# 实数的扩充及极限运算的推广

王 建 举

厦门大学数学系

1979.8.

# 目　　次

# 实数的扩充及极限运算的推广

厦门大学数学系　王建华

## §1 引　　言

实数理论是数学分析的基础。由有理数扩充到实数，有Dedekind分割，Gauchy的基本序列，Cantor的等价序列，Weierstrass的单调序列，它们都是把实数给予理论上严密的阐述。这些古典成果，从古典分析看来，已是天衣无缝。但最近由于抽象代数、拓扑学、泛函分析的出现，对实数再讨论再认识有了必要。本文试图用泛函观点对实数理论作一些探索，可能是不成熟的见解，望大方之家予以指正。

## §2 实数的扩充

用$R$表示实数集，$s$表示实数列全体所成之集：

$$s=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_i\in R,\ i=1,2,\cdots\}.$$

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in s$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in s$，规定加法与数乘运算为

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$$

$$ax=(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n,\cdots),a\in R$$

则$s$关于这两种运算是一个线性空间。又设

$$\theta=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):\lim_{n\to\infty}x_n=0,x_i\in R,i=1,2,\cdots\}$$

显然$\theta$是$s$的线性子空间。我们记$s$关于$\theta$的商空间$s/\theta$为$G$，其元素记为$\alpha,\beta,\cdots$等等。$\theta$为$G$中的零元。

为方便起见，用$(x_n)$表示实数列$(x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots)$，用$\{x_n\}$表示以$(x_n)$为代表的类，即$G$中的元素。

再用$m$表示有界实数列全体所成之集。$m\subset s$。若$x,y\in m$，规定乘法为

$$xy=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n,\cdots),$$

于是$m$关于这三种运算是一可交换代数。由于$\theta$是$m$中的一个理想，故$m$关于$\theta$的商

代数 $m/\theta$ 也是可交换代数，我们记为 $K$，$K\subset G$。$K$ 中的元素仍旧记为 $\alpha, \beta, \cdots$ 等等。$K$ 中有单位，就是以 $(1,1,\cdots,1,\cdots)$ 为代表的那一类。但包含有零因子，比如 $\alpha=\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},\cdots\}$，$\beta=\{\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\cdots\}$，则 $\alpha\beta=\theta$，但 $\alpha\neq\theta$，$\beta\neq\theta$。

下面记

$$\phi=\{\{x_n\}:\lim_{n\to\infty}|x_n|=0\}.$$

Ⅰ. 若 $\alpha,\beta\in K$，且 $\beta\bar{\in}\phi$，则方程

$$\beta x=\alpha$$

在 $K$ 中有解。

证 设 $\alpha=\{x_n\}$，$\beta=\{y_n\}$。因 $\beta\bar{\in}\phi$，故 $\underline{\lim_{n}}|y_n|>0$。令

$$z_n=\begin{cases}\dfrac{x_n}{y_n} & (y_n\neq 0)\\ 1 & (y_n=0)\end{cases}$$

则 $\{z_n\}\in K$。实际上，当 $n$ 充分大时，$z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$。而且存在 $\delta>0$，使得当 $n$ 充分大时

$$|y_n|\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}|y_n|-\delta>0.$$

于是当 $n$ 充分大时

$$|z_n|=\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\leqslant\frac{c}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|y_n|-\delta},$$

此处假定 $|x_n|\leqslant c$，$n=1,2,\cdots$。

其次，不难看到 $x=\{z_n\}$ 是这方程的解。

可见，当分母非 $\phi$ 中的元素时除法总是可以进行的。

由此可推出，不属于 $\phi$ 的元素都不是零因子。

我们知道[1][6]，$m$ 关于范数

$$\|x\|=\sup_n|x_n|$$

是 Banach 空间，此外还有

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|,$$

从而 $m$ 是 Banach 代数[2]。

Ⅱ. $\theta$ 是 $m$ 中的闭集。

证 设

$$\alpha^{(p)}=(x_n^{(p)})=(x_1^{(p)},x_2^{(p)},\cdots,x_n^{(p)},\cdots)\in\theta$$

$$\alpha=(x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in m$$

又设 $$\|(x_n^{(p)})-(x_n)\|=\sup_n|x_n^{(p)}-x_n|\to 0 \quad (p\to\infty).$$

对 $\varepsilon/2$ 存在自然数 $p_0$，使得

$$|x_n^{(p_0)}-x_n|<\varepsilon/2 \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是 $$|x_n|<|x_n^{(p_0)}|+\varepsilon/2 \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于 $(x_n^{(p_0)})\in\theta$，故对 $\varepsilon/2$，存在自然数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$(x_n^{(p_0)})<\varepsilon/2$$

