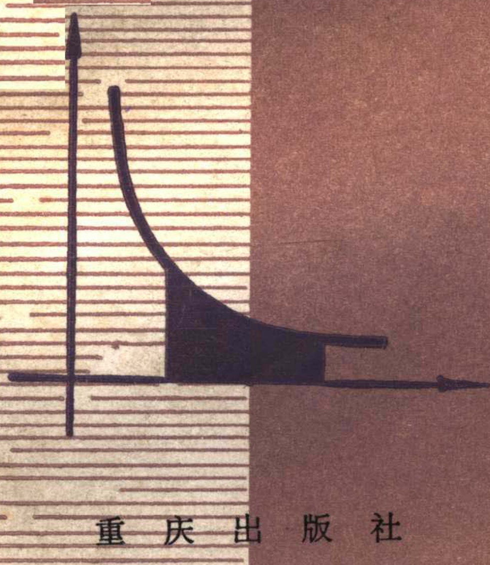
电大学习辅导丛书

高等数学

辅导与练习

西南师范大学 主编



重 庆 出 版 社

电大学习辅导丛书

高 等 数 学

辅 导 与 练 习

徐继森 曾祥富 曾德光 编

重 庆 出 版 社

1988年 重庆

责任编辑：赵　剑

封面设计：江能咏

徐继森　曾祥富　曾德光　编

高等数学辅导与练习

重　庆　出　版　社　出　版（重庆长江二路205号）

新华书店重庆发行所发行　重庆印制一厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 19.75　字数 416 千

1988年3月第一版　1988年11月第一版第一次印刷

印数：1—1,270

*

ISBN 7-5366-0390-8/G·173

定价：4.15元

说　明

长期以来，电大学员缺乏系统的辅导材料，学习感到困难，辅导教师也为缺少参考资料而苦恼。为此，我们编写了这套《电大学习辅导丛书》。

本丛书根据电大教材及其大纲编写，充分考虑自学的特点，按教材的章、节或单元顺序，大致分为内容概述，要点难点，名词术语和引文解释，思考与练习，参考答案等几个部分，既不脱离原教材，又有自身的独立性和完整性，有利于学员牢固掌握基本理论和基础知识，获得实际的运用能力。因此，本丛书除了满足电大学员的需要，还适合职大、夜大、函大、刊大等成人高校学员和自学者使用，也可供各地辅导教师参考。

本丛书主要由我校参加过电大和其他成人高等教育教学工作的教师编写。因系初次编写，难免有疏漏不当之处，欢迎读者批评指正。

西南师范大学《电大学习辅导丛书》编写委员会

1985年4月

前　言

高等数学内容多、教学进度快，为了帮助电大及职大、夜大、函大、刊大等各类成人高校学员及广大自学者学好高等数学，我们以中央广播电视大学的高等数学教学大纲为依据，并主要参考邵士敏、蒋定华同志为中央广播电视大学编写的《高等数学讲义》编写了这本辅导书。

本书内容包括：一元微积分，空间解析几何与矢量代数，多元微积分，级数，常微分方程等部分，在编写每章时，先简明指出该章主要内容与特点，学习具体要求及重点难点，然后按以下四部分编写：

一、内容提要　这一部分着重对本章的重要定义、定理、法则和公式给以通俗的说明或解释，必要时还提出自答问题，目的在于使读者读懂、理解基本概念、掌握基本理论。

二、例题分析　这一部分是本书的重点部分，在这部分里，我们选择了形式多样、类型全面的概念题、计算题、证明题、应用题等共约400道，题目由浅入深，由易到难，既有综合性又有启发性，对许多例题指出了解题思路并对问题的解法作了小结，对有些例题，提供了多种解法以开阔眼界，打开思路。在例题中还选择了一些在概念上、解题过程中容易犯错误的题进行辨析，给以正确的回答，目的在于使读者

提高分析问题和解决问题的能力，会用所学理论、方法解决数学问题。

三、本章小结　这一部分主要是对基本理论和方法进行概括、综合及学习指导。对所涉及内容既注意到它在本章甚至前后有关章节的纵的联系和发展，也注意到它的横向联系和引申，目的在于使读者对基本内容和方法有一个整体的深入理解。

四、思考和练习　在这一部分里主要是提供一些类型齐全、难易适当的思考和练习题，供读者复习总结时自我检查使用。

本书第一、二、十一、十二、十三章由徐继森编写，第三、四、五、九、十、十六章由曾祥富编写；第六、七、八、十四、十五章由曾德光编写。

为了使本书切合实际具有特色，我们在编写过程中对电大和成人教育的高等数学教学情况进行了调查研究，同时认真学习吸取了有关学习资料的优点　因此本书具有较大范围的适用性。

本书在编写过程中得到西南师范大学数学系有关同志的关心和支持，在初稿完成后，承肖勇、付炳松老师审阅，他们提出了宝贵的修改和补充意见，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于本书编写时间仓促，编者水平有限，缺点错误在所难免，望读者不吝赐教！

编　者　　徐继森　曾祥富　曾德光

1985年9月

目　录

第一章　函数及其图形

函数是高等数学中最重要的概念之一，是描述变量之间相互关系的一般形式。本章着重研究了函数概念及函数的一些简单性质

在学习本章时，要掌握绝对值的性质及其运算，要深入理解函数概念，要熟练掌握复合函数的复合过程和初等函数定义域的求法，要掌握各类基本初等函数的定义域、图形和简单特性，要了解反函数的概念，会作分段函数的图形.

