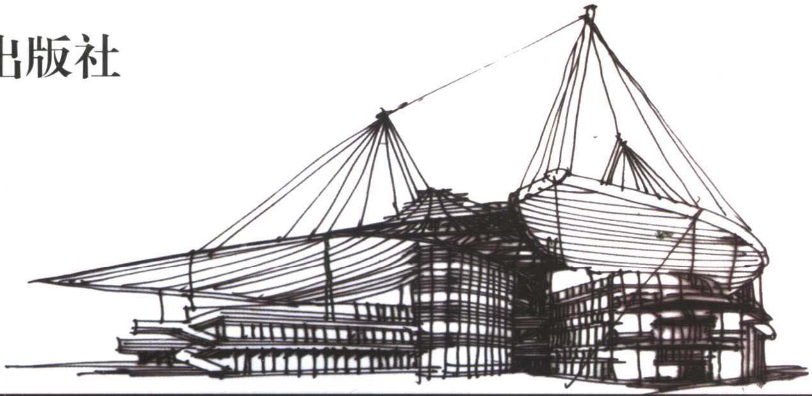
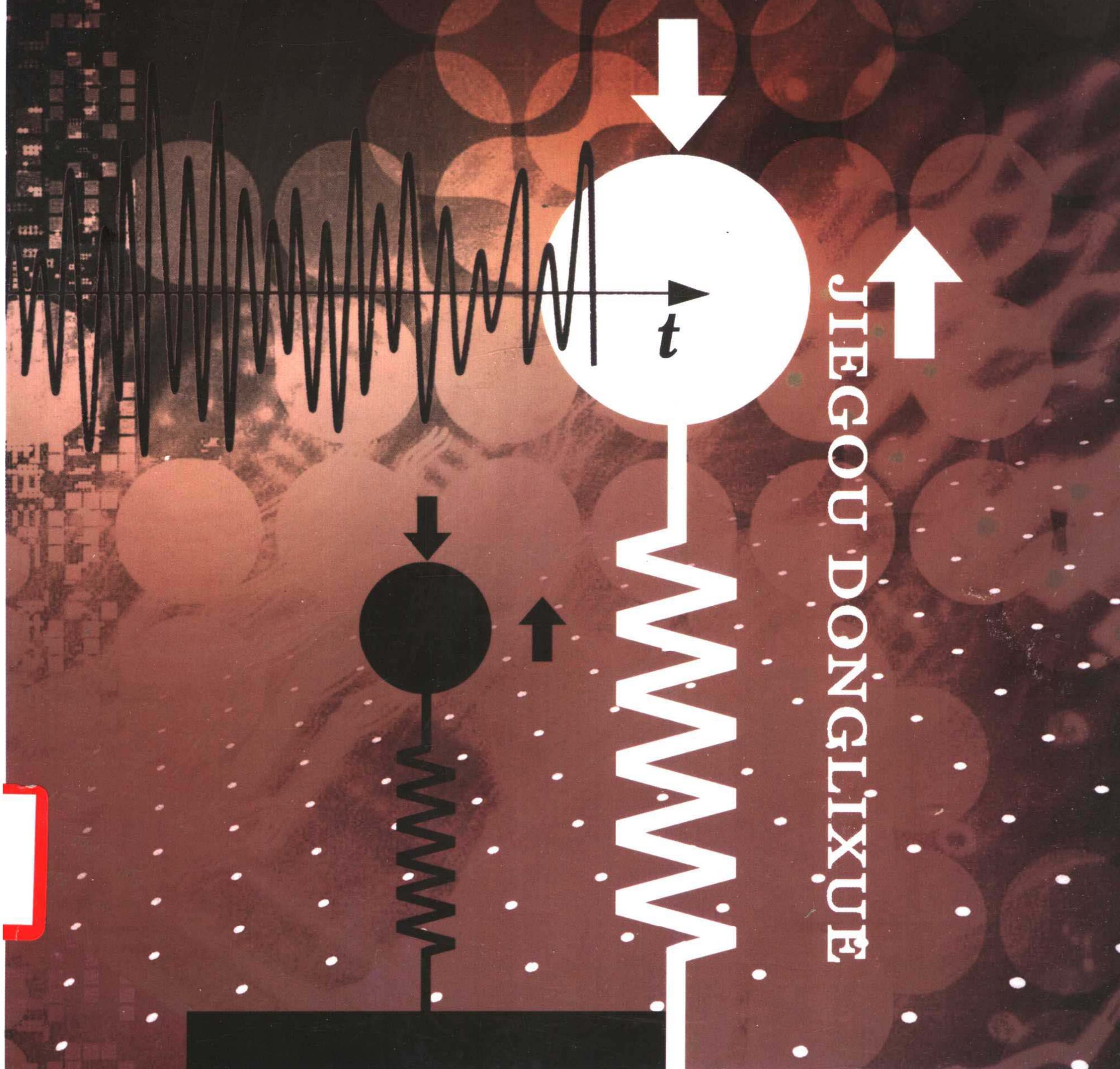
合肥工业大学出版社



