积云动力学和积云数值模拟讲习班讲义

云和人工降水的数值模拟

国家气象局气象科学研究院　　胡志晋

中国科学院大气物理研究所　　徐华英

福建省气象科学研究所印

一九八二年十一月

目　录

前言

§1、什么是云和降水的数值模拟：

根据观测和实验的结果人们对云中宏微观过程和各种因子的作用有了一定的了解，得出了一系列定量的关系。这些关系可以用数学方程式来表示。把这些方程联立起来求解，可以研究各种因子、各种过程的相互作用和关系。可以研究云和降水发展的各个宏微观过程。这种方程组是高度非线性的，一般无法求得解析解，因此必须采用数值计算的方法。这种用物理数学方法计算研究云和人工降水的工作称为数值模拟。

云中过程十分复杂。在微观方面包括尺度为 10^{-6} 厘米的核、10^{-3} 厘米的云滴、10^{-1} 厘米的雨滴到 10^{1} 厘米的冰雹；在宏观方面包括尺度为 10^{-3} 米的湍流、$10^{3}-10^{4}$ 米的积云对流到 $10^{5}-10^{6}$ 米的天气尺度运动。在具体的物理观测和实验中一般实际上只着重于研究某一具体尺度的过程和运动。例如室内实验着重于研究各种微观过程。而对宏观过程的模拟相当困难在自然云的观测中对微观特征量的观测有很大限制，直接观测微观过程有很多困难。这就造成云物理学中宏观过程和微观过程分别研究的现象。但是事实上这两种过程是密切联系的。通过数值模拟把这两方面的方程联立起来求解，就可以研究它们的相互联系。例如室内实验得出了在一定温度下冰雹粒子在下落碰并大云滴时会产生次生冰晶。这一过程对云的降水有什么重要性，对什么样的云作用最显著。这种问题就需要用数值模拟来解决，再用实测结果验证。又如室内实验得出雨滴达到一定大小就会自发破碎。有人据此提出了"连锁反应"的假说。但是在什么云中存在着维持这种连锁反应的条件，它能不能对降水过程产生实质性的影响。这一问题至今仍有争议。数值模拟应是解决这类问题的重

要途径。另一方面，微观的凝结、蒸发、冻结、熔化等过程所伴生的热效应对宏观动力过程的作用很大。这些过程发生的时间、地点、速率都同微观规律有关。云中水分在云边的蒸发造成云边的下沉气流；降水物在云下的蒸发加强了下沉气流及其伴随的飑锋；冰雹的下落和熔化在某些情况下有助于上升气流的减弱和雨滴的落出。这些错综复杂的相互关系都可以通过数值模拟而清楚地显示出来。

自然云中各种条件都在变化，人们很难把特定的问题孤立起来深入研究。以得出比较清晰的结果。在数值模拟中通过初始条件、边界条件、环境条件或者某个参数的改变可以集中研究某一条件或某一参数对整个云和降水过程的作用。例如大气层结和风切变对积云发展的影响；初始滴谱或核谱对降水过程的影响；云底温度和升速对降水机制的影响等々。当然数值模拟得出的孤立的结果必须通过实测资料分析去验证。

人工降水试验研究中最大的困难在于试验对象的复杂多变。人们不可能象实验室那样控制试验对象而重复作业，从而得出比较明确的效果。目前人工降水试验一般采用统计方法来检验效果，研究周期长。费用大。一次试验就要化费五年以上的时间和大量的经费。通过一次成功的试验我们只能对一种作业原理、方法和对象作业初步结论要用这种方法对比寻找最佳的作业设计化费太大，也是不现实的。在数值模拟中可以把作业过程加入方程组，计标作业后降水的情况和演变。同自然云方程组对比就可以了解人工降水的效果。例如冷云催化中播撒碘化银的过程就可以用增加成冰核浓度来模拟；暖云催化可以用增加一定浓度的盐核并进一步凝结碰并长大的方程来模拟。改变各种参数就可以模拟不同时刻、不同地点、不同剂量、不同颗粒大小的播撒效果。这样得出的结果虽然同实际情况有出入但是可以为试验的设计提供重要

的参考依据。此外，在验证新的催化假说、选择作业对象、了解催化潜力、协助检验催化效果、制订观测，试验方案等方面起到一定作用。总之，数值模拟已经成为云和人工降水试验研究中重要的组成部分。随着计算机的普及我国云和人工降水数值模拟工作也正逐步前进。