本章的重点是：函数概念，基本初等函数的定义域、图像及简单性质。

一　内容提要

1　函数的定义

设 x 和 y 是同一变化过程中的两个变量，x的变域是D。如果按照一定的规律，对于 x 在变域D中的每一个数值，总有一个或多个确定的y值与之对应，则称变量 y 为x的函数。记作 $y=f(x)$。其中 x 称为自变量，y 称为函数或因变量，D称为函数的定义域，而因变量的变域称为函数的值域。

说明(1) 函数记号$y=f(x)$中，f与$f(x)$是有区别的。字母“f”不代表数，而代表x和y之间的对应关系(规律)。例

如圆的面积S与其半径r之间的依赖关系：$S=\pi r^2$可记为$S=f(r)=\pi r^2$。在这里"f"是表示把r代入S的表达式πr^2进行运算得到S的关系。为了研究方便，也可以用字母g，h，φ等表示对应规律。在本书中讲到的函数是在实数范围内讨论的。如无特别声明则是指实变量、实函数值的一元单值函数。

(2) 函数概念的两个缺一不可的要素是定义域D和对应规律f。因此，所谓两个函数相同，是指它们的定义域相同且有相同的对应规律。

(3) 表示函数的方式没有任何限制。变量间的函数关系可以用式子表示，也可以用列表、图像等多种形式表示。也可以同时用几个式子来表示一个函数。例如：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2x+1 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

这样的函数叫分段函数。

(4) 在平面直角坐标系中，函数$f(x)$的图形一般是一条平面曲线。但不是一切函数都能画出对应的图形。

问题1　在下列各式中，y是x的函数吗？

① $y=\sqrt{-x}$；

② $y=5$；

③ $y=\sqrt{\cos x-2}$

答　①　y是x的函数。因为对$(-\infty,\ 0]$中每个x值都有一个y值与之对应。

②　y是x的函数。因为无论x取何实数，y总有确定的值5与之对应。

③ y不是x的函数。因为$\cos x$的值总小于2，根式内总是负数，即对任何实数值$x \in (-\infty, +\infty)$，在实数范围内无y值与之对应。

问题 2　下列语句是否表示函数？

① “y是不超过x的最大整数”。

② “设x是有理数时，y的值为1；x是无理数时，y的值为0”。

答　①　y是x的函数。一般记为$y=[x]$。例如$y=[4.3]=4$，$y=[-2.1]=-3$等。

②　y是x的函数。一般记为$y=D(x)$即

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{为有理数时}\\ 0 & \text{当}x\text{为无理数时}\end{cases}$$

这个函数叫做狄利克莱（Dirichlet）函数。

问题 3　下列各对函数是否为同一函数？

①　$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

②　$f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}$，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$；

③　$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$g(x)=1$；

④　$g=f(x)$，$u=f(x)$

答　要判断两个函数是否相同，关键在于判断它们的定义域和对应规律是否都相同。因此：

①　不相同。因为$g(x)=|x|$。即对应规律不相同。

②　不相同。因为定义域不同。

③　相同。因为定义域和对应规律都相同。

④　相同。因为定义域和对应规律都相同。

例如　$y=2x$、$u=2t$是表示同一函数。

由此可见，一个函数仅由定义域与对应规律就可完全确定，而与用什么字母表示无关。

2 函数的简单性质

(1) 单值性与多值性

对于定义域D内的每一个x值只能确定一个y值的函数是单值函数，否则是多值函数　多值函数通常拆成若干个单值支以改变其多值性。

问题　指出下列函数的单值性与多值性，如为多值函数试改变其多值性。

① $y=x^2$,

② $y=\pm\sqrt{x}$

答　①是单值函数。

② 是多值函数。$y=\sqrt{x}$或$y=-\sqrt{x}$是多值函数$y=\pm\sqrt{x}$的两个单值分支（如图1-1和1-2）

(2) 单调性

设函数$f(x)$定义在D内，若对于D内的任何两点x_1，x_2，

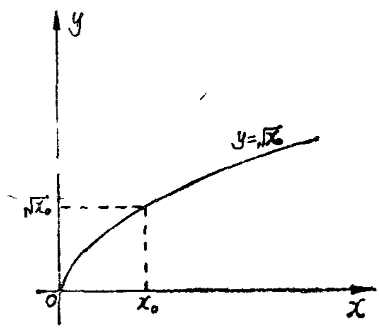


图　1-1

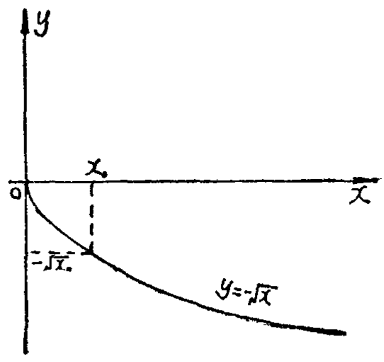


图　1-2

当 $x_1<x_2$ 时，就有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$）则称函数 $f(x)$ 在 D 内为一单调增加（或减少）函数。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。如果等号不出现，就称为严格单调函数。

