普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

——微积分(上册)

吉林大学数学学院

主　编　李辉来　张魁元

副主编　王国铭　李忠范　白　岩

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学
——微积分(上 册)

吉林大学数学学院

主　编　李辉来　张魁元

副主编　王国铭　李忠范　白　岩

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材《大学数学》中的一册。系列教材《大学数学》吸收了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年出版的一批"面向21世纪课程教材"的成功经验，体现了时代的特点，着重加强基础、强化应用、整体优化、注重后效，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一。在体系与内容的编排上，本书认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求，对有关内容和习题进行了较好处理。

本书的内容有：预备知识、极限与连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．上册，微积分/李辉来，张魁元主编．北京：高等教育出版社，2004.7

普通高等教育"十五"国家级规划教材

ISBN 7-04-014395-X

Ⅰ．大…　Ⅱ．①李…②张…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第062098号

策划编辑　李艳馥　**责任编辑**　王　强　**封面设计**　于　涛

责任绘图　尹　莉　**责任印制**　孔　源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　销　新华书店北京发行所

印　刷　北京市昌顺印刷厂

开　本	787×960　1/16	版　次	2004年7月第1版
印　张	23.25	印　次	2004年7月第1次印刷
字　数	430 000	定　价	24.40元

《大学数学》系列教材编委会

前　言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材. 本系列教材共四册：《微积分》（上、下）、《线性代数》和《随机数学》.

本系列教材的编写体现了时代的特点. 本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合.

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华，借鉴近几年我国出版的一批“面向21世纪课程教材”成功经验，结合作者在吉林大学多年数学教学教研的具体实践，针对非数学类理工科大学生的特点编写的.

本系列教材内容充实，可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书. 在教材体系与内容的编排上，认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容，其他专业可以在不带“*”号的内容中，根据实际需要选择适当的章节讲授. 每章后面所配备的习题分成两类，其中（A）类是体现教学基本要求的习题；（B）类是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题. 与教材中“*”号内容相应的习题用“*”号做了标注. 本书的最后给出了习题参考答案或提示，供读者参考.

《微积分》上册的一、二章由李辉来编写，三、四章由李忠范编写，五、六章由王国铭编写，第七章由白岩编写.

在《大学数学》系列教材的编写过程中，得到了吉林大学教务处的大力支持. 数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导，公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作，研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作，在此一并致谢. 作者要特别感谢高等教育出版社高等理科分社的领导和编辑们，他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持.

由于我们水平所限，书中的错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

《大学数学》系列教材编委会

2004年5月

目　　录

第一章　预备知识 1

§1　实数集 1

1.1　集合 1

1.2　集合的运算 2

1.3　实数集 3

1.4　区间与邻域 4

1.5　实数的完备性与确界公理 5

§2　函　　数 7

2.1　常量与变量 7

2.2　映射与函数的概念 7

2.3　函数的几种特性 11

2.4　反函数与复合函数 15

2.5　初等函数 17

§3　常用逻辑符号简介 22

3.1　蕴含与等价 22

3.2　全称量词与存在量词 22

第二章　极限与连续函数 25

§1　数列的极限 25

1.1　整标函数与数列的概念 25

1.2　数列的变化趋势与数列极限的概念 26

1.3　收敛数列的性质 30

1.4　数列极限的四则运算 32

1.5　数列收敛的判别法 34

§2　函数的极限 41

2.1　函数极限的概念 41

2.2　函数极限的性质及运算法则 46

2.3　函数极限存在的判别法 49

§3　无穷小与无穷大 54

3.1　无穷小及其性质 54

3.2　无穷小的比较 56

3.3　无穷大 58

§4 连续函数 61
4.1 函数的增量 62
4.2 函数的连续性 63
4.3 函数的间断点及其分类 65
§5 连续函数的运算与初等函数的连续性 69
5.1 连续函数的和、差、积、商的连续性 69
5.2 反函数的连续性 70
5.3 复合函数的连续性 70
5.4 初等函数的连续性 72
§6 闭区间上连续函数的性质 74
6.1 最大值和最小值定理与有界性定理 74
6.2 介值定理 75
*6.3 函数的一致连续性 77

第三章 导数与微分 79

§1 导数的概念 79
1.1 引例 79
1.2 导数的概念 80
1.3 函数可导与连续的关系 85
§2 求导法则 88
2.1 函数四则运算的求导法则 88
2.2 反函数的求导法则 92
2.3 复合函数的求导法则 93
2.4 初等函数的导数 97
§3 高阶导数 99
3.1 高阶导数的概念 99
3.2 Leibniz 公式 104
§4 隐函数及由参数方程所确定的函数的求导法则 107
4.1 隐函数的求导法则 107
4.2 对数求导法 109
4.3 由参数方程所确定的函数的求导法则 111
§5 微分 115
5.1 微分的概念 115
5.2 微分的几何意义 117
5.3 微分的运算法则 118