于是当 $n\geqslant N$ 时，

$$|x_n|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon ,$$

故 $(x_n)\in\theta$，所以 $\theta$ 是闭集。证毕。

由于 $\theta$ 是 $m$ 中的闭理想，故 $K=m/\theta$ 关于范数

$$\|\alpha\|=\inf_{(x_n)\in\alpha}\|(x_n)\| = \inf_{(x_n)\in\alpha}\sup_n|x_n|$$

是 Banach 代数[2]。

**Ⅱ.** 设 $\alpha=\{x_n\}\in K$，则

$$\|\alpha\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n| .$$

证 因

$$\text{snp}|x_n|\geqslant\overline{\lim_n}|x_n|$$

故 $$\inf_{(x_n)\in\alpha}\sup_n|x_n|\geqslant\overline{\lim_n}|x_n| ,$$

即 $$\|\alpha\|\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n| .$$

另方面，考虑这样的集合 $\tilde{\alpha}$，它的元素是

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_n,\cdots)$$
$$(x_2,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_n,\cdots)$$
$$(x_3,x_3,x_3,x_4,\cdots,x_n,\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是 $\alpha$ 中的一个代表，于是 $\tilde{\alpha}\subset\alpha$，因而

$$\inf_{(x_n)\in\tilde{\alpha}}\sup_n|x_n|\geqslant\inf_{(x_n)\in\alpha}\sup_n|x_n|.$$

但是
$$\inf_{(x_n)\in\tilde{\alpha}}\sup_n|x_n|=\inf_m\sup_{n\geq m}|x_n|$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n|$$

故得
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n|\geq\inf_{(x_n)\in\alpha}\sup_n|x_n|\|\alpha\|$$

于是
$$\|\alpha\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_n|.$$

Ⅲ. $K$是不可分的。

证 [0,1] 中的无理数全体是不可列的。把每个无理数写为二进位制小数
$$0.x_1x_2\cdots x_n\cdots\quad(x_k=0\text{ 或 }1,\ k=1,2,\cdots)$$
再把这些数按下述方式进行分组：与 $0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ 只有有限个数字不相同的数归为一组（同数位的数字相比较），于是每一组只有可列个元素。因此由这些组所构成的集合的基数必定是不可列的。现从每一组取出一个代表元素 $0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ 并用下述方式与$K$中元素建立对应：
$$0.x_1x_2\cdots x_n\cdots\leftrightarrow\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$
$K$中的这些元素全体记为$\widetilde{K}$，于是$\widetilde{K}$也是不可列集。任取 $\alpha,\beta\in\widetilde{K}$，于是
$$\|\alpha-\beta\|=\overline{\lim_n}|x_n-y_n|=1$$

这就是说，我们找到一个不可列集$\widetilde{K}$，它的任意两个元素之间的距离为1，故$K$是不可分的。

Ⅳ. 设 $\alpha\in K$，又设 $(x_n)\in\alpha$ 且 $\lim\limits_n x_n=a$ 则
$$(y_n)\in\alpha\rightleftharpoons\lim_{n\to\infty}y_n=a$$

证→设 $(y_n)\in\alpha$，于是 $y_n-x_n\to0\ (n\to\infty)$，故
$$y_n-a=(y_n-x_n)+(x_n-a)\to0\quad(n\to\infty).$$
← 设 $\lim\limits_n y_n=a$. 于是
$$y_n-x_n=(y_n-a)+(a-x_n)\to0\quad(n\to\infty)$$
故 $(y_n)\in\alpha$.

由此看到：如果$\alpha$包含实数列$(a,a,\cdots,a\cdots)$，则$\alpha$中的其它各实数列都收敛于实数$a$，且此类包含一切收敛于$a$的实数列。我们把由这种类所构成的集合记为$R^*$，于是$R^*$与$R$之间建立了一对一对应：
$$a\leftrightarrow\{a,a,\cdots,a,\cdots\}.$$

在这种对应下，保持了四则运算，且其范数就是绝对值：

$$a+b \leftrightarrow \{a+b\}$$

$$a-b \leftrightarrow \{a-b\}$$

$$ab \leftrightarrow \{ab\}$$

$$\frac{a}{b} \leftrightarrow \left\{\frac{a}{b}\right\} \quad b\neq 0$$

$$|a| = \|a\|$$

因此 $R\subset K$，即$K$是实数集的一个真扩充．今后我们把 $\{a\}$ 简记为 $a$，特别 $\theta$ 也记为 0。

Ⅴ．$G, K, G\setminus K, K\setminus R$ 的基数都与实数集$R$的基数相同。

证　由实数列全体所构成的集合 $s$ 的基数与实数集的基数相同[3]。显然$G$的基数不大于 $s$ 的基数。但因 $R\subset K\subset G$，故 $K, G$ 的基数与实数集的基数相同。

现设 $\alpha$ 是由$(1,-1,1,-1,\cdots)$所代表的类，则 $\alpha\in K\setminus R$，于是对每个实数 $a$，$a+\alpha\in K\setminus R$。因为 $a+\alpha$，$a\in R$ 全体所成之集的基数与实数集的基数相同，故 $K\setminus R$ 的基数与实数集的基数相同．