盛宏玉 编著

结构动力学



JIEGOU DONGLIXUE

高等学校教材

结构动力学

盛宏玉 编著

合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了结构动力学的基本理论、求解方法及工程应用，内容由浅入深，适合不同专业人士的学习和参考。全书分四篇共十四章：第一篇为离散系统的线性振动，介绍单、多自由度系统的振动理论和分析方法，模态参数识别的基本理论与技术以及动态子结构方法等；第二篇为连续系统的线性振动，介绍一维、二维和三维弹性系统的振动理论与分析方法；第三篇为非线性振动，介绍单、多自由度系统非线性振动分析的原理和求解方法，包括各种数值求解方法；第四篇为专题部分，重点介绍随机振动与动态数据处理方法、结构的动态设计方法和结构系统的隔振、减振与振动控制。

本书可作为土木工程、工程力学、水利工程和市政工程及其他有关专业的高年级本科生和研究生的教材用书，也可供有关工程技术人员和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/盛宏玉编著. —合肥：合肥工业大学出版社，2005.3

ISBN 7-81093-166-0

Ⅰ.结…　Ⅱ.盛…　Ⅲ.结构动力学　Ⅳ.0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 020883 号

结 构 动 力 学

盛宏玉　编著　　责任编辑　陆向军

出　版	合肥工业大学出版社	印　张	25.75
地　址	合肥市屯溪路 193 号	字　数	626 千字
电　话	总编室：0551-2903038	发　行	全国新华书店
	发行部：0551-2903198	印　刷	中国科学技术大学印刷厂
版　次	2005 年 5 月第 1 版	邮　编	230009
	2005 年 5 月第 1 次印刷	网　址	www.hfutpress.com.cn
开　本	787×1092　1/16	E-mail	press@hfutpress.com.cn

ISBN 7-81093-166-0/O·18　　定价：35.00 元

前 言

结构动力学是研究结构体系在各种形式动荷载作用下动力学行为的一门技术学科。研究该门学科的根本目的是为改善工程结构系统在动力环境中的安全和可靠性提供坚实的理论基础。本书系统地介绍了结构体系线性和非线性振动的基本理论、求解方法和工程应用，对于涉及动力环境的其他技术学科也是普遍适用的。

工程界对结构体系进行动力分析的要求日益迫切，结构动力分析是随着近代工程技术不断发展而兴起的一个重要课题。近代工程结构，无论是在航空航天、交通工程、动力工程等领域，还是土木工程中的桥梁和一般工业与民用建筑，都在向大型和高速、大功率和轻结构、复杂精巧和高精度的方向发展，所引发出来的结构动力学问题越来越多，越来越严重。如地震导致结构物的破坏，机床振动引起加工精度的降低，发射装置和弹体的振动要影响导弹的命中率，飞机的失事事故大部分是由于零部件和机体由于振动引起的疲劳损伤所致，等等。现实问题要求工程师们在设计一些关键产品时必须要考虑该产品在工作中可能会发生的各种动力学问题，通过理论、计算和试验等不同途径全面理解和把握结构的动力学特性。所以，现代的结构工程师必须要适应现代结构工程的发展方向，要从静态设计走向动态设计，从频率设计走向响应设计，从个体设计走向系统设计和优化设计。因此，现代大型结构的设计过程是一个结构设计和分析计算的迭代优化过程，即设计—分析—再设计—再分析，直至达到一个性能指标最优的设计方案。通常，这一复杂的设计过程应借助于计算机才能得以实现，称之为计算机辅助设计(CAD)。现代的大型 CAD 软件一般都包含了建模、数值分析、结构动力分析、图形处理和动画、绘图等基本模块。

