GAOXIAOGONGGONGKECONGSHU

高校公共课丛书

方能文　主编

线性代数

上海财经大学出版社

线 性 代 数

主　编　方能文
副主编　汤健儿　杨爱珍

上海财经大学出版社

内 容 提 要

本书根据国家教委高等教育司 1989 年 10 月审定的“高等学校财经类专业核心课程‘经济数学基础’教学大纲”要求重新编写而成。内容包括：行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型和投入产出经济数学模型等 7 章，各章都配有适量的习题，供学生巩固知识使用，书末附有答案与提示。

本书在保证学科系统性和科学严密性的前提下，尽力做到通俗易懂、由浅入深、循序渐进、联系实际、兼顾发展。本书可作为高等财经院校或工科院校经济管理专业的教材或教学参考书，也可作为经济管理人员的自学用书。

责任编辑　李炳钊
封面设计　周卫民

线 性 代 数

主　编　方能文
副主编　汤健儿　杨爱珍

上海财经大学出版社出版
（上海市中山北一路 369 号　邮编 200083）
新华书店上海发行所发行　　上海竟成印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 7.5 字数 192000
1996 年 2 月第 1 版　　1997 年 7 月第 2 次印刷
印数 5001～11000
ISBN　7-81049-029-x/O・02
定价：12.80 元

前　言

这是一册为新一代高等财经类院校的学生们编写的线性代数教材。线性代数这一数学工具在经济科学、管理科学中有着广泛的应用。学好这一门课程不仅为学习后继课程打下基础，而且对掌握现代经济理论并应用于实际很有帮助。

随着我国经济建设的发展和经济体制改革的深入，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论和实际工作者的重视，对掌握线性代数这门数学基础学科的深度和广度也提出了新的要求。为此，我们根据国家教育委员会高等教育司1989年10月审定的“高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”的要求，重新编写了这本教材。

本书内容包括：行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型和投入产出经济数学模型等7章。每章后附有习题，书末有习题参考答案和提示。

本书在保证学科的系统性、逻辑严密性和科学性的前提下，用简明的语言，尽可能多地向读者介绍财经类专业所必须的线性代数知识。我们尽力做到通俗易懂、由浅入深、循序渐进、联系实际、兼顾发展。本书可作为高等财经院校或工科院校经济管理专业的教材或教学参考书，也可作为经济管理人员的自学用书。

本书由上海财经大学基础部教师编写，参加编写的有王健（第一章）、李志远（第二章）、方能文（第三、第四章）、汤健儿（第五章）、钱晓明（第六章）、杨爱珍（第七章）。方能文任主编，汤健儿、杨爱珍任副主编。

在本书的编写、付印过程中，许多同行、同事提出了宝贵的意见，并给以关心、帮助，在此一并致谢。

限于编者水平，编写时间也较仓促，书中不当、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者　1995年10月

目　　录

第一章　行列式

在线性代数中线性方程组是一个基础部分，而研究线性方程组首先需要行列式这个重要工具。行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的。这一章主要介绍下面三个内容：

1. 行列式的概念；
2. 行列式的基本性质及计算方法；
3. 利用行列式解线性方程组。

§1·1　二阶与三阶行列式

中学代数中，我们早已学过用二阶行列式解二元线性方程组，用三阶行列式解三元线性方程组。这里我们对二阶与三阶行列式作简单的复习。

一、　二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式。

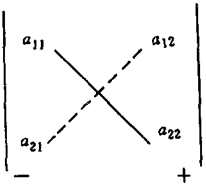

图 1－1

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式表示的代数和可用画线(图 1－1)的方法记忆。即实线联结的两元素的乘积减去虚线联结的两元素的乘积。

例 1　$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -8-15=-23$$

二、 三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式。

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式表示的代数和也可用画线(图 1 - 2)的方法记忆。其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

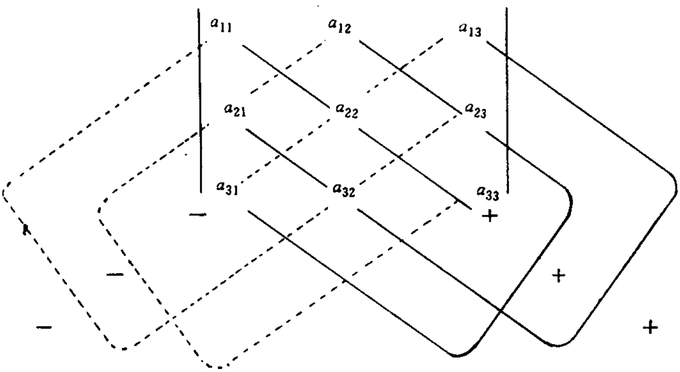

图 1 - 2

以上二阶、三阶行列式的计算方法也称为对角线法则。(行列式左上角到右下角元素的联线称为主对角线,右上角到左下角元素的联线称为次对角线。)