再设 $\beta$ 是由 $(1,2,\cdots,n,\cdots)$ 所代表的类，则 $\beta\in G\setminus K$。于是对每个实数 $a$，$a+\beta\in G\setminus K$。因由 $a+\beta, a\in R$ 全体所成之集与实数集具有相同的基数，故 $G\setminus K$ 与实数集也有相同的基数。

## §3　半　　序

**定义**　若 $\{x_n\}=\alpha\in G$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n>0$ 时，则称 $\alpha$ 大于 0 或 0 小于 $\alpha$，记为 $\alpha>0$ 或 $0>\alpha$。

若 $\alpha,\beta\in G$，且 $\alpha-\beta>0$ 时，称 $\alpha$ 大于 $\beta$ 或 $\beta$ 小于 $\alpha$，记为 $\alpha>\beta$ 或 $\beta<\alpha$。

当 $\alpha>\beta$ 或 $\alpha=\beta$ 时，记为 $\alpha\geqslant\beta$。

显然$G$在关系“$\geqslant$”下是一个半序集而且是定向集。实际上，设 $\alpha=\{x_n\}$，$\beta=\{y_n\}$，取

$$z_n=\max(x_n+1, y_n+1)$$

则 $\gamma=\{z_n\}, \gamma>\beta, \gamma>\alpha$。

Ⅰ．$G$是半序群[4]，而且当 $a\in R$ 时，若 $a>0$，由 $\alpha\geqslant\beta$ 可得 $a\alpha\geqslant a\beta$；若 $a<0$ 时，由 $\alpha\geqslant\beta$ 可得 $a\alpha\leqslant a\beta$，

证　设 $\alpha$，$\beta$，$\gamma\in G$，$\alpha=\{x_n\}$，$\beta=\{y_n\}$，$\gamma=\{z_n\}$，又不妨设 $\alpha>\beta$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)>0$，故

$$\lim_{n\to\infty}[(x_n+z_n)-(y_n+z_n)]=\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)>0\ ,$$

因而$\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

其次，当$a>0$时，则

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n-ay_n)=a\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)>0\ .$$

当$a<0$时，则

$$\lim_{n\to\infty}(ay_n-ax_n)=\lim_{n\to\infty}(-a)(x_n-y_n)=-a\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)>0\ .$$

Ⅱ．$K$是半序环[4]．

证 （i）若$\alpha\geqslant\beta$，$\gamma\geqslant\theta$则$\alpha\gamma\geqslant\beta\gamma$．为此设$\alpha=\{x_n\}$，$\beta=\{y_n\}$，$\gamma=\{z_n\}$，不妨设$\alpha>\beta$，$\gamma>\theta$，于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_nz_n-y_nz_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)\lim_{n\to\infty}z_n>0\ .$$

（ii）若$\alpha\leqslant0$，$\beta\geqslant0$，则$\alpha\beta\leqslant0$．不妨设$\alpha<0$，$\beta>0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}(0-x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}[(-x_n)y_n]\geqslant\lim_{n\to\infty}(-x_n)\lim_{n\to\infty}y_n>0\ .$$

（iii）若$\alpha\leqslant0$，$\beta\leqslant0$，则$\alpha\beta\geqslant0$．不妨设$\alpha<0$，$\beta<0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}[(-x_n)(-y_n)]\geqslant\lim_{n\to\infty}(-x_n)\lim_{n\to\infty}(-y_n)>0\ .$$

Ⅲ．$\{x_n\}>\{y_n\}\rightleftharpoons$存在实数$c>0$与自然数$N$，当$n\geqslant N$时，$x_n>y_n+c$ ．

证 $\rightarrow$ 设$\{x_n\}>\{y_n\}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)>0$，于是存在正实数$c$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)>c>0$，从而存在自然数$N$，当$n\geqslant N$时

$$x_n-y_n>c\text{ 或 }x_n>y_n+c\ .$$

$\leftarrow$显然。

我们注意到，当$a$，$b$是实数时，作为$G$中的元素，这两种序是一致的。

现对$G$中一些特殊的元素引入记号：

$$\infty_1=\{(1,2,\cdots,n,\cdots)\}$$
$$\infty_2=\{(2,3,\cdots,n+1,\cdots)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\infty_1=\{(-1,-2,\cdots,-n,\cdots)\}$$
$$-\infty_2=\{(-2,-3,\cdots,-n-1,\cdots)\}$$

于是有

$$\cdots<-\infty_2<-\infty_1,\ \infty_1<\infty_2<\cdots$$

且对任意的$a\in R$有

$$-\infty_1<a<\infty_1\ .$$

## §4 实函数的扩充

Ⅰ．设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的连续函数。如果 $\{x_n\}$，$\{x'_n\}\in K$ 且 $\{x_n\}=\{x'_n\}$ 则

$$\{f(x_n)\}=\{f(x'_n)\}$$

且 $\{f(x_n)\}\in K$ ．

证　设 $|x_n|\leqslant M$，$|x'_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$。由于连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-M,M]$ 上一致连续，故对实数 $\varepsilon>0$ 存在自然数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$|x_n-x'_n|<\delta,\quad |f(x_n)-f(x'_n)|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(x'_n)]=0\ ,$$