5.4　高阶微分 119

*5.5　微分的应用 120

第四章　微分中值定理与导数的应用　124

§1　微分中值定理 124

1.1　Rolle 定理 124

1.2　Lagrange 中值定理 127

1.3　Cauchy 中值定理 133

§2　L'Hospital 法则 138

2.1　未定式的概念 138

2.2　未定式的定值法 138

§3　Taylor 公式 148

3.1　Taylor 多项式 148

3.2　Taylor 公式 149

3.3　Maclaurin 公式 153

3.4　Taylor 公式的简单应用 155

§4　函数单调性的判别法 158

§5　函数的极值与最值 162

5.1　函数的极值及其求法 162

5.2　最大值和最小值问题 166

§6　函数的凸性与曲线的拐点 171

6.1　凸函数的概念及其判别法 172

6.2　曲线的拐点及其求法 174

6.3　函数图形的描绘 176

§7　弧微分与平面曲线的曲率 182

7.1　弧微分 182

7.2　平面曲线的曲率 185

7.3　曲率圆与曲率半径 188

第五章　不定积分　190

§1　不定积分的概念与性质 190

1.1　原函数与不定积分 190

1.2　基本积分公式 192

1.3　不定积分的性质 193

§2　不定积分的换元积分法 196

2.1　第一换元法 196

2.2 第二换元法 201
§3 不定积分的分部积分法 206
§4 几种典型函数的积分举例 210
4.1 有理函数的积分 210
4.2 三角函数有理式的积分 215
4.3 无理函数应用举例 217

第六章 定积分 220

§1 定积分的概念与性质 220
1.1 定积分问题的引例 220
1.2 定积分的概念 222
1.3 定积分的几何意义 224
1.4 定积分的性质 224
§2 微积分基本定理 228
2.1 积分上限的函数及其导数 228
2.2 Newton-Leibniz 公式 230
§3 定积分的换元法和分部积分法 234
3.1 定积分的换元积分法 234
3.2 定积分的分部积分 237
§4 定积分的应用 240
4.1 微元法 240
4.2 平面图形的面积 241
4.3 体积 245
4.4 平面曲线的弧长 248
4.5 定积分在物理上的应用 251
§5 反常积分 255
5.1 无穷积分 255
5.2 无界函数积分 263

第七章 空间解析几何 271

§1 空间直角坐标系 271
1.1 空间点的直角坐标 271
1.2 空间两点间的距离 272
§2 向量及其运算 274
2.1 向量的概念 274
2.2 向量的加减法，向量与数的乘法 274

2.3　向量的坐标 277
2.4　向量的方向余弦 279
2.5　向量的乘积运算 281
§3　平面及其方程 289
3.1　平面的方程 289
3.2　两平面的夹角 292
3.3　点到平面的距离 294
§4　空间直线及其方程 295
4.1　空间直线的方程 295
4.2　点、直线、平面之间的关系 298
4.3　过直线的平面束方程 301
§5　曲面及其方程 304
5.1　曲面方程 304
5.2　柱面 305
5.3　旋转曲面 306
5.4　曲面的参数方程 307
§6　曲线及其方程 309
6.1　曲线方程 309
6.2　空间曲线在坐标面上的投影 311
§7　常见的二次曲面 314
7.1　椭球面 314
7.2　二次锥面 315
7.3　双曲面 317
7.4　抛物面 319

习题参考答案　323

参考文献　359

第一章　预备知识

作为学习微积分的准备知识，我们在本章中讲述集合、映射及函数的概念，介绍几个常用的逻辑符号．这些知识虽然在中学都学过，但有必要进一步加深理解和巩固，这样才能为学好大学数学奠定坚实的基础．

§1　实数集

集合是数学中的一个基本概念，它是学习微积分的基础知识．本节中首先介绍集合的概念与运算，然后讲述实数集与实数的完备性，最后介绍确界公理．

1.1　集合

我们把具有某种特性的事物 (或对象) 的全体就叫做一个 **集合**，构成集合的事物或对象称为集合的 **元素**．例如，一个班级里的全体同学就作成一个集合，每一位同学都是该集合中的一个元素；全体实数做成一个集合 (实数集)，每一个实数都是实数集的一个元素．