本书作者多年从事计算结构力学及工程振动的理论和试验研究工作。自 1995 年以来，连续多年为研究生讲授《结构动力学》课程，现将平时的讲稿加以整理和补充，编写本书。本书在内容的编排和叙述方面立足于基本理论与求解方法并重，力求做到由浅入深，简明易懂，便于自学，以适合不同专业人士的学习和参考。为使推导过程简捷明了，大部分公式都采用矩阵形式表达。为加深读者对本书内容的理解，多数章节中安排有例题，并在各章末附有一定数量的习题。

全书分四篇共十四章，从不同的角度对结构动力学的原理和分析方法作系统介绍，适合高年级本科生和研究生作教材使用，也可供有关工程技术人员和科研人员参考。下面对各章的主要内容作一简单介绍，授课老师可根据具体情况自己划定或增加其他内容。

第 1 章绪论，介绍结构动力学的简单概况和涉及的一些基本概念，并讨论了系统的建模问题和建立系统运动方程的几种常用方法。

第一篇为离散系统的线性振动，共六章。第 2 章介绍单自由度系统振动的基本理论和分析方法，主要介绍固有频率的计算，单自由度系统的自由振动及在各种荷载作用下受迫振动的响应计算问题，这一章内容对于有一定基础的学生来说也可供复习之用。第 3 章介绍一般结构系统力学建模时确定动力学参数的一些基本方法，主要介绍结构的离散化方法，并从能量的角度讨论了质量参数、阻尼参数和弹性参数的计算问题。第 4 章介绍多自

由度系统振动的一般理论和分析求解方法，重点围绕振型叠加法展开。主要介绍多自由度系统运动方程的建立、固有频率和固有振型的概念、主坐标和振型矢量的正交性，并重点讨论了求解多自由度系统自由振动和受迫振动响应的振型叠加法，或称之为模态分析法。第5章介绍求解大型结构系统动力学问题的一些实用分析与计算方法，主要介绍了动力问题有限单元法的基本过程，讨论了大规模特征值问题的各种求解方法，其中高年级本科生主要介绍矩阵迭代法，研究生要掌握变换法的基本思想与方法。第6章涉及的是动力学反问题，介绍模态参数识别的基本理论与识别技术，主要讨论了模态参数识别的频域方法(包括实模态和复模态)和时域方法，其中高年级本科生可介绍频域的实模态识别方法和时域方法的基本概念。第7章介绍动态子结构方法，着重讨论模态综合的基本理论与方法，介绍了子结构模态集的划分与计算，并讨论了固定界面和自由界面两种模态综合方法的基本理论与综合过程，其中高年级本科生以介绍固定界面模态综合法为主。

第二篇为连续系统的线性振动，共两章。第8章介绍弦、杆、梁等一维杆件系统的振动分析和求解方法，介绍了振型函数和频率方程的概念，讨论了振型函数的正交性及自由振动和受迫振动的求解方法。第9章主要为研究生编写，主要介绍薄膜、薄板和中厚板等二维构件的振动，以及任意厚度叠层板、壳三维振动的基本理论与分析方法，其中包含中厚板理论、复合材料中厚板振动分析的解析解和数值解、状态空间理论及其在复合材料叠层板、壳结构三维振动分析中的应用等内容。