故

$$\{f(x_n)\}=\{f(x'_n)\}.$$

其次，由于连续函数 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上有界，故 $\{f(x_n)\}\in K$ ．

**定义**　设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的连续函数，规定

$$f(\{x_n\})=\{f(x_n)\}\ ,\quad \{x_n\}\in K\ .$$

比如，当 $\{x_n\}\in K$ 时，有

$$[\{x_n\}]^m=\{(x_n)^m\}\quad (m\text{是自然数}),$$

$$a^{\{x_n\}}=\{a^{x_n}\}\quad (a\text{是正实数})$$

$$\mathrm{sh}\{x_n\}=\{\mathrm{sh}x_n\},\quad \mathrm{ch}\{x_n\}=\{\mathrm{ch}x_n\}\ .$$

Ⅱ．设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的一致连续函数。如果 $\{x_n\}$，$\{x'_n\}\in G$，且 $\{x_n\}=\{x'_n\}$，则

$$\{f(x_n)\}=\{f(x'_n)\}$$

Ⅲ．设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的连续函数，如果除了有限个点外都是可微的，且 $|f'(x)|\leqslant M$，则Ⅱ的结论成立．

证　设 $a<b$ 为任意两个实数，中 $c_1<c_2<\cdots<c_k$ 为 $[a,b]$ 中所有不可微的点，于是有

$$\begin{aligned}
&|f(b)-f(a)|=\\
&=|[f(b)-f(c_k)]+[f(c_k)-f(c_{k-1})]+\cdots+[f(c_1)-f(a)]|\\
&\leqslant|f'(\xi_1)|(b-c_k)+|f'(\xi_2)|(c_k-c_{k-1})+\cdots+|f'(\xi_{k+1})|(c_1-a)\\
&\leqslant M(b-c_k+c_k-c_{k-1}+\cdots+c_1-a)=M(b-a)
\end{aligned}$$

可见 $f(x)$ 在 $R$ 上一致连续．

**定义**　设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的一致连续函数规定

$$f(\{x_n\})=\{f(x_n)\},\quad \{x_n\}\in G\ .$$

比如，当 $\{x_n\}\in G$ 时，

$$\sin\{x_n\}=\{\sin x_n\},\quad \cos\{x_n\}=\{\cos x_n\},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\{x_n\}=\{\operatorname{arc\,tg} x_n\},\quad \operatorname{arc\,ctg}\{x_n\}=\{\operatorname{arc\,ctg} x_n\},$$

$$|\{x_n\}|^\lambda=\{|x_n|^\lambda\}\quad (\lambda\text{是不大于 1 的正实数}).$$

Ⅳ．设 $f(x),g(x)$ 是定义在 $R$ 上取实值的连续函数，如果对任意实数 $x$ 都有 $f(x)=g(x)$，则对一切 $\alpha\in K$ 都有 $f(\alpha)=g(\alpha)$。若 $f(x),g(x)$ 是一致连续的，则对一切 $\alpha\in G$ 都有 $f(\alpha)=g(\alpha)$。

证
$$f(\alpha)=f(\{x_n\})=\{f(x_n)\}=\{g(x_n)\}$$
$$=g(\{x_n\})=g(\alpha).$$

这个性质表明：在 $R$ 上成立的公式，当扩充到 $K$ 或 $G$ 上也成立。比如

$$(\operatorname{ch}\alpha)^2-(\operatorname{sh}\alpha)^2=1,\quad \alpha\in K$$

$$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1,\quad \alpha\in G.$$

可把上述的定义推广到多元函数的情形。

记 $R^m=R\times R\times\cdots\times R$。

**定义** 设 $f(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)})$ 是定义在 $R^m$ 上取实值的连续函数，如果 $\{x_n^{(1)}\},\cdots,\{x_n^{(m)}\}\in K$，规定

$$f(\{x_n^{(1)}\},\cdots,\{x_n^{(m)}\})=\{f(x_n^{(1)},\cdots,x_n^{(m)})\};$$

若 $f(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)})$ 在 $R^m$ 上一致连续，对任意的 $\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\},\cdots,\{x_n^{(m)}\}\in G$，规定

$$f(\{x_n^{(1)}\},\cdots,\{x_n^{(m)}\})=\{f(x_n^{(1)},\cdots,x_n^{(m)})\}.$$

Ⅴ．设 $f(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 是定义在 $R^m$ 上取实值的连续函数，如果除了有限个点外，其它各点偏导数均存在，而且 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x^{(i)}}\right|\leqslant M$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则它在 $R^m$ 上一致连续。

证 考虑 $R^m$ 中任意的两点 $(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})$，$(b^{(1)},\cdots,b^{(m)})$，记

$$h^{(i)}=b^{(i)}-a^{(i)}\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

又考虑函数

$$\varphi(t)=f(a^{(1)}+th^{(1)},\cdots,a^{(m)}+th^{(m)}).$$

假定 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上的 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 是不可微的点，于是

$$\varphi(1)-\varphi(0)=[\varphi(1)-\varphi(t_k)]+[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]+\cdots+[\varphi(t_1)-\varphi(0)]$$
$$=\varphi'(\xi_1)(1-t_k)+\varphi'(\xi_2)(t_k-t_{k-1})+\cdots+\varphi'(\xi_{k+1})(t_1-0)$$