通常用大写字母 A,B,C,X,Y 等表示集合，用小写字母 a,b,c,x,y 等表示集合的元素．对于给定的集合来说，集合的元素是确定的，任何一个事物或对象，它或者是集合中的元素，或者不是集合中的元素，二者必居其一．当对象 a 是集合 A 中的元素时，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$；当 a 不是集合 A 中的元素时，就说 a 不属于 A，记为 $a\overline{\in}A$(或 $a\notin A$)．例如以 $\mathbf{R}$ 表示实数集，则数 1 是 $\mathbf{R}$ 中的元素，即 $1\in\mathbf{R}$，而虚数 i 不是 $\mathbf{R}$ 中的元素，即 $\mathrm{i}\overline{\in}\mathbf{R}$．

含有有限个元素的集合称为 **有限集**；不含任何元素的集合称为 **空集**，用 $\emptyset$ 作为空集的记号；既不是有限集又不是空集的集合就称为 **无限集**．

集合可以用不同的方法来表示，最常用的有两种：列举法和描述法．列举法是将集合的所有元素开列出来，写在花括号内，如整数集表示成

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}.$$

描述法是将集合的元素所具有的性质描述出来，一般写法为

$$A=\{x\mid x\text{所具有的性质}\},$$

例如，在平面直角坐标系中直线 $x+y-1=0$ 上所有点构成的集合，可以写成

$$A=\{(x,y)\mid x+y-1=0,x\text{与}y\text{均为实数}\}.$$

有的集合可以用不同的方法来表示. 例如集合 $\{x \mid x^2-1=0, x\text{为实数}\}$, 也可以用列举法写成 $\{-1,1\}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的 **子集**, 记作 $A \subset B$, 读作 B 包含 A 或 A 含于 B. 当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 时, 称集合 A 与集合 B**相等**, 记作 $A = B$.

如果在某问题的整个研究过程当中, 所论及的集合都是某一集合 U 的子集, 则称集合 U 为 **全集**. 本书是以实数集为全集进行研究的.

1.2 集合的运算

设有集合 A 与 B, 它们的 **并集** 记作 $A \bigcup B$, 具体定义如下:

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A\text{或}\, x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的 **交集** 记作 $A \bigcap B$(或 AB), 其定义如下:

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A\text{且}\, x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的 **差集** 记作 $A \setminus B$, 其定义如下:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A\text{但}\, x \overline{\in} B\}.$$

从上述定义可以看出, $A \bigcup B$ 就是 A 与 B 的所有元素放在一起作成的集合; $A \bigcap B$ 就是 A 与 B 的公共元素放在一起作成的集合; $A \setminus B$ 就是在 A 中去掉属于 B 中的元素后, 余下的元素作成的集合. 显然

$$A \setminus B \subset A \subset A \bigcup B, \quad AB \subset A.$$

集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_i \bigcup \cdots$ 表示集合 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 的所有元素放在一起作成的集合. 而 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_i \bigcap \cdots$ 表示集合 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 的公共元素作成的集合.

集合的运算满足如下规律:

1° $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$;

2° $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$, $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;

3° $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;

4° $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$, $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$;

5° 若$A_i \subset B (i = 1, 2, \cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset B$;

6° 若$A_i \supset B (i = 1, 2, \cdots)$,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supset B$.

以上运算规律请读者自行加以证明.

1.3 实数集

非负整数作成的集合称为 **自然数集**, 记作 $\mathbf{N}$, 即有

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

所有整数作成的集合称为 **整数集**, 记作 $\mathbf{Z}$, 它包含正整数、负整数和零, 即有

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}.$$

两个整数相除 (分母不为零) 称为有理数, 全体有理数作成的集合称为 **有理数集**, 记作 $\mathbf{Q}$, 即有

$$\mathbf{Q}=\{x\mid x=\frac{p_1}{p_2};\ p_1,p_2\in\mathbf{Z},\ p_2\neq 0\}.$$

有理数如果用十进制小数来表示, 则这些小数或者是有穷的, 或者是无限循环的. 例如 $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1}{3}=0.333\,3\cdots$. 反之, 有穷小数或无限循环小数都可以化成分数 (两个整数相除), 即它们为有理数.

在数轴上, 有理数对应的点称作有理点. 任何两个有理点之间必然还有有理点. 事实上, 任取 $a,b\in\mathbf{Q}$ 且 $a\neq b$, 则 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 介于 a 与 b 之间, 且 c 为有理数, 即 $c\in\mathbf{Q}$. 上述性质称为有理数的 **稠密性**.