第三篇为非线性振动，共两章，主要为研究生编写。第10章介绍单自由度系统非线性动力响应的特点以及振动分析的基本原理和求解方法。第11章介绍多自由度系统非线性振动分析的原理和求解方法，包括各种数值求解方法。如果时间允许的话，对土木工程和工程力学专业的学生可介绍非线性振动的基本概念以及求解非线性动力响应的数值方法。

第四篇为专题部分共三章，本篇内容可根据需要有针对性地选择有关内容进行讲授。第12章主要介绍随机过程的基本知识和随机振动的基本理论，单、多自由度系统随机振动的求解方法以及动态随机数据的处理方法。第13章介绍结构的动态特性设计方法，主要包括结构的动力修改和动态设计方法等内容。第14章介绍结构系统的隔振、减振与振动控制，主要包括隔振的原理与措施，结构振动的被动控制与主动控制的基本理论及工程应用。

在本书的编写过程中参阅了同行专家的许多宝贵资料和研究成果，在此谨向他们表示衷心的感谢！由于作者水平有限，书中的缺点、错误和不当之处在所难免，衷心欢迎广大读者和同行专家多提宝贵意见。

作　者

2005年5月

目 录

第1章 绪 论

§1.1 结构动力学的任务和研究内容

自然界中的结构物所承受的荷载主要有两大类：静荷载和动荷载。静荷载不随时间变化，如重力和定常温度场的温度载荷等。静荷载的作用周期长，有些作用周期较长的分级荷载，如结构试验中的分级加载，也可以近似视为静荷载。结构在静荷载的作用下，各质点的速度和加速度都几乎为零，结构的平衡是弹性恢复力与外载荷之间的静平衡。动荷载是随时间变化的，如冲击荷载、风载和地震荷载等。结构在动荷载作用下将发生变形和振动，称之为动力响应。在此情况下，结构的平衡是惯性力、阻尼力和弹性恢复力与外载荷之间的动平衡。结构动力学就是一门研究结构体系在动力荷载作用下的动力学行为的技术学科，研究该学科的根本目的是为了了解结构体系的动力特性，掌握结构体系动力响应的分析原理和求解方法，旨在为改善工程结构体系在动力环境中的安全和可靠性提供坚实的理论基础。

工程界对结构体系进行动力分析的要求日益迫切，主要是出于下述几方面原因：(1)随着经济建设的飞速发展，雨后春笋般地出现了各种形式的大跨度、高柔性结构，使风荷载对结构的强度和稳定性产生了举足轻重的影响。比如，早在 1940 年，美国 Tacoma 悬索桥就是由于风致振动而破坏。从此，风致振动的研究得到了足够的重视。对于像超高层建筑结构、大跨度悬索桥这样的高柔性结构，在设计时必须考虑风致振动的影响。近年来，我国在长江、黄河等主要干流上已建成或正在兴建数十座大跨度桥梁。此外，由于城市建设的飞速发展，出现了大量的高耸结构。这些结构在设计或施工中对结构的动力学特性提出了越来越高的要求。(2) 最近的几十年，全球处于地震高发期，如 1960 年的智利地震，1976 年的中国唐山地震，1985 年的墨西哥地震，1995 年的日本阪神地震，1999 年的中国台湾花莲地震和 2001 年的印度地震等，给所在国的经济建设和人民群众的生命财产安全造成了严重破坏。为了减少或避免地震对工程结构物的破坏，对一些重点建设项目和地震高设防地区的主要建筑，必须对结构物进行抗震设计。(3) 航空航天事业的飞速发展。大型客机的起飞和降落，航天器的发射和回收，会产生很大的动力加速度，并受到强烈的冲击荷载作用；同时，它们在运行阶段要受到气旋等不定因素的影响，结构本身还会产生自激振动。为了保证飞行器的安全和各部件的可靠性，必须进行空气动力学和结构动力学的研究。(4) 离岸结构的出现。随着人类对能源资源的开发利用，出现了大量的海洋钻井平台。海洋平台在工作期间除了受本身的动力荷载外，主要承受风、浪、暗流、浮冰和地震等动力环境荷载。对一些较深水域的海洋平台，必须进行动力设计。(5) 在多层厂房中由于机器上楼而引起厂房的结构振动，在设计时必须加以高度重视。(6) 一些直接关联人民群众生命财产安全的重要结构物，如核电站，大型水电站等，为保证其具有足够的安全性和可靠性，必须考虑各种形式荷载的作用。