例 2 $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2\cdot 1\cdot 1 + (-4)\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1$$
$$-(-4)\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot(-1)$$
$$= -18$$

§1·2 排列与逆序

为了定义 n 阶行列式，先介绍一些预备知识。

定义 1.1 把 n 个不同的元素排成一排，叫做这 n 个元素的全排列，也称 n 级全排列(简称排列)。

例如，2431 是一个四级排列，45321 是一个五级排列。

n 个不同元素的所有排列种数，通常用 P_n 表示。下面讨论 P_n 的计算公式：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；这样继续下去，直到最后只剩一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法。于是，

$$P_n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

例 3 用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 由公式，1、2、3 三个不同数字的全排列总数 $P_3 = 3\times 2\times 1 = 6$。事实上，百位上可以从 1、2、3 三个数中任选一个，所以有 3 种选法；十位上只能从剩下的两个数中任选一个，所以有 2 种选法；而个位上只能取剩下的一个数。所以共有六个不同的三位数：123，132，213，231，312，321。

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序。一般把 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数由小到大次序规定为标准次序。

定义 1.2 在 n 个不同元素的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序。一个排列中逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。

定义 1.3 逆序数为偶数或零的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例 4 求排列 45321 的逆序数。

解 在排列 45321 中，4 排在首位，不产生逆序；

5 前面没有比 5 大的数，不产生逆序；

3 前面比 3 大的数有 2 个，故有 2 个逆序；

2 前面比 2 大的数有 3 个，故有 3 个逆序；

1 前面比 1 大的数有 4 个，故有 4 个逆序；

于是排列 45321 的逆序总和为

$$\tau(45321) = 0 + 0 + 2 + 3 + 4 = 9$$

故排列 45321 为奇排列。

定义 1.4 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换。

例如，经过 1,2 对换，排列 1524 变成了 2514，排列 5421 变成了 5412。显然，如果连续进行两次相同的对换，那么排列就还原了。

定理 1.1 一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

证明 先证相邻对换的情形。排列

$$\cdots\ j\ k\ \cdots \tag{1-1}$$

经过 j,k 对换变成

$$\cdots\ k\ j\ \cdots \tag{1-2}$$

这里"…"表示那些不动的数。显然在排列(1-1)中如果 j,k 与其它的数构成逆序，则在排列(1-2) 中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在(1-2) 中也不构成逆序；不同的只是 j,k 的次序。如果原来 j,k 组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个；如果原来 j,k 不

组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个。不论增加 1 还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了。因此，在这特殊情形，定理是对的。再证一般对换的情形。设排列为

$$\cdots\ j i_1 i_2 \cdots i_s k\ \cdots \qquad (1-3)$$

经过 j,k 对换，排列(1－3) 变成

$$\cdots\ k i_1 i_2 \cdots i_s j\ \cdots \qquad (1-4)$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来实现。从(1－3)出发，把 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，…，也就是说，把 k 一位一位地向左移动，经过 $s+1$ 次相邻对换，排列(1－3) 就变成

$$\cdots\ k j i_1 i_2 \cdots i_s\ \cdots \qquad (1-5)$$

从(1－5)出发，再把 j 一位一位地向右移动，经过 s 次相邻对换，排列(1－5) 就变成了排列(1－4)。因此 j,k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现，$2s+1$ 是奇数。相邻对换改变排列的奇偶性。显然奇数次相邻对换的最终结果改变了排列的奇偶性。

定理 1.2 所有 n 级排列中($n \geqslant 2$)，奇排列与偶排列各占一半。

证明 假若有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$。任取一个奇排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$，则由定理 1.1，把 j_1 与 j_2 对调所得排列 $j_2j_1j_3\cdots j_n$ 是一个偶排列。因此，用这种方法，每一个奇排列对应一个偶排列。而且，不同的奇排列不能对应同一个偶排列。故奇排列的个数不会大于偶排列的个数，即 $m \leqslant k$。同理可证 $k \leqslant m$。所以 $k=m=\frac{1}{2}n!$。例如，在 1、2、3 三个数的全排列中，奇排列与偶排列各为 3 个。事实上，123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列。

§1・3 n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的结构。三阶行列式的定义为：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

可以看出：

1. 三阶行列式右边每一项都是三个元素的乘积，而三个元素分别取自不同的行不同的列。项的一般形式（舍去符号）为：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