我们称无限不循环小数为 **无理数**, 如 $\sqrt{2}=1.414\,213\,5\cdots$, $\pi=3.141\,592\,6\cdots$, $e=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$ 等都是无理数.

有理数与无理数统称为 **实数**. 全体实数作成的集合称为 **实数集**, 记作 $\mathbf{R}$. 实数集 $\mathbf{R}$ 中的每一个实数都与数轴上的点一一对应.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\ (\text{无限不循环小数}).\end{cases}$$

下面介绍实数的绝对值及其性质.

实数 x 的绝对值记作 $|x|$, 它的定义如下:

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0.\end{cases}$$

$|x|$ 就是数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值具有如下性质:

1° 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|x| \geqslant 0$. 当且仅当 $x = 0$ 时, 才有 $|x| = 0$;

2° 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $|-x| = |x|$;

3° 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

4° 设 $a > 0$, 则 $|x| < a$ 的充分必要条件是 $-a < x < a$;

5° 设 $a > 0$, 则 $|x| \leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a \leqslant x \leqslant a$;

6° 设 $a > 0$, 则 $|x| > a$ 的充分必要条件是 $x < -a$ 或者 $x > a$;

7° 设 $a > 0$, 则 $|x| \geqslant a$ 的充分必要条件是 $x \leqslant -a$ 或者 $x \geqslant a$;

8° 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;

9° 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $|x| - |y| \leqslant ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$;

10° 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $|xy| = |x| \cdot |y|$;

11° 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$.

1.4 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, 各种区间定义如下:

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

左开右闭区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

左闭右开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

上述区间统称为 **有限区间**, $b - a$ 叫做这些区间的长度, a 与 b 分别叫做这些区间的左端点与右端点. 上述区间在数轴上表示如图 1.1.

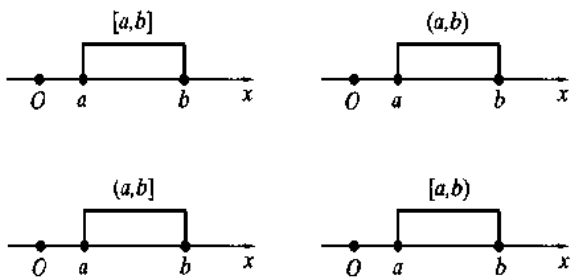


图 1.1

在数轴上, 负半轴方向上的无穷远点记作 $-\infty$, 读作负无穷大或负无穷; 正半轴方向上的无穷远点记作 $+\infty$, 读作正无穷大或正无穷. $-\infty$ 与 $+\infty$ 都不是具体的数.

下列区间统称为 **无穷区间**:

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}=\mathbf{R}$.

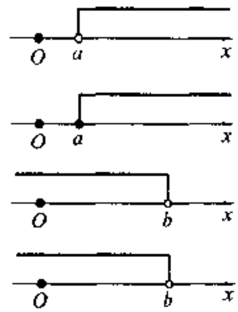


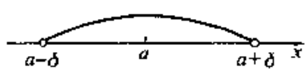
图 1.2

设 $a \in \mathbf{R}, \delta>0$, 称集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ**邻域**, 记作 $U(a,\delta)$, 即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

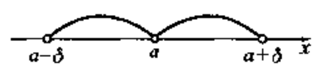
a 叫做邻域中心, δ 叫做邻域半径. 由邻域的定义可知, $U(a,\delta)$ 就是以 $a-\delta$ 为左端点、以 $a+\delta$ 为右端点的开区间, 如图 1.3 所示.

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$



邻域 $U(a,\delta)$

图 1.3



去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$

图 1.4

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 得到的点集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

叫做点 a 的 **去心邻域**, 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$, 如图 1.4 所示, 显然有

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\bigcup(a,a+\delta).$$

1.5 实数的完备性与确界公理

任何一个实数都对应数轴上惟一的一个点, 反之, 数轴上任何一个点都有惟一的一个实数与之对应 (这个数称为点的坐标), 因此实数与数轴上的点是一一对应的. 实数集 $\mathbf{R}$ 中的数就像数轴上的点一样, 按照大小顺序排列, 是连续不断的. 实数集的这个性质叫做实数的 **完备性**. 任意两个有理数之间都有无理数, 任意两个无理数之间都有无理数, 任意两个无理数之间都有有理数.

下面我们引进有界集与确界的概念.

定义 1.1 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，如果存在常数 l(或 L)，使得对一切 $x \in E$，都有

$$l \leqslant x \quad (\text{或} x \leqslant L),$$

则称数集 E**有下界**(或 **有上界**)，常数 l(或 L) 叫做数集 E 的一个 **下界**(或 **上界**). 否则就说 E 无下界 (或无上界).