因
$$|\varphi'(\xi_i)|=\left|\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}h^{(1)}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^{(m)}}h^{(m)}\right|_{\xi_i}$$
$$\leqslant M(|h^{(1)}|+\cdots+|h^{(m)}|)$$

故
$$|f(b^{(1)},\cdots,b^{(m)})-f(a^{(1)},\cdots,a^{(m)})|=|\varphi(1)-\varphi(0)|\leqslant$$

$$\leqslant M(|h^{(1)}|+\cdots+|h^{(m)}|)=M(|b^{(1)}-a^{(1)}|+\cdots+|b^{(m)}-a^{(m)}|)\ .$$

比如 $\cos(x+y)$，$\sin(x+y)$ 满足 $V$ 的条件，故对任意的 $\{x_n\},\{y_n\}\in G$ 有

$$\sin(\{x_n\}+\{y_n\})=\{\sin(x_n+y_n)\}$$

$$\cos(\{x_n\}+\{y_n\})=\{\cos(x_n+y_n)\}\ .$$

Ⅵ. 设 $f(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$，$g(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 是定义在 $R^m$ 上取实值的连续函数，若对任意的 $(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})\in R^m$ 都有

$$f(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})=g(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})\ ,$$

则对一切 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in K$ 有

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=g(\alpha_1,\cdots\alpha_m)\ .$$

若 $f$,$g$ 在 $R^m$ 上一致连续，则对一切 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in G$ 有

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=g(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\ .$$

由此得到：

$$a^{\alpha+\beta}=a^{\alpha}a^{\beta}\quad(a\text{ 为正实数}),\ \alpha,\beta\in K\ ,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \alpha,\beta\in G$$

等等.

Ⅶ. 设 $f(x)$是定义在 $a>x$（$a$ 为实数）上取实值的连续函数，当 $a<\alpha$，$\alpha\in K$ 时，又设 $\alpha=\{x_n\}=\{x'_n\}$，则

$$\{f(x_n)\}=\{f(x'_n)\}\ ,$$

而且是$K$中的元素.

若 $f(x)$ 在 $\varepsilon+a<x(\varepsilon>0)$ 上一致连续，则

$$\{f(x_n)\}=\{f(x'_n)\}\ ,$$

其中 $\alpha=\{x_n\}=\{x'_n\}\in G$，且 $a<\alpha$.

证　因 $a<\alpha$，即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-a)>0\ ,$$

故存在自然数$N$和正实数 $c$，当 $n\geqslant N$ 时

$$x_n-a>c>0\ .$$

于是当 $n\geqslant N$ 时，$x_n>a+c$. 同理可证当 $n$ 充分大时 $x'_n>a+c$. 然后与Ⅰ类似可证其结论.

**定义**　设 $f(x)$ 是定义在 $a>x$（$a$ 为实数）上的取实值的连续函数，规定

$$f(\{x_n\})=\{f(x_n)\},\quad a<\{x_n\},\quad \{x_n\}\in K;$$

当 $f(x)$ 在 $\varepsilon+a<x$，$\varepsilon>0$ 一致连续时，规定

$$f(\{x_n\})=\{f(x_n)\},\quad a<\{x_n\},\quad \{x_n\}\in G;$$

比如对加马函数 $\Gamma(x)$ 有

$$\Gamma(\{x_n\})=\{\Gamma(x_n)\}\qquad 0<\{x_n\},\quad \{x_n\}\in K$$

$$(\{x_n\})^{\lambda}=\{x_n^{\lambda}\}\qquad 0<\{x_n\},\quad \{x_n\}\in K(\lambda\text{是正实数})$$

$$\ln\{x_n\}=\{\ln x_n\}\qquad 0<\{x_n\},\quad \{x_n\}\in G.$$

上述结果可推广到多元函数的情形。比如

$$\{x_n\}^{\{y_n\}}=\{x_n^{y_n}\},\quad 0<\{x_n\},\quad \{x_n\},\{y_n\}\in K.$$

同样地，有类似于Ⅳ，Ⅵ的结果。比如有

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\qquad 0<\alpha,\ \alpha\in K$$

$$\ln\alpha\beta=\ln\alpha+\ln\beta\qquad 0<\alpha,\ 0<\beta,\ \alpha,\ \beta\in G$$

$$\ln\frac{\alpha}{\beta}=\ln\alpha-\ln\beta\qquad 0<\alpha,\ 0<\beta,\ \alpha,\ \beta\in G$$

## §5 极限运算的代数化

本节举例说明如何把极限运算代数化。

例 1 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{2^n}+\sin\sqrt{n}\right)-\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}\sin\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right].$$