结构物在动荷载作用下要产生各种形式的动力响应，因此，结构动力学就是研究结

构、动荷载和结构响应三者关系的一门科学。三者的关系可用图(1.1.1)来简要说明，其中 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}$ 分别表示描述结构体系动力学参数的质量、阻尼和刚度矩阵，$\boldsymbol{F}(t)$ 表示外加的激振力矢量，$\boldsymbol{X}(t)$ 表示由 $\boldsymbol{F}(t)$ 引起的结构响应。根据求解问题的不同，现代的结构动力学问题可分为以下三大类：

图 1.1.1　结构动力学三类问题及其相互关系

（1）已知结构参数和输入荷载，求系统的响应，称为响应计算或响应预估问题；

（2）已知输入荷载，根据结构试验测得的系统响应来确定结构参数，称为参数识别问题；

（3）已知结构参数和系统的响应，反求输入荷载，称为荷载识别问题。

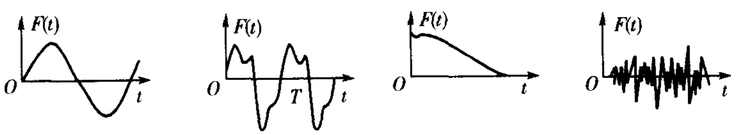
在上面三类问题中，第一类问题为正问题，第二和第三类问题为反问题。本教材重点介绍正问题，适当介绍一些反问题。

§1.2　结构动力学中的几个问题和概念

1.2.1　荷载的分类

总的来说，计算动荷载作用下的结构响应有两种不同的基本方法：确定性分析方法的和非确定性分析方法。究竟采用哪种方法，取决于荷载是如何规定的，也就是说，荷载可分为确定性荷载和非确定性荷载两类。确定性荷载随时间的变化是事先已知的，虽然它可以是时间历程高度剧烈变化或者其特征具有一定的不规则性，但我们总可以用某一数学公式对其加以具体描述。如果荷载随时间的变化不能事先确定，只能从统计的意义上加以定义，如风、浪和地震荷载等，称之为非确定性荷载。非确定性荷载也称为随机荷载，非确定性的振动也称为随机振动。本教材重点介绍确定性的振动及其分析方法，并用少量篇幅介绍随机振动。

确定性荷载按时域特性来分，可分为周期荷载和非周期荷载两大类。周期荷载是时间的周期函数：$F(t)=F(t+T)$，其中 T 为周期。周期荷载是重复的荷载，在多次循环中这些荷载相继出现相同的时间过程。按正弦或余弦规律变化的荷载是最简单的周期荷载，如旋转机械产生的激振力，一般称之为简谐荷载。简谐荷载为单一频率的荷载，根据富里叶频谱分析的理论，任一周期荷载可以分解为一系列简谐荷载的叠加。非周期荷载可以是短持续时间的冲击荷载，或者是长持续时间的一般形式的荷载。锻造、冲压和爆破是冲击荷载的典型发生源。这种持续时间较短的荷载可以用一些衰减函数来近似描述，如负指数函数，三角形函数等。一般形式的长持续时间的荷载，有风载和地面脉动荷载等。从频谱分析的角度看，周期荷载的频谱为离散频谱，而非周期荷载的频谱为连续频谱。几种典型荷载的时间历程如图 1.2.1 所示。



（a）简谐荷载　（b）周期荷载　（c）冲击荷载　（d）随机荷载

图 1.2.1　工程中常见的几种荷载形式

1.2.2　振动的分类

按荷载来分，振动可分为确定性的振动和随机振动两大类。确定性的振动可进一步分为简谐振动、周期振动和非周期振动。结构在荷载持续作用下产生的振动称为受迫振动；结构不受荷载作用，而由于受某一初始干扰而产生的衰减振动或某种形式的稳定周期振动称为自由振动。