如果数集 E 既有下界又有上界，则称 E**有界**，否则就说 E**无界**.

按上述定义，数集 E 有界，等价于存在常数 l 与 $L(l \leqslant L)$，使得对一切 $x \in E$，都有

$$l \leqslant x \leqslant L,$$

若取 $M = \max\{|l|, |L|\}$，则有 $|x| \leqslant M$. 因此 E 有界的充分必要条件是存在正数 M，使得对一切 $x \in E$，都有

$$|x| \leqslant M.$$

一个数集 E 如果有下界，那么下界不是惟一的，而是有无穷多个. 比如 l 是 E 的下界，那么比 l 小的任何常数 l' 还是 E 的下界. 同样，一个数集 E 如果有上界，那么上界也不惟一. 我们自然要问，在无穷多个下界 (或上界) 中是否存在最大的下界 (或最小的上界)? 最大下界是指，若常数 m 是 E 的下界，则比 m 大的任何常数都不是下界了. 由此引出确界的概念.

定义 1.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，如果存在常数 $\alpha \in \mathbf{R}$ (或$\beta \in \mathbf{R}$)，满足条件

(i) 对一切 $x \in E$ 都有 $x \geqslant \alpha$(或$x \leqslant \beta$)，即 α (或β) 为 E 的下界 (或上界);

(ii) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ (不论它有多么小)，都存在 $x_0 \in E$，使得

$$x_0 < \alpha + \varepsilon \quad (\text{或} x_0 > \beta - \varepsilon),$$

则称 α (或β) 为 E 的**下确界**(或**上确界**).

数集 E 的下确界 α 和上确界 β 分别记作

$$\alpha = \inf E, \quad \beta = \sup E.$$

例如，集合 $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 有下确界 0，有上确界 1. 集合 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 有下确界 0，但没有上确界.

下面给出一个判别上、下确界存在的一个充分性条件，称为确界公理.

确界公理 非空有下界的数集必有下确界，非空有上界的数集必有上确界.

由此可知，非空有界的数集必有下确界和上确界.

§2 函　　数

2.1 常量与变量

在自然界中和科学技术领域里，我们经常会遇到各种各样的量，其中有些量在整个过程中不发生变化，即保持固定数值，这种量叫做 **常量**; 有些量在整个过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做 **变量**. 习惯上用 a,b,c 等表示常量，用 x、y、z、t 等表示变量.

例如，在标准大气压下水的沸点是一个常量，它取固定数值 100. 一天的气温 T 是一个变量，它在最低气温与最高气温之间连续变化.

变量是可以取不同数值的量，任何变量都有它的取值范围，称为变量的 **变域**. 一个变量的变域是一个数集，它可以用数轴上的点集来表示. 比如某天的气温 T 最低为 10°C，最高为 20°C. 则 T 的变域就是区间 $[10,20]$.

在一定条件下或在不同的场合，常量与变量是可以互相转化的，即在某一场合为常量 (或变量) 的量，到了另一场合就可能成为变量 (或常量) 了. 比如重力加速度 g，在地球表面它是一个常量，但是到了太空中 g 就是变量了.

2.2 映射与函数的概念

1. **映射**

定义 2.1 设有集合 A,B，如果存在一个对应关系 f，使得对于 A 中的任意元素 x，都在 B 中有惟一的元素 y 与之对应 (记作$y=f(x)$)，则称 f 是从 A 到 B 的一个 **映射**，记作

$$f:\ A\to B,$$

并称 y 是 x 在映射 f 下的 **象**，x 称为 y 在映射 f 下的 **原象**. 集合 A 称为映射 f 的 **定义域**，而称集合

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$$

为映射 f 的 **值域**，显然 $f(A)\subset B$.

对于映射 $f:A\to B$，如果值域 $f(A)=B$，即 B 中每一个元素 y 都是映射 f 的象 (在 A 中都存在元素 x，使 $y=f(x)$)，则称映射 f 是 **满射**. 如果 f 将 A 中不同的元素映射到 B 中的象也不同，即若 $x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，我们就说映射 f 是 **单射**. 若 $f:\ A\to B$ 既是满射又是单射，则称 f 是 A 到 B 的 **一对一映射**.

例 2.1 设 $A=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$B=\{0,1,2,\cdots\}$，令

$$f:x\to|x|\quad(x\in A),\quad 即 f(x)=|x|,$$

则 f 是由 A 到 B 的映射，且为满射，但不是单射.