§2、数值模拟的概况和存在的问题

1、积云的数值模拟开始较早，1947年Stommel就提出了一维定常夹卷模拟。主要着重于积云动力学的研究。六十年代J·Simpson把一维定常夹卷模式用于动力催化试验，以说明催化假说和催化效果并提出选云指标，取得了显著的成绩。此后动力学和微物理相结合的数值模拟工作迅速发展。由于计算机的飞跃进步，一维、二维、三维的模式相继出现，考虑的过程和因子越来越多研究的领域也越来越广。目前一维定常模式主要用于日常作业分析和大、中尺度天气过程的模拟和预报中的对流参数化。一维和二维时变模式应用最为广泛，它们比较接近实际情况而要求的计算手段还容易满足。目前主要用来模拟云和人工降水的各个过程，研究宏、微观的相互作用，研究云和环境的相互作用，研究各种条件下的降水机制。如云中下沉气流的发展，雨滴和冰雹的形成，环境风切变对积云生命史的影响，地形和大尺度辐合对积云的作用。在动力学方面，不但模拟个体积云的生命史而且模拟飑线、超级单体、多单体等强对流群体的行为，研究积云合并、新生更迭的过程。在微物理方面不但详细地模拟水滴群体的增长演变过程（暖雨过程）而且初步模拟各种冰相粒子的生成演变过程。对人工降水的模拟更加细致并更近似于实际情况。三维时变模式已经开始，但由于计算能力的限制还处在探索阶段。

除了积云数值模拟之外，为了配合人工降水试验还研究了地

形云和层状云的数值模式。层状云在我国相当重要，现已提出了初步的一维时变模式。

2. 数值模拟实际上就是理论工作。作为人类认识客观世界的一环，理论来自实际，并受实际的检验。数值模拟是建立在对云中物理过程的探测认识基础上。它的各个方程都是这样来的。目前对于云中很多物理过程不甚了了，如云内外的交换，云内湍流，边界层对积云发展的作用，各种水相粒子的增长、下落、破碎聚合等等，很难建立比较精确的数学方程。所以理论只是实际的一种近似的描述。在云和人工降水的数值方程中很多是相当粗糙，只能称是第一级的近似，因此对数值模拟的具体结果应持分析的态度。理论还必须受实际的检验。这种检验对数值模拟更为必要。只有通过实际检验才能不断改进模式，使之符合实际。可惜这种检验相当困难。目前的观测手段和观测资料往往很难达到检验模式所要求的精度、密度和特征值数目。所以探测和试验仍是当前的头等大事，而数值模拟则可帮助我们了解应该观测什么怎样组织观测。

数值模拟依赖于计算能力和计算方法的发展。由于计算机内存，速度和计算费用的限制一个模式只能突出研究某一方面的问题。例如在研究动力过程的多维模式中对微物理过程往往采用比较简单的参数化方法；在研究详细微物理过程的模式里又不得不对动力过程予以必要的简化。为了建立一个某些方面（如暖云人工降水）有一定精度的模式必须善于选择适当的方程组。在数值计算中不同的计算方法会带来不同的误差。例如常用的时间向前空间上游的方法简单、稳定，但是带来虚假的扩散。随着模式的日益复杂，计算误差问题就更加突出。为了解决这一问题除了对计算方法进行专门研究之外，一般对新的模式必须进行一系列的内部试验。例如用简单的"封闭气块"试验看看云内湿度是否符

合绝热过程，改变一些参数看看结果是否合理等等。这方面的问题正引起越来越多的注意。

§3. 数值模拟在人工影响天气中的应用

1、在人工影响天气中各类模式都有着一定的应用，详见表1。表中文献目录另附。

表1　各种模式的应用

模式分类	云中出现降水	催化效果的正负	降水量	降水分布	作业应用	效益评估分析	文献	备注
0维封闭云块	V						12, 13, 14, 17, 20, 21, [illegible]	
一维定常（无反馈）	V						[illegible]	
一维定常（有反馈）	V	V			V	V	1, 2, [illegible], 21, 22	
一维时变（有反馈）	V	V			V		5, 6, 8, 24	
二维定常（无反馈）	V	V	V	V			4, 10, [illegible], 3[illegible]	降雪模式
二维时变（有反馈）	V	V	V	V			11, 15, 21, 31	
三维时变（有反馈）	V	V	V	V			3	
三维时变（中尺度）		V	V	V			7, 25	