问题：单调增加函数和单调减少函数的图像有何特点？

答：单调增加函数的图形，曲线 $y=f(x)$ 自左向右是逐渐上升的。（如图1-3）．单调减少函数的图形，曲线 $y=f(x)$ 自左向右是逐渐下降的。（如图1-4）

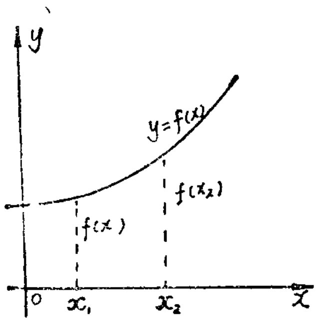


图1-3

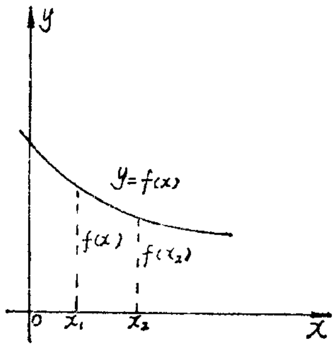


图1-4

（3）有界性

设函数 $f(x)$ 定义在 D 内，若存在某一常数 M，使得对于 D 内的任何 x 值，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则叫函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的。如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的。

问题：有界函数的图形有何特点？

答 有界函数的图形全部夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间。（如图1-5）

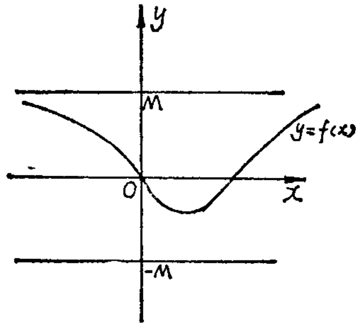


图1-5

(4) 奇偶性

设函数$f(x)$定义在D上，且当$x\in D$时，$-x\in D$，若在D上恒有$f(x)=f(-x)$。则称$f(x)$为偶函数。若恒有$f(x)=-f(-x)$则称$f(x)$为奇函数。

问题1　奇函数和偶函数的图形有何特点?

答　奇函数的图形关于原点中心对称（如图1-6），而偶函数的图形关于y轴对称。(如图1-7)。

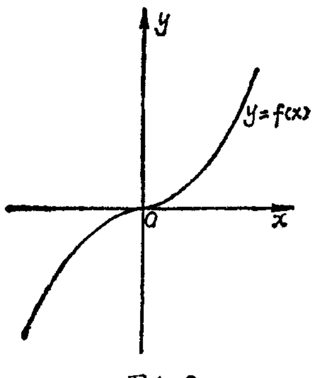


图1-6

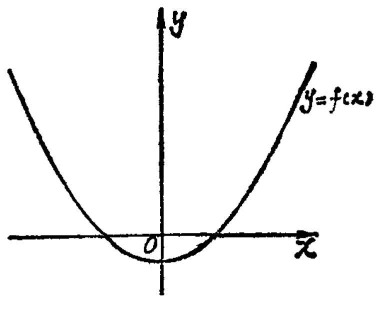


图1-7

问题 2　是否存在非奇非偶的函数和既是奇函数又是偶函数的函数？

答　存在。如$y=kx+b$，（k，b 为非零常数）为非奇非偶的函数。而 $y=0$ 为既是奇函数又是偶函数的函数。

（5）周期性

若对函数 $y=f(x)$ 存在一个正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，则叫函数 $f(x)$ 是以 T（T 是满足这种关系的最小正数）为周期的周期函数。

问题　若函数$y=f(x)$是以$T>0$为周期的周期函数，则 $f(ax)$（$a>0$）是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数。如何证明？

答　利用函数的周期性定义，只要能证明 $f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$ 就行了。

证：$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$ 因为 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数，所以

$$f(ax+T)=f(ax)$$

因此
$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$$

3　反函数

记 y 是 x 的函数$y=f(x)$，定义域为D，值域为R。如果对于每一个 $y_0\in R$，都可以从关系式 $f(x)=y$（看作是关于x的一个方程）确定出唯一的一个$x_0\in D$，使得$f(x_0)=y_0$。这样得到一个新函数 $x=\varphi(y)$ 就是 $f(x)$ 的反函数，也可记作 $x=f^{-1}(y)$。习惯上用字母x表示自变量，而用字母 y 表示函