按动力学方程所包含的系统参数来分，振动可分为线性振动和非线性振动两大类。若系统的参数，如刚度或阻尼，是振动的广义位移或广义速度的线性函数，则产生的振动是线性振动，分析计算时可以应用叠加原理。反之，如果刚度或阻尼中有一项是广义位移或广义速度的非线性函数，则引起的振动就是非线性振动。非线性振动不满足叠加原理，而且会产生一些不同于线性振动的独特的动力学现象，给求解带来很大困难。

按振动的自由度来分，振动可分为离散系统的振动和连续系统的振动。通常，离散系统的动力学方程为时间 t 的二阶常微分方程(组)，而连续系统的动力学方程为空间坐标和时间 t 的偏微分方程(组)。离散系统有单自由度系统和多自由度系统之分。单自由度系统只有一个振动自由度，对于线性系统的振动来说，单自由度系统的振动理论和计算方法是分析多自由度系统的基础。

1.2.3　自由度和广义坐标

自由度是给定动力学系统的一个重要特征参数。自由度数是描述系统运动的独立的坐标数目，也等于系统总的坐标数目减去独立的约束方程的数目。例如，对于一个具有 N 个质点的力学系统，可以用 $3N$ 个直角坐标 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$ 来描述各质点的位置及其运动，同时又有 l 个联系这组坐标的独立的约束方程

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})=0 \quad (k=1,2,\cdots,l) \tag{1.2.1}$$

则该力学系统具有 $n=3N-l$ 个自由度。

系统在任一时刻的位置及其运动状态称为系统的位形(configuration)。由于约束方程(1.2.1)的存在，使得直角坐标组$(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$中的诸坐标不是独立的。通常，我们可以采取不同的坐标组来描述系统的位形。不同的坐标组之间可以相互转换，称为坐标变换。我们感兴趣的是寻找一组彼此相互独立的坐标，其数目正好等于系统的自由度。这组既能描述系统的位形而又不破坏系统所受约束的独立坐标称为广义坐标。设式(1.2.1)所描述的系统有一组 n 个广义坐标 $\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 之间存在如下的坐标变换式

$$x_i=x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \quad (i=1,2,\cdots,3N) \tag{1.2.2}$$

广义坐标一般有不同的选择，比如，图(1.2.2)所示的平面双摆，描述系统位形的平面直角坐标是 x_1, y_1, x_2 和 y_2，系统的自由度 $n=2$，相应的约束方程为

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2,\ (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2 \tag{1.2.3}$$

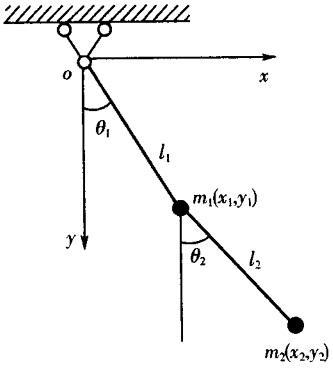


图 1.2.2　平面物理双摆

若取转角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，则对应于式(1.2.2)的坐

标变换为

$$\begin{cases} x_1 = l_1\sin\theta_1, x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \\ y_1 = l_1\cos\theta_1, y_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

若取两个线位移 x_1 和 x_2 为广义坐标，则对应的坐标变换式为

$$x_1 = q_1,\ x_2 = q_2,\ y_1 = \sqrt{l_1^2 - q_1^2},\ y_2 = \sqrt{l_1^2 - q_1^2} + \sqrt{l_2^2 - q_2^2} \tag{1.2.5}$$