2、各种模式所需的计算机内存和计算时间有很大的差别（见表2）。模式越复杂，所需计算机越大，计算时间越长，费用越大。

表 2. 各种模式所需计算机内存和计算时数：

模式	格点数	内存	1例的计算时间（CDC 6600机）	模拟的真实时间
0 维	1	10^3	10秒	
1 维定常	10^2	10^4	10秒	
1 维时变：				
参数化微物理	10^2	10^3—10^4	600秒—6000秒	60—120分
暖云详细微物理	10^2	10^5	2000 秒	60分
2 维时变：				
单体云	10^4	10^5—10^6	10^3 — 10^4秒	60分
多单体云	10^4	10^5—10^6	10^4 — 10^5秒	180分
3 维				
参数化微物理	10^5	10^6—10^7	10^5 — 10^6秒	60分

注*：在同样维数下详细微物理模式比参数化模式解题的时间一般多20倍。

3、WMO 1980 年 12 月在多伦多的专家会议认为：

(1) 一般说来，云和中尺度模式，不管怎样简单，在人工影响天气的研究、作业、设计和效果评估中都有用处。

(2) 模式有助于了解播云引起的云和降水改变、云的相互作用和云群地区效果；并对发展和试验（作业）假说有用。

(3) 最适用的模式可能不是最复杂的。

(4) 为帮助检测催化效果的数值模式往往不需要很高的精度。

(5) 为了使模式对指定的试验计划有显著的作用模式工作

者必须同野外的实验室观测人员有一定时间的紧密合作。

（6） 在任一人工影响天气研究中应包括云模式工作。

（7） 应发展层状云模式和积云模式，注意邻近云体和它们中尺度环境（即耦合）的相互作用。

（8）应发展层状云中内嵌对流云的模式，研究"域外效应"，播撒盐粉对冰晶过程的作用。

第一章 微物理过程的模式

第一节 参数化模式概述

§1、几十年来通过野外探测和室内实验对云和降水的微物理特征及其演变规律积累了很多知识，形成了云和降水微物理学[1][2]。为了全面考察各类云中各种降水的形成演变过程，必须综合已有的知识对各种微物理过程提出一套比较完整的定量关系式。利用这种模式可以了解各种微物理过程的主要制约因子并通过云的模拟来了解它们在不同条件下对降水形成的重要性。在建立模式的过程中我们往往可以发现已有知识的不足之处从而引导我们去作进一步的探测和实验。

云和降水的微物理特征十分复杂，它包括各种相态，大小、形态、密度的粒子，其质量、落速以及增长和演变的速率差别很大。为了详细描述一个粒子需要几个特征量；详细描述一群粒子就需要几维的数组。这种描述方法称为详细的微物理模式，目前基本上只限于暖雨过程。因为暖雨过程中水滴都是液态、球形、密度为 $1g/cm^3$，其差别仅仅在于大小。所以可以用一维数组——即各种直径的滴数 $N(D)$ 来描述。即使如此，在数学处理上

已经相当复杂。冷云过程更要复杂得多。为了解决这个困难，人们抓住云中粒子群的主要特征和各种过程的主要制约因子建立参数化的模式。例如 Kessler[3] 将云中水滴分成云滴和雨滴两种，用云滴含水量（Qc）和雨滴含水量（Qr）两个参数来描述整个水滴群的特征。这比详细微物理模式的一维数组（一般有 50 个以上的特征值）简化了很多。他根据实测结果假定雨滴的数浓度同直径有一定的关系（即雨滴谱具有一定的形式），推出了各种 Qr 值下的群滴平均落速、碰并增长总速率等。他用这种简化的模式成功地描述了雨滴群体的演变的大概面貌。在冰相过程中微物理过程更为复杂。如冰晶凝华增长率不仅决定于过水汽饱和度和粒子大小，而且受冰晶形态的影响。冰晶千姿百态，但总的受温度的制约。Koenig[4] 根据实测结果提出了冰晶在各种温度下的凝华增长率，就总体而言，同实验结果比较一致。这样我们可以用他的模式来近似地描述冰晶的凝华过程而不必深入计较它的形态。云和降水数值模拟中包括动力—热过程和微物理过程，一般都很复杂，往往受到计算机内存和计算时间的限制。因此微物理的参数化模式得到广泛应用。同时因为我们对很多微物理过程的认识还很不足，建立详细的微物理模式缺乏必要的依据，而只能满足于第一级的近似所以采用参数化模式就比较适合。

目前对暖雨过程、凝华、淞附、冻结等过程已经提出了一些参数化模式。但是还不完全，一些重要的过程还没有建立模式。例如雪团是层状云降水的重要形式，它的增长演变过程十分重要，但还没有相应的各种模式。冰晶、雪团演变为霰，霰演变为雹是冰雹形成的一种主要途径，也是目前引晶防雹的关键过程。但是在很多雹云模式中没有详细考虑。此外，已有的参数化模式中有的还需考虑更多的因子，进行修正。例如淞附过程中碰并系数同云滴和冰粒大小的关系；降水粒子相互碰并过程中落速差的问题；

冰滴冻结速率同降温率的关系等々。我们试图根据实验和探测结果对云和降水的微物理过程提出一套比较全面的参数化模式。由于知识和水平的限制难免有很多不妥之处，望批评指正。

§2、我们首先将云和降水粒子根据其相态、形状和比重分成7种，即水汽（V）、云滴（C）、雨滴（r）、冰晶（i）雪团（S）、霰（g）和雹（h）。(1)水汽是指气态的水分子。(2)云滴是指落速很小的液态水滴，其半径一般小于100微米。(3)雨滴是大的液态水滴。(4)冰晶是指各种大小形状的固态水汽凝华物。有人按直径是否大于250微米将冰晶分成冰晶和雪晶。我们考虑这两者的物理特性并无显著差别，而且目前对小的冰晶探测研究都很不足，所以不予分别而作为总的群体。(5)雪团是指冰晶的聚合物，其外形大致成团状，比重较小。(6)霰是指主要由云滴冻结组合在一起的固态冰，一般为球状，比重小（0.1——0.3）。它要是气象观测规范中的软雹或雪丸。(7)雹是指各种大小的透明或半透明的冰球，比重很大（约0.8～0.9）。这里包括冻滴和包在薄冰层里的霰，即包括气象观测规范中的冰粒或小冰雹。这7种粒子包括了云和降水粒子的基本类型，各种之间有着明显的差别而很难进一步合并。

§3、为了描述这些粒子群的群体特征和增长速率必须提出单粒子的质量（m），落速（V）同大小（直径D）的关系。根据实测结果我们采用下列的表达式：

$$m = A_m \cdot D^{b_m} \qquad m = A_m \cdot D^{b_m} \tag{1.1}$$

$$V = A_V \cdot D^{b_V} \qquad V = A_V \cdot D^{b_V} \tag{1.2}$$

式中：A_m、A_V、b_m、b_V 为系数。

(1) 雨滴： $m_r = \frac{\pi}{6} D_r^3 = 0.524 \cdot D_r^3$ (1.3)

$V_r = 21 \cdot D_r^{0.8}$ (Liu & Orville[ ]) (1.4)

(2) 冰雹： $m_h = 0.471 \cdot D_r^3$ （比重为 0.9） (1.5)

$V_h = 9 \cdot D_r^{0.8}$ (Auer[ ]) (1.6)

(3) 霰 ： $m_g = 0.065 D_g^3$ (Mason[ ]) (1.7)

$V_g \doteq 4.5 \cdot D^{0.8}$ （见图 1） (1.8)

(4) 雪团： $m_s = 0.003 \cdot D_s^2$ （见图） (1.9)

$V_s = 1.0 \cdot D_s^{\frac{1}{3}}$ （见图 1） (1.10)

强淞附雪团为：

$m_s = 0.004 D_s^2$ （见图 ） (1.11)

$V_s = 1.5 \cdot D_s^{\frac{1}{3}}$ （见图 1） (1.12)

(5) 冰晶：不同形态的冰晶具有不同的质量和落速表达式。各个作者得出的结果也不完全一致。以平板枝晶为例，Mason 根据 NaKaya 得出 $m_i = 0.0004 D_i^2$；而 Higuchi (1956)[ ] 得出 $m_i = 0.0006 D_i^2$。我们采用 Mason 对立体枝晶和雪粒的表达式：

$m_i = 0.001 \cdot D_i^2$ (1.13)

强淞附冰晶为：

$m_i = 0.0027 D_i^2$ (1.14)

冰晶的落速，按 Davis (1924)，对 D < 0.1 厘米的冰晶为： $V_i = A_{vi} \cdot D_i^{0.8}$。但是更大的冰晶，按 NaKaya (1938)，其落速趋于定常，如平板冰晶的落速约为 0.3 米/秒，立体枝晶约为 0.5 米/秒。对于各种大小的冰晶我们采用下式近

似：

$$V_i = 0.7 \cdot D_i^{\frac{1}{3}} \quad (见图) \tag{1.15}$$

对强凇附冰晶 $$V_i = 1.4 D_i^{\frac{1}{3}} \quad (见图) \tag{1.16}$$

我们所采用的近似式主要根据立体枝状冰晶和雪粒的实测结果。对于平板冰晶，质量和落速也有类似的表达式，但其系数较小，约为上述两式的 60% 左右。在数值模拟中我们可以调查系数，看々它们的作用是否很重要。至于针状和柱状冰晶的实测资料较少。作为第一级的近似，我们基本上忽略了冰晶形态的差异。

§4、各种粒子群的分布谱（$N(D)$）和群体特征量：

（1）云滴谱：根据 Хргиан－Мазин [ ] 的结果，

$$N(D) = N_0 \cdot e^{-\lambda D} \cdot D^2 \tag{1.17}$$

根据实测结果，云中云滴浓度的变化较小，我们假定云滴浓度为常数（N_C）。从（1.17）可得：

$$N_C = \int_0^\infty N_0 D^2 e^{-\lambda D} dD = 2 N_{0C} \lambda_C^{-3} \tag{1.18}$$

$$Q_C = \int_0^\infty \frac{\pi}{6} N_0 D^2 e^{-\lambda D} \cdot D^3 dD = 20\pi N_{0C} \lambda_C^{-6} \tag{1.19}$$

$$N_{0C} = 10\pi \cdot N_C^2 \, Q_C^{-1} \tag{1.20}$$

$$\lambda_C = (10\pi N_C \cdot Q_C^{-1})^{\frac{1}{3}} \tag{1.21}$$

算术平均直径 $$D_1 = \int_0^\infty N \cdot D \, dD / N_C = 3 \cdot \lambda^{-1} \tag{1.22}$$

平方平均直径 $$D_2 = \left(\int_0^\infty N \cdot D^2 dD / N_C\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} \cdot \lambda^{-1} = 3.5 \lambda^{-1} \tag{1.23}$$

立方平均直径 $$D_3 = \left(\int_0^\infty N \cdot D^3 dD / N_C\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{60}\, \lambda^{-1} = 3.9 \lambda^{-1} \tag{1.24}$$

云滴落速较小，我们假定 $V_c = 0$ (1.25)

（2）雨滴谱：根据 Marshell－Palmer 的观测结果，雨滴数浓度同直径的关系（即雨滴谱）可用下式表之。

$$N_r(D) = N_{0r} \cdot e^{-\lambda_r D} dD \qquad (1.26)$$

Marshall－Palmer认为 N_0 是常数。在很多数值模式中也采用这个假定。并取 $N_{0r} = 10^7 m^{-4}$。这意味着雨滴群的特征可以用一个参数 λ 来决定，或者用一个特征量（如雨水含量 Q_r）来决定。雨滴的数浓度是雨水含量的函数：

$$N_r = (6 \cdot A_{mr})^{-\frac{1}{4}} \cdot N_0^{\frac{3}{4}} \cdot Q^{\frac{1}{4}} \qquad (1.27)$$

实际上这并不总是成立的。因为雨水含量（Q_r）相同的雨滴群可以由少数大滴组成，也可以由大量小滴组成。所以进一步的观测 [ ][ ] 表明，就平均而言式（1.26）是成立的，但是 N_0 不是常数。从不同类型云中下落的雨滴，N_0 值可以有很大差别。甚至在一次降水过程中雨滴谱的 N_0 值可以改变2个数量级以上，有时这种改变十分突然，被称为"N_0 跃变"。根据这些事实我们采用 N_0 和 λ 两个参数，或者说采用雨滴数浓度（N_r）和含水量（Q_r）两个特征量来描述雨滴群。这可称为"双参数模式"。用它可以模拟少数大滴首先落地的现象，描述少数大雹块首先下落到暖区熔化而缓慢地冷却空气的过程，还可以近似地模拟雨滴间碰并和破碎对雨滴谱的作用（此时雨水量不变）……等々。这种双参数模式我们首先应用于盐粉催化积云的模拟以研究盐滴增长和移动，扩散的过程。我们除了云滴谱以外对其它粒子群一概采用双参数的模式。很多模式中所用单参数模式是双参数模式的特殊情况，即 N_0 为常数。