解

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{2^n}+\sin\sqrt{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\sin\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\left\{\frac{n}{2^n}+\sin\sqrt{n}\right\}-\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}\left\{\sin\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\left(\left\{\frac{n}{2^n}\right\}+\left\{\sin\sqrt{n}\right\}\right)-\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}\left\{\sin\left(\sqrt{n+1}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=e\sin\{\sqrt{n}\}-e\sin\left(\{\sqrt{n+1}\}+\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$=e\sin\{\sqrt{n}\}-e\sin\{\sqrt{n}\}=0$$

其中 $\{\sqrt{n}\}=\{\sqrt{n+1}\}$，因为

$$|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}|=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0\ (n\to\infty).$$

故此极限为 0．

**例 2** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2^n}+\sqrt{n+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\lg n}{n}+\sqrt{n+2}\right)\cos\left(\frac{2^n}{2!}+\sqrt{n+3}\right)\right].$$

**解** 因

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{\frac{n}{2^n}\right\}=\left\{\frac{\lg n}{n}\right\}=\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}=0$$

$$\{\sqrt{n}\}=\{\sqrt{n+1}\}=\{\sqrt{n+2}\}=\{\sqrt{n+3}\}$$

**故**

$$\left\{\sin\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2^n}+\sqrt{n+1}\right)+\cos\left(\frac{\lg n}{n}+\sqrt{n+2}\right)\cos\left(\frac{2^n}{n!}+\sqrt{n+3}\right)\right\}$$

$$=\sin\{\sqrt{n}\}\sin\{\sqrt{n+1}\}+\cos\{\sqrt{n+2}\}\cos\{\sqrt{n+3}\}$$

$$=\sin^2\{\sqrt{n}\}+\cos^2(\sqrt{n})=1.$$

**故此极限为** 1.

**例 3** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cos^2\left((-1)^n+\dfrac{\lg n}{n}\right)+\sin^2\left((-1)^n+\dfrac{n}{2^n}\right)-\sin\operatorname{arc\,tg}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{2^{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}}\right].$$

**解**

$$\left\{\frac{\cos^2\left((-1)^n+\dfrac{\lg n}{n}\right)+\sin^2\left((-1)^n+\dfrac{n}{2^n}\right)-\sin\operatorname{arc\,tg}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{2^{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}}\right\}$$

$$=\frac{\left\{\cos^2\left((-1)^n+\dfrac{\lg n}{n}\right)+\sin^2\left((-1)^n+\dfrac{n}{2^n}\right)-\sin\operatorname{arc\,tg}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\right\}}{\left\{2^{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}\right\}}$$

$$=\frac{\cos^2\{(-1)^n\}+\sin^2\{(-1)^n\}-\sin\operatorname{arc\,tg}\{n\}}{2^{\sin\{n\}}}$$

$$=\frac{1-\sin\dfrac{\pi}{2}}{2^{\sin\{n\}}}=0.$$

**故此极限为** 0.

**例 4** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)\cos\left(n+\frac{1}{n^2}\right)+\cos^2\left(n+\frac{1}{n^3}\right)\cos\left(n+\frac{1}{n^4}\right)\right].$$

解 $\left\{\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)\cos\left(n+\frac{1}{n^2}\right)+\cos^2\left(n+\frac{1}{n^3}\right)\cos\left(n+\frac{1}{n^4}\right)\right\}$

$$=\left\{\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}\left\{\cos\left(n+\frac{1}{n^2}\right)\right\}+\left\{\cos^2\left(n+\frac{1}{n^3}\right)\right\}\left\{\cos\left(n+\frac{1}{n^4}\right)\right\}$$

$$=\sin^2\{n\}\cos\{n\}+\cos^2\{n\}\cos\{n\}$$

$$=(\sin^2\{n\}+\cos^2\{n\})\cos\{n\}=\cos\{n\}=\{\cos n\}.$$

故上述数列极限不存在，但等价于数列 $(\cos n)$.

## §6 极 限 算 子

仍旧用 $s$ 表示由全体实数列所成之集，用 $m$ 表示由全体有界实数列成之集，又用 $c$ 表示由全体收敛实数列成之集。于是

$$c\subset m\subset s.$$

用 $L$ 表示由 $s$ 到 $G$ 的自然映射，即对 $x=(x_n)\in s$,

$$L(x)=\alpha,\quad \alpha=\{x_n\}.$$

于是 $L$ 是由 $s$ 到 $G$ 的同态映射而且把 $m$ 映为 $K$，$c$ 映为 $R$. $R\subset K\subset G$.

$L$ 具有下列性质：

$$L(x+y)=L(x)+L(y),\quad x,y\in s,$$

$$L(ax)=aL(x),\quad a\in R,x\in s,$$

$$L(xy)=L(x)L(y),\quad x,y\in m,$$

$$L\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{L(x)}{L(y)},\quad x,y\in m,L(y)\bar{\in}\phi.$$

特别当 $x=(x_n)\in c$ 时

$$L(x)=\lim_{n\to\infty}x_n,$$

因此 $L$ 是极限运算的一种扩充. 我们称 $L$ 为极限算子.