2. 各项的下标，当行指标按自然顺序排好后（我们是有意这样安排的），列指标正好是 1、2、3 三个数的某个排列，这样的排列共六种，对应三阶行列式的右端共含六项。

3. 各项前的符号规律：

带正号的三项，列指标是偶排列：123，231，312。

带负号的三项，列指标是奇排列：321，213，132。

这就是说，当行指标按自然顺序排好后，各项的符号由列指标排列的逆序数所确定，列指标为偶排列的项为正，列指标为奇排列的项为负。

于是三阶行列式可写成：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} \quad a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}
$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和。

上述规律对二阶行列式显然也成立。

按此规律，可把行列式推广到一般情形。

定义 1.5 令

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}
$$

叫做 n 阶行列式。其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $j_1j_2\cdots j_n$ 的排列求和。

定义表明，n 阶行列式是所有形如

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项的和，即：

1. 每一项是 n 个元素的乘积，且这 n 个元素取自不同的行不同的列。

2. $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 要对所有 $j_1j_2\cdots j_n$ 的排列求和，而 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列种数有 $n!$ 种，所以共有 $n!$ 项。

3. 当行指标按自然顺序排好后，各项的符号由列指标的排列逆序数所确定，且正项与负项的个数相同，都有 $\frac{1}{2}n!$ 项。

按此定义的二阶、三阶行列式与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的。当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意不要与绝对值符号混淆。

例 5 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由定义 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，展开式有 $n!$ 项。由于 D 中有许多零，不为零的项就大大减少。因此，只要考虑不为零的那些项。在行列式 D 中，第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零。因此，只要考虑 $j_n=n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1\,n-1}$，$a_{n-1\,n}$ 以外，其余的元素全为零。因此 j_{n-1} 只有 $n-1,n$ 这两种可能。由于 $j_n=n$，所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了，从而 $j_{n-1}=n-1$。这样逐步推上去，不难看出，在展开式中，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项以外，其余项全为零。于是

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这就是说，上三角形行列式的值等于主对角元素连乘积。(主对角线上元素称为主对角元素。)

作为上例的特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

这就是说，对角形行列式（主对角元素以外的元素全为零的行列式）的值也等于主对角元素的连乘积。

例 6 证明

$$\begin{vmatrix} O & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

证 若记 $a_i = b_{i,n-i+1}$，根据行列式定义，则

$$\begin{vmatrix} O & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & b_{1\,n} \\ & & b_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ b_{n\,1} & & & O \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n\,n-1\cdots 1)} b_{1\,n} b_{2\,n-1} \cdots b_{n\,1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行指标按自然顺序排列起来。事实上，数的乘法是可以交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的。一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1-6}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列。利用排列的性质，不难证明，(1-6) 的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \tag{1-7}$$

事实上，为了根据定义来确定(1-6)的符号，就要把这 n 个元素重新排一下，使得它们的行指标成自然顺序，也就是排成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{1-8}$$

于是，它的符号是 $(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$ (1-9)

下面证明(1-7)与(1-9)是一致的。我们知道，由(1-6)到(1-8)可以经过一系列元素的对换来实现，每作一次对换，元素的行指标与列指标所构成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就同时作一次对换，也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不变。这就是说，对(1-6)作一次元素的对换不改变(1-7)的值。于是，在一系列的对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$
$$=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

这就证明了(1-7)与(1-9)是一致的。

例如，$a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$ 是四阶行列式中的一项。$\tau(3214)=3$，$\tau(2143)=2$，于是它的符号应为 $(-1)^{3+2}=-1$。如将行指标按自然顺序排列，就是 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，$\tau(4123)=3$，因而它的符号也是 $(-1)^3=-1$。

由上面的讨论可知，为了确定每一项的符号，我们同样也可以将各项的列指标按自然顺序排列。于是，n 阶行列式又可定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-10}$$

§1·4 n 阶行列式的性质

根据行列式的定义，一般地四阶行列式要计算 4！=24 项，五阶行列式要计算 5！=120 项。当阶数很高时，根据定义计算行列

式几乎不可能。因此必须进一步讨论行列式的性质，以简化行列式的计算。

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等。

证明 设

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij} = a_{ji}\quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^T = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

由上节(1－10)，有

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

故 $\quad D = D^T$

由此性质可知，行列式中行与列具有同等地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也成立，反之亦然。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式的值变号。

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 交换第 i,j 两行而得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$，当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}, b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

而 $$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$

排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 与 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 奇偶性不同，则 D 与 D_1 的每一项都相差一个符号，故 $D=-D_1$。

为方便起见，以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_j 表示第 j 列。交换第 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换第 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$。

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零。

证 把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$。

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用 k 去乘此行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(第 i 行乘以 k，记作 kr_i。)

推论 1 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行