半部分,从甲到丙只有 1 条路,而丙到丁有 3 条路,因为丙和乙是不通的,所以从甲经过丙到丁有 $1 \times 3 = 3$ 种走法。因此,从甲到丁所有可能的走法,只要将这两部分的数目加起来就行了,即 $4 + 3 = 7$ 种走法,而不是小嘉说的 15 种走法。”

数学老人点了点头说:“小澄讲得很有条理。这题关键在于从乙到丁只能走④、⑤ 2 条路,而从丙到丁只能走⑥、⑦、⑧ 3 条路,因为乙和丙是不通的。要是通了呢?”数学老人随手在乙地和丙地中间画了一根线,如下图:

