日本新高中数学研究丛书13

新符号问题与整数问题

[日] 占部实 著

姚玉强 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 13

新符号问题与整数问题

[日] 占部实 著
姚玉强 译

文化教育出版社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括了一些较新的内容.

本册内容分为两大部分：新符号问题和整数问题. 新符号问题部分，主要内容有关于论证、集合、整数和新符号等；整数问题部分，主要内容有约数、倍数、p进制、方程的整数解、不等式的整数解、集合与整数等. 叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 13
新符号问题与整数问题
[日] 占部实 著
姚玉强 译
*
文化教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 5.5 字数 110,000
1985 年 4 月第 1 版 1987 年 3 月第 1 次印刷
印数 1— 3,000
书号 7057·084 定价 0.82 元

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册，本册是第十三册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点比教材内容，广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理、归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究，可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳教育学院数学系等单位合译的．本册由沈阳市教育学院姚玉强同志译出，在译出中该院数学系主任张运钧同志在一些问题上曾给予以指导．最后，由我院教研部数学教研室钱永耀、刘占光同志负责审校工作．

由于时间仓促及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1982 年 12 月

前　　言

现在的数学正从“计算数学”向“思维数学”演变着．其表现之一，即在这次修订教学大纲中，需要复杂计算的问题被大幅度地删掉或减少了，代之以集合、演算和公理系统等需要思考的因素被提到更加重要的地位．

过去，在大学入学试题中，出了大量在教科书中几乎完全没有注意到的新符号问题或整数问题，可以预想，今后这种倾向将不断发展．然而，在实际大学入学考试时，被这类问题所困惑不解的学生又是何等之多．

本书，对于这类新符号问题或整数问题，以数学 I、数学 IIB 为中心，有时加上数学 III，进行广泛的处理．对于这些问题基本上忠实地遵循既使对于预备知识很少的人，也能确切理解，并能指导其应用，这是本书的最大特点．

如同本丛书的所有各册一样，本书也是以

比较广泛，比较深入，比较易懂

为着眼点，对于不擅长数学的人使其容易理解；对于擅长数学的人启发其更加爱好而编写的．即通过

解说——→例题——→发展题——→练习题——→习题

的反复学习，在不知不觉中增强实力．特别地，本书在培养“思维”数学能力的意义上，无疑是最好的参考书．

最后，当本书出版之际，对于中野章先生给予的大力帮助，在此深致谢忱．

著　　者

1974 年秋

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书，它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人更加爱好。为此，本书编排有如下特点：

划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然，在解说时既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂.

还有，用竖线把版面分成两部分，在页边列出重要项目，以便提高学习效率.

例题——→发展题——→练习题

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，**反复学习**例题、发展题和练习题，使在**不知不觉中增强解决问题的实际能力**. 虽然从例题到发展题依次提高难度，但在**解法和解法程序中**，指出了思考方法和解法要点，因此希望读者要反复学习，使对这两种问题达到几乎能够背诵的程度. 总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法.

为此，建议读者要反复进行学习. 如果对前二者都能完全理解，那么做练习题时就不会感到困难. 反之，如果不大会做练习题，那就应该认为学习的还不够深刻.

习题

分 A, B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题, B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中, 这种程度的问题出的最多, 所以, 对于准备高考的读者, 这是不可缺少的习题集.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指死记硬背. 本书不提倡单纯的机械记忆, 而是提倡适当地指导数学是"怎样进行思考的", 然后才要求记忆应用范围较广泛的知识. 确信本书的读者, 能真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际能力.

目　录

新符号问题

整 数 问 题

1. 关于论证部分(1)(有关代数的论证)

归纳　演绎

从大量的经验或实验结果出发，推出具有一般性的共同法则的思考方法，叫做**归纳**.反过来，从已知结论出发，根据逻辑推理得出其他法则的方法，叫做**演绎**.

公理　公理系统　体系

数学是纯属演绎的科学.在数学理论中，作为推论的原始依据的基本命题，叫做**公理**.从一些公理推导出一种数学理论，这些公理叫做**公理系统**. 根据公理系统的组成方法不同，而产生不同的理论**体系**. 如果这些体系不存在矛盾，便认为是抛开现象而成立的一种数学理论，这就是现代数学的思考方法.到现在已经导出了各种不同的公式并利用它们，然而它的原始依据——公理——是什么呢？

计算的基础

I. 等号的性质

(1) $A=A$.

(2) 如果 $A=B$，那么 $B=A$.

(3) 如果 $A=B$，$B=C$，那么 $A=C$.

II. 运算的基本性质

(1) $A+B=B+A$.

$$AB=BA. \qquad \text{(交换律)}$$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

$$(AB)C=A(BC). \qquad \text{(结合律)}$$

(3) $A(B+C)=AB+BC$. (分配律)

III. 等式的基本性质

(1) 如果 $A=B$,那么 $A+C=B+C$.

(2) 如果 $A=B$,那么 $AC=BC$

等,都可做为公理被采用,这些公理是我们日常处理数的性质或明确规定相等意义的依据.

应用**I**,**II**,**III**,试证明:

"如果$A=B$,$C=D$,那么$A+C=B+D$."

全等"≡"

与等号有同样性质关系的还有**全等**"≡".若用F、G、H表示图形,则

(1) $F\equiv F$.

(2) 如果 $F\equiv G$,那么 $G\equiv F$.

(3) 如果$F\equiv G$,$G\equiv H$,那么 $F\equiv H$.

相似"∽"

关于**相似**"∽"也有上述同样关系成立.

(1) $F\backsim F$.

(2) 如果 $F\backsim G$,那么 $G\backsim F$.

(3) 如果 $F\backsim G$,$G\backsim H$,那么$F\backsim H$.

等价律

以上所用符号=,≡,∽等,若使用符号~代替,则以上关系可统一成为下面的形式:

(1) $A\sim A$. (自反律)

(2) 如果 $A \sim B$,那么 $B \sim A$.(对称律)

(3) 如果 $A \sim B, B \sim C$,那么 $A \sim C$.

(传递律)

把这三个法则统称为等价律.

数的扩张

对于实数,上述性质 I, II, III 都成立.以此为基础,关于复数 $X=a+bi, Y=c+di$ 的相等、和与积的定义为

(1) 仅当 $a=c, b=d$ 时, $X=Y$;

(2) $X+Y=(a+c)+(b+d)i$;

(3) $XY=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

可以证明,对于复数,性质 I, II, III 也都成立.

$XY=YX$ 的证明:

由复数积的定义(3),有

$XY=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

$YX=(ca-db)+(cb+da)i$.

可是,因为关于实数 I, II, III 成立,所以

$ac-bd=ca-db, ad+bc=cb+da$.

因此,由复数相等定义(1),得

$$XY=YX.$$

可以证明其他基本性质也全都成立.

例题 1 对于两个实数 a, b, 施行某种运算的结果记作 $a \circ b$. 就这种运算,对于任意实数 a, b, 若 $a \circ b = b \circ a$ 时,

则叫做交换律成立，若$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$时，则叫做结合律成立. 若把运算 $a\circ b$作如下规定时，试分别考察对于交换律、结合律是否成立:

(1) $a\circ b=a-b$. (2) $a\circ b=2(a+b)$.

(3) $a\circ b=a$. (4) $a\circ b=2^a\cdot 2^b$.

解法 根据定义仔细计算是重要的. 例如，在考察交换律时，分别计算 $a\circ b$和 $b\circ a$，看其结果是否相等. 所谓"**成立**"就是"**对于任意实数成立**"，因此叫做"**恒成立**".

解 (1) $a\circ b=a-b$, $b\circ a=b-a$.

一般地，因为 $a-b\neq b-a$，所以 $a\circ b\neq b\circ a$.

又
$$(a\circ b)\circ c=(a-b)-c=a-b-c,$$
$$a\circ(b\circ c)=a-(b-c)=a-b+c.$$

一般地，因为 $a-b-c\neq a-b+c$，所以$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$.

故对于交换律，结合律都不成立.

(2) $\because$ $a\circ b=2(a+b)$, $b\circ a=2(b+a)=2(a+b)$,

$\therefore$ $$a\circ b=b\circ a.$$

又 $(a\circ b)\circ c=2(a+b)\circ c=2[2(a+b)+c]=4a+4b+2c$,

$a\circ(b\circ c)=a\circ 2(b+c)=2[a+2(b+c)]=2a+4b+4c$.

一般地，$4a+4b+2c\neq 2a+4b+4c$, $\therefore (a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$.

故对于交换律成立，但对于结合律不成立.

(3) $a\circ b=a$, $b\circ a=b$.

一般地，$\because$ $a\neq b$, $\therefore$ $a\circ b\neq b\circ a$.

又 $(a\circ b)\circ c=a\circ c=a$, $a\circ(b\circ c)=a\circ b=a$,

$$\therefore \qquad (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c).$$

故对于交换律不成立,但对于结合律成立.

(4) $\because \quad a\circ b=2^a\cdot 2^b=2^{a+b},\ b\circ a=2^b\cdot 2^a=2^{b+a}=2^{a+b},$

$$\therefore \qquad a\circ b=b\circ a.$$

又 $(a\circ b)\circ c=2^{a+b}\circ c=2^{2^{a+b}+c},$

$a\circ(b\circ c)=a\circ 2^{b+c}=2^{a+2^{b+c}}.$

一般地, $\because \quad 2^{2^{a+b}+c}\neq 2^{a+2^{b+c}},$

$\therefore \qquad (a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c).$

故对于交换律成立,但对于结合律不成立.

研究 代数中的论证问题，最重要的是极力避免主观推测. 所谓 $a\circ b=a-b$, 就是用 $a\circ b$ 表示 $a-b$ 的运算，同时还必须注意 a 和 b 的顺序. 例如

$5\circ 3=5-3=2$,而不是 $5\circ 3=3-5=-2$.

关于 $a\circ b=2(a+b)$ 也一样, $3\circ 4=2(3+4)=14$,而 $3\circ 4=2(4+3)=14$ 就不正确，我们不能只注意结果. 还有,在解答这些问题时,它的基础在于需要承认实数的交换律、结合律和分配律都成立.

练习 (答案在 136 页)

1. 对于任意实数 a,b, $a\circ b$ 作如下定义:

$$a\circ b=ab+k(a+b)+l\ (k, l\ 是实数常数).$$

试求这个运算 $\circ$ 对于任意实数 a,b,c,满足下列结合律

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$

的充要条件.

2. 对于非负实数 x,y, $x\ominus y$ 作如下定义:

$$x\ominus y=\begin{cases} x-y & (当\ x\geqslant y\ 时),\\ 3x+y+3 & (当\ x<y\ 时).\end{cases}$$

试不用⊖表示下列各式:

(1) $[(x+y)^2 \ominus x^2] \ominus y^2$.

(2) $[(x \ominus y)+y] \ominus x$.

3. 如下定义实数 a, b 间的计算规则∘:

当 $a \geqslant b$ 时, $a \circ b=a$, 当 $a<b$ 时, $a \circ b=b \times b$. (×是实数中的普通乘法.)

试回答下列各问题:

(1) 试根据上述定义计算 $2 \circ 3, 4 \circ 4, 2 \circ(3 \circ 1)$.

(2) 对于满足 $x<z<y$ 的任意实数 x, y, z, 试判别 $x \circ(y \circ z)=(x \circ y) \circ z$ 是否成立?

(3) 画出 $y=[(1 \circ x) \times x]-(2 \circ x)$ 的图象. 其中, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. 还有"−"是实数中的普通减法.

例题 2 试正确填写下列的$\boxed{}$.

在两个实数 a, b 间, 考虑如下运算*:

$$a * b=7 a b.$$

例如 $2*3=7 \times 2 \times 3=42, 2*2=7 \times 2 \times 2=28$. 这时:

(1) $3*4=\boxed{}$, $(1*2)*3=\boxed{}$.

(2) 对于任意实数 x, 如果 $a * x=x$, 那么 $a=\boxed{}$.

(3) 适合 $(x*x)+x-6=0$ 的 x 值是$\boxed{}$.

解法 这是给出运算法则计算数值或求方程的解的问题. 重要的是应用定义进行正确运算. **把新符号关系换成普通符号关系,问题就迎刃而解了.**

对于任意的实数x,使$ax+b=0$成立的条件是$a=b=0$.

解 (1) $3*4=7 \times 3 \times 4=84$.

$\because \quad 1*2=7 \times 1 \times 2=14, \therefore \quad (1*2)*3=7 \times 14 \times 3=294$.

(2) $\because \quad a*x=x$ 是 $7ax=x$, $\therefore \quad (7a-1)x=0$.

对于任意的 x，使此式成立的条件是 $7a-1=0$，$\therefore a=\frac{1}{7}$.

(3) $(x*x)+x-6=0$, $\therefore$ $7x^2+x-6=0$,

$(7x-6)(x+1)=0$，故

$$x=-1 \quad 或 \quad x=\frac{6}{7}.$$

例题 3 设 $p\vee q$ 表示 p,q 中较大的数，$p\wedge q$ 表示 p,q 中较小的数. 例如，

$$1\vee 2=2,\ 1\wedge 2=1.$$

现在，关于四个不同的实数 a,b,c,d，有下列关系：

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)=M,$$

$$(a\vee c)\wedge(b\vee d)=N.$$

试比较 M,N 的大小.

解法 若从 a,b,c,d 的大小分别情况来考虑，则必须考虑 $4!=24$ 种情况. 然而只要按顺序正确考虑，问题就能得到解决. 不厌烦细微的劳动，并且认真去做也很必要. 其次，仔细观察 M,N 的组成，把 a 和 d，b 和 c 作为一组来考虑，也可以想出好的方法来.

(1) 若 a 和 d 都比 b,c 大时(4 种).

(2) 若 a 和 d 都比 b,c 小时(4 种).

(3) 其他情形(16 种).

在(1)的情形下，$M=b\vee c$，$N=a\wedge d$，则 $N>M$. 在(2)的情形下，$M=a\vee d$，$N=c\wedge b$，则 $N>M$. 因而，只要判别(3)的情形即可. 在(3)的情形下，可知全都成为 $N=M$. 既使这样，解答还是相当费力的.

若设 $a\wedge b=m$，$c\wedge d=n$，情况如何呢？总共需考虑多少

种情况?

解 若 $a\wedge b=m, c\wedge d=n(m\neq n)$，则

$$M=(a\wedge b)\vee(c\wedge d)=m\vee n. \quad ①$$

另外，因为 $a\geqslant m, b\geqslant m, c\geqslant n, d\geqslant n$，所以

$$a\vee c\geqslant m\vee n, b\vee d\geqslant m\vee n.$$

因而 $$N=(a\vee c)\wedge(b\vee d)\geqslant m\vee n. \quad ②$$

从①，②得 $M\leqslant N$.

练习 （答案在137页）

4. 对于整数 m,n，定义 $m*n=m+n-3mn$.

(1) 试计算 $2*(-3)$ 和 $[(-2)*4]*3$.

(2) 试证明：$(l*m)*n=l*(m*n)$.

(3) 试求满足关系式 $n*n>-10$ 的整数 n.

(4) 对于一切的整数 m，试求满足关系式 $m*a=m$ 的整数 a.

例题4 设 a,b 是任意实数，考虑有序对 (a,b). 关于任意两对 (a,b)，(c,d)，如下定义和 $(a,b)\oplus(c,d)$ 与积 $(a,b)\otimes(c,d)$：

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

其中，ac，bd 等是实数积，$a+c$，$ac-bd$ 等的 $+$，$-$ 表示实数的和与差.

(1) 试证关于这样的加法与乘法结合律成立.

(2) 对于任意的 (a,b)，试求使 $(a,b)\otimes(x,y)=(a,b)$ 成立的 (x,y).

(3) 如果 $(a,b)\otimes(c,d)=(0,0)$，那么 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(c,d)=(0,0)$. 试证明之.