实测表明[ ]，雹和霰的谱分布也有类似形式。对于雨霰雹我们都用式（1.26）的分布。它们的群体特征量可以推出为：

$$N = N_0 \lambda^{-1} \tag{1.28}$$

$$Q = 6 \cdot A_m \cdot N_0 \cdot \lambda^{-4} \tag{1.29}$$

$$\lambda = (6 \cdot A_m \cdot N \cdot Q^{-1})^{\frac{1}{3}} \tag{1.30}$$

$$N_0 = (6 \cdot A_m \cdot Q^{-1})^{\frac{1}{3}} \cdot N^{\frac{4}{3}} \tag{1.31}$$

[illegible] $D_1 = \lambda^{-1}$ (1.32)

[illegible] $D_2 = \sqrt{2} \cdot \lambda^{-1} = 1.4\lambda^{-1}$ (1.33)

[illegible] $D_3 = \sqrt[3]{6}\,\lambda^{-1} = 1.8\lambda^{-1}$ (1.34)

质男中值直径 $D_0 = 3.67 \cdot \lambda^{-1}$ (1.35)

D_0 的定义是：$\int_0^{D_0} N(D) \cdot D^3 dD = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} N(D) \cdot D^3 dD$ (1.36)

可得：$e^{-\lambda D_0}\left(\frac{\Gamma(4)}{\lambda^4} + \frac{2\Gamma(3) D_0}{\lambda^3} + \frac{D_0^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(4)/\lambda^4$

质男加权平均落速 $V = \frac{1}{Q}\int_0^{\infty} N(D) \frac{\pi}{6} D^3 \cdot V(D)\, dD$ (1.37)

$$V = \frac{\Gamma(4 + b_V)}{\Gamma(4)} A_V \cdot \lambda^{-b_V} \tag{1.38}$$

式中：Γ（ ）为伽玛函数，可查表标出。

$$V = 2.97 \cdot A_V \left(\frac{Q}{6 \cdot A_m \cdot N}\right)^{\frac{b_V}{3}} \tag{1.39}$$

Kessler曾用对应于 D_0 的粒子落速来描述群体平均落速，即 $V = A_V \cdot D_0^{b_V} = 3.67^{b_V} \cdot A_V \cdot \lambda^{-b_V}$ (1.40)
同式（1.38）相比，两者只有系数不同，且差别不大。

（3）冰晶（雪团）谱：

对冰晶、雪团的分布谱的观测较少，Hobbs 等人[ ]观测

得出，冰晶、雪团大多数为单峰谱，我们采用下式描述：

$$N(D)=N_0\cdot D\cdot e^{-\lambda D}dD \quad .\qquad (1.41)$$

群体特征量为：

$$N=N_0\cdot\lambda^{-2}\qquad (1.42)$$

$$Q=\Gamma(2+b_m)\cdot A_m\cdot N_0\cdot\lambda^{-(b_m+2)}=6\cdot A_m\cdot N_0\cdot\lambda^{-4}\qquad (1.43)$$

$$\lambda=(6\cdot A_m\cdot N\cdot Q^{-1})^{\frac{1}{2}}\qquad (1.44)$$

$$N_0=N\cdot(6\cdot A_m\cdot N\cdot Q^{-1})^{\frac{2}{3}}\qquad (1.45)$$

$$D_1=2\cdot\lambda^{-1}\qquad (1.46)$$

$$D_2=\sqrt{6}\cdot\lambda^{-1}=2.45\lambda^{-1}\qquad (1.47)$$

$$D_3=\sqrt[3]{24}\ \lambda^{-1}=2.88\lambda^{-1}\qquad (1.48)$$

$$D_0=3.67\cdot\lambda^{-1}\qquad (1.49)$$

$$\overline{V}=\frac{\Gamma(4+b_v)}{\Gamma(4)}\cdot A_v\cdot\lambda^{-b_v}=1.99\cdot A_v\cdot\lambda^{-\frac{1}{3}}=1.99A_v\left(\frac{Q}{6\ A_m N}\right)^{\frac{1}{6}}\qquad (1.50)$$

$$V_0=A_v\cdot\left(\frac{3.67}{\lambda}\right)^{b_v}=1.5\cdot A_v\cdot\lambda^{-\frac{1}{3}}\qquad (1.51)$$

云和降水粒子的上述分布谱代表了它们的平均情况。各次实际观测的结果往往同上述分布谱有一定差异。为了了解不同分布谱对群体特征量（和群体增长率）的影响，我们将上述各种分布谱同单分散的均匀粒子群进行比较，列于表 1。