1.2.4 约束及其分类

限制质点或质点系运动的各种条件称为约束，这其中包括周围物体的支承情况和体系内部各部分之间的联系。约束可以用约束方程来数学表达，例如式(1.2.1)。

从限制系统在空间的位置和运动的条件来分，约束可分为几何约束和运动约束。几何约束是限制质点在空间位置的条件，其约束方程中的函数仅仅是空间坐标的函数：$f(x_1, x_2, \cdots, x_{3N}) = 0$，如方程(1.2.3)。运动约束是限制质点系运动情况的运动学条件，其约束方程一般与质点运动的速度或加速度有关。如图 1.2.3 所示的半径为 R 圆盘沿直线轨道作纯滚动，圆盘除了受到限制其圆心与地面保持等距离 R 的几何约束 $y_0 = R$ 外，还受到只滚不滑的运动学条件的约束：

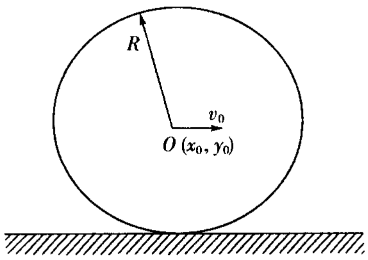


图 1.2.3 圆盘的纯滚动

$$v_0 - \omega R = 0 \text{ 或 } \dot{x}_0 - \dot{\varphi} R = 0 \tag{1.2.6}$$

方程(1.2.6) 建立了 $\dot{x}_0$ 和 $\dot{\varphi}$ 之间的联系。

从约束方程中是否显含时间 t 来分，可分为定常约束和非定常约束。非定常约束的一个最简单的例子是摆长随时间变化的单摆，如图 1.2.4 所示。一根穿过固定圆环 o 的细绳一端系一重物 M，另一端以不变的速度 v 拉动细绳。设摆的原长为 l_0，则单摆的约束方程为：

$$x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2 \tag{1.2.7}$$

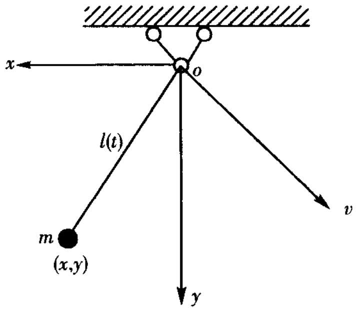


图 1.2.4 摆长随时间 t 变化的单摆

如果约束方程中不包含坐标对时间的导数，或者约束方程中的微分项可以积分为有限形式，这类约束称为完整约束，否则，称之为非完整约束。假设微分形式的约束方程为

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{ji}\,\mathrm{d}x_i + A_{jt}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ 或} \sum_{i=1}^{n} B_{ji}\,\mathrm{d}q_i + B_{jt}\,\mathrm{d}t = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l) \tag{1.2.8}$$

其中 A_{ji} 和 A_{jt} 都是诸 x 和 t 的函数，B_{ji} 和 B_{jt} 都是诸 q 和 t 的函数。若方程(1.2.8) 能写成全微分的形式，则对应的约束是完整约束，否则就是非完整约束。例如，上面提到的圆盘沿直线轨道作纯滚动，约束方程(1.2.6) 可以积分成有限形式：$x_o = R\varphi$，对应的约束为完整约束。若圆盘沿直线既滚又滑，或圆盘在平面内沿任一曲线轨道滚动，则约束是非完整的。

最后，从约束方程是否为等式或不等式来分，约束可分为单面约束和双面约束。约束方程为不等式的约束称为单面约束，例如，物块放置在某一支承表面上，支承面的约束就是单面约束，这时约束反力的方向是确定的。当约束方程为等式时，约束为双面约束。例如滑块在一固定滑槽内运动，滑槽的两个支承面都起约束作用，这时约束反力的方向是不确定的。

1.2.5 实位移、可能位移和虚位移

顾名思义，实位移是指在某种外界因素影响下实际发生的位移，或者说，在任何时刻都能满足运动方程和约束方程的诸位移函数 $q_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$。

满足所有的约束方程，但不一定满足运动方程的任意一组无限小位移 $\mathrm{d}q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为可能位移。无限小的实位移一定是可能位移，但反过来则不一定成立。实位移和可能位移所满足的约束方程是