当 $x=(x_n)\in m$ 时，$\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$，$\|L(x)\|=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|x_n|$ 故

$$\|L(x)\|\leqslant\|x\|,\quad \|L\|\leqslant 1.$$

$$\|L(x)\|\leqslant\|x\|,\quad \|L\|\leqslant 1.$$

特别取 $x_0=(a,a,\cdots,a,\cdots),a\in R(a\neq 0)$，则 $La=a$，于是

$$\|Lx_0\|=|a|=\|x_0\|$$

故得

$$\|L\|=1.$$

可见$L$是由$m$到$K$的有界线性运算，从而是连续的。

若$f(x)$是定义在$R$上取实值的连续函数，则

$$L[f(x)]=f[L(x)]$$

对一切$x\in m$成立。若$f(x)$是一致连续时，则

$$L[f(x)]=f[L(x)]$$

对一切$x\in s$成立。

## §7 极限运算的推广

现在我们在$s$与$G$中引入极限运算．设

$$x_0=(x_0^{(n)})\in s$$

我们规定集合

$$W_\varepsilon(x_0)=\{x: x=(x^{(n)})\in S,\sup_n|x_0^{(n)}-x^{(n)}|<\varepsilon\}$$

为$x_0$的邻域，于是$s$关于此邻域系是 Hausdorff 空间。这时$x_p\in s$收敛于$x_0\in s$等价于$\lim\limits_p x_p^{(n)}=x_0^{(n)}$关于$n$是一致的，其中$x_p=(x_p^{(n)})$，$x_0=(x_0^{(n)})$，即对任意的实数$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$p\geqslant N$时，

$$|x_p^{(n)}-x^{(n)}|<\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots)$$

同§2，Ⅱ的证明一样，可以得到$\theta$关于此拓扑为$s$中的闭集。

再设$\alpha_p,\alpha\in G$，如果存在$(x_p^{(n)})\in\alpha_p$，$(x^{(n)})\in\alpha$使得$\lim\limits_{p\to\infty}x_p^{(n)}=x^{(n)}$(关于$n$一致)，则称$\alpha_p$收敛于$\alpha$，记为$\lim\limits_p\alpha_p=\alpha$．

我们证明，这种极限不依赖于$(x_p^{(n)})$的选择。实际上，若还有$(y_p^{(n)})\in\alpha_p$，$\lim\limits_p y_p^{(n)}=y^{(n)}$（关于$n$一致），则 $\lim\limits_p(x_p^{(n)}-y_p^{(n)})=x^{(n)}-y^{(n)}$（关于$n$一致）。由于$x_p^{(n)}-y_p^{(n)}\in\theta$，而且$\theta$是闭集，故得$(x^{(n)}-y^{(n)})\in\theta$，因此

$$\{x^{(n)}\}=\{y^{(n)}\}.$$

由此可知，同一元素列若收敛必唯一。

极限算子$L$在$s$上是连续的，即当$\lim\limits_{n\to\infty}x_p=x$，$x_p,x\in s$有

$$\lim_{p\to\infty}L(x_p)=L(x)$$

实际上，这是古典极限交换定理的推广。

上述极限运算可推广到点网$\alpha_\delta,\delta\in D$，其中$D$是定向集[6]．

Ⅰ．如果$\alpha_p\in G$，且$\alpha_p-\alpha_q\to0(p,q\to\infty)$［即$\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_p^{(n)}-x_q^{(n)})=0$(关于$n$一致)，

$(x_p^{(n)})\in\alpha_p]$ 则存在 $\alpha\in G$ 使得

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha.$$

证　由实数集的完备性得出。

Ⅱ. 设 $\alpha_p,\alpha\in K$，则 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$ 的充要条件是

$$\|\alpha_p-\alpha\|\to 0\quad(p\to\infty)$$

证　根据 [6]，$\|\alpha_p-\alpha\|\to 0$ $(p\to\infty)$ 的充要条件是存在 $(x_p^{(n)})\in\alpha_p,(x^{(n)})\in\alpha$ 使得

$$\sup_n|x_p^{(n)}-x^{(n)}|\to 0\ (n\to\infty)$$

而这等价于 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p^{(n)}=x^{(n)}$（关于 $n$ 一致）。

Ⅲ. 设 $\alpha=a$，$\alpha_p=a_p$，$a,a_p\in R$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_p=\alpha$ 的充要条件是 $\lim\limits_{p\to\infty}a_p=a$（普通意义下的收敛）。

证　由 $\|\alpha_p-\alpha\|=|a_p-a|$ 得到。

Ⅳ. 设 $a_p\in R$，如果存在 $\alpha\in G$，使得

$$\lim_{p\to\infty}a_p=\alpha,$$

则 $\alpha\in R$.

证　因

$$a_p=(a_p,a_p,\cdots,a_p,\cdots)$$

又设 $\alpha=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots)$ 根据假设 $\lim a_p=x^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $x^{(n)}=a(n=1,2,\cdots)$ 因此

$$\alpha=a\in R.$$

至于 $G$ 中或 $K$ 中的元素列，它可以收敛于 $G$ 中或 $K$ 中的元素，甚至是实数。

例1　设 $\alpha_p=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{p}\right\}$，$(p=1,2,\cdots)$，$\alpha=\{(-1)^n\}$，于是

$$\|\alpha_p-\alpha\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|(-1)^n+\frac{1}{p}-(-1)^n\right|=\frac{1}{p}\to 0\ (p\to\infty)$$

例2　设 $\alpha_p=\left\{a+\dfrac{1}{p+(-1)^n}\right\}$，$a\in R$，于是

$$\|\alpha_p-a\|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{p+(-1)^n}\right|=\frac{1}{p-1}\to 0\ (p\to\infty)$$

例3　设 $\alpha_p=\left\{n+\dfrac{1}{p}\right\}$，$\alpha=\{n\}$，则

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$$

Ⅴ. 设 $\alpha_p\in K$，如果存在 $\alpha\in G$，使得

$$\lim_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$$

则 $\alpha\in K$.

证 设 $(x_p^{(n)})\in\alpha_p$，$(x^{(n)})\in\alpha$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(p)}=x_n$ 关于 $n$ 一致，即对实数 $\varepsilon>0$，存在自然数 $p_0$，使得

$$|x^{(n)}-x_{p_0}^{(n)}|<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$$

故
$$|x^{(n)}|\leqslant\varepsilon+|x_{p_0}^{(n)}|\leqslant\varepsilon+M\ (n=1,2,\cdots)$$

Ⅵ. 设 $\alpha_p\in G\setminus K$，若存在 $\alpha\in G$，且 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$，则 $\alpha\in G\setminus K$。

证 设相反，$\alpha\in K$. 又设 $(x_p^{(n)})\in\alpha_p$，$(x^{(n)})\in\alpha$ 使得 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p^{(n)}=x^{(n)}$ 关于 $n$ 一致。对实数 $\varepsilon>0$，存在自然数 $p_0$ 使得当 $p\geqslant p_0$ 时

$$|x_p^{(n)}-x^{(n)}|<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$$

因而
$$|x_p^{(n)}|<|x^{(n)}|+\varepsilon\leqslant M+\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$$

故当 $p\geqslant p_0$ 时 $\alpha_p\in K$，矛盾。

Ⅶ. 若 $\alpha,\beta,\alpha_p,\beta_p,\in G\ (p=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$，$\lim\limits_{p\to\infty}\beta_p=\beta$，则

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_p+\beta_p)=\alpha+\beta.$$

证 设 $(x_p^{(n)})\in\alpha_p$，$(x^{(n)})\in\alpha$，$(y_p^{(n)})\in\beta_p$，$(y^{(n)})\in\beta$，且 $\lim\limits_{p\to\infty}x_p^{(n)}=x^{(n)}$（关于 $n$ 一致），$\lim\limits_{p\to\infty}y_p^{(n)}=y^{(n)}$（关于 $n$ 一致）. 对实数 $\varepsilon>0$，存在自然数 $p_0$，当 $p\geqslant p_0$ 时

$$|x_p^{(n)}-x^{(n)}|<\varepsilon/2\ (n=1,2,\cdots)$$
$$|y_p^{(n)}-y^{(n)}|<\varepsilon/2\ (n=1,2,\cdots)$$

从而当 $p\geqslant p_0$ 时

$$|(x_p^{(n)}+y_p^{(n)}-(x^{(n)}+y^{(n)})|\leqslant|x_p^{(n)}-x^{(n)}|+|y_p^{(n)}-y^{(n)}|<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$$

故
$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_p+\beta_p)=\alpha+\beta.$$

Ⅷ. 若 $\alpha,\alpha_p,\beta,\beta_p,\in K(p=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$，$\lim\limits_{p}\beta_p=\beta$，则 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p\beta_p=\alpha\beta$；若 $a\in R$，$\alpha$，$\alpha_p\in G$，且 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$，则 $\lim\limits_{p\to\infty}a\alpha_p=a\alpha$.

Ⅸ. 若 $\alpha,\beta,\alpha_p,\beta_p\in K\ (p=1,2,\cdots)$，$\beta\,\bar{\in}\,\phi$ 且 $\lim\limits_{p\to\infty}\alpha_p=\alpha$，$\lim\limits_{p\to\infty}\beta_p=\beta$，则

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha_p}{\beta_p}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

证 设 $(x_p^{(n)})\in\alpha_p$，$(y_p^{(n)})\in\beta_p$，$(x^{(n)})\in\alpha$，$(y^{(n)})\in\beta$。因 $\beta\,\bar{\in}\,\phi$，故 $\underline{\lim}_{n\to\infty}|y^{(n)}|>0$. 于是存在正实数 $\delta$ 与自然数 $n_0$，当 $n\geqslant n_0$ 时 $|y^{(n)}|\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}|y^{(n)}|-\delta>0$。不妨设此式对一切 $n$ 成立。取实数 $\varepsilon$ 满足