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ji}\mathrm{d}q_i + B_{jt}\mathrm{d}t = 0 \quad (j=1,2,\cdots,l) \tag{1.2.9}$$

则位于由式(1.2.9)所确定的切平面内任一方向上的无限小长度矢量都是一个可能位移矢量。

满足下列约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ji}\delta q_i = 0 \quad (j=1,2,\cdots,l) \tag{1.2.10}$$

的诸 δq_i 称为虚位移。一般说来，在发生虚位移的过程中时间被固定下来，与式(1.2.9)相比，用变分 δq_i 代替了微分 $\mathrm{d}q_i$ 并略去了 $\mathrm{d}t$ 项。比较式(1.2.9)和(1.2.10)可知，当 $B_{jt}=0$ 时，虚位移也是可能位移。但在一般情况下，虚位移不一定是可能位移。

1.2.6 虚功和虚功原理

对于一个由 N 个质点所组成的质点系，作用在系统上的外力在任一虚位移上所做的虚功可表达为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \tag{1.2.11}$$

式中，$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在第 i 质点上的合力矢量，$\delta\boldsymbol{r}_i$ 为该质点的虚位移矢量。当然，虚功也可用由下面的解析式来表达

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_{xi}\delta x_i \text{ 或 } \delta W = \sum_{j=1}^{n} F_{qj}\delta q_j \tag{1.2.12}$$

其中，δx_i 和 δq_j 分别为系统的直角坐标和广义坐标所对应的虚位移，F_{xi} 为沿坐标 x_i 正方向的合外力，F_{qj} 为对应于广义虚位移 δq_j 的广义外力。对于受约束的系统，我们将作用于第 i 质点上总的外力分为主动力 $\boldsymbol{F}_{pi}$ 和约束力 $\boldsymbol{F}_{Ri}$。如果系统所受约束力在任一符合约束条件的虚位移上所做的虚功之和等于零，即

$$\delta W_R = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ri} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.2.13}$$

则系统所受的约束称为理想约束。

虚功原理是从能量角度研究系统静力平衡的一种等价原理。虚功原理可以叙述为：对于受理想约束而初始处于静止的定常系统，其静力平衡的必要和充分条件是作用在系统上的所有主动力在任一符合约束的虚位移上所做的虚功之和等于零。虚功原理的必要性可以很容易根据牛顿定律得到证明。设系统处于静平衡状态，根据牛顿定律，各质点的平衡方程为

$$\boldsymbol{F}_{pi} + \boldsymbol{F}_{Ri} = \boldsymbol{0} \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{1.2.14}$$

因此，作用在各质点的所有力在任一虚位移上所做的虚功之和必等于零，即

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_{pi} + \boldsymbol{F}_{Ri}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{pi} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{Ri} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.2.15}$$

根据理想约束的定义，式(1.2.13)成立。因此，系统所受的主动力所做的虚功之和必等于零：

$$\delta W_P = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{pi} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1.2.16}$$

利用虚位移的任意性，虚功原理的充分性可用反证法来证明。请参考有关资料，在此不赘述。

1.2.7 广义力

在公式(1.2.12)中，我们用两组不同形式表示的外力 F_{xi} 和 F_{qj} 来表达外力虚功。这两组力分别对应不同的坐标组 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$ 和 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$。注意后一坐标组为广义坐标，各坐标之间是相互独立的。根据坐标变换式(1.2.2)，有

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i = 1,2,\cdots,3N) \tag{1.2.17}$$

将式(1.2.17)代入(1.2.12)中的第一式，得

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_{xi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{3N} F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} F_{qj} \delta q_j \tag{1.2.18}$$

式中的 F_{qj} 为对应于广义坐标 q_j 的广义力，其一般计算公式为

$$F_{qj} = \sum_{i=1}^{3N} F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.2.19}$$

1.2.8 动能和势能

为简单起见，考察具有 N 个质点的定常系统。设各质点相对于惯性参考系的直角坐标为 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$，系统的动能可表为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \tag{1.2.20}$$

其中 $m_1 = m_2 = m_3$ 是第一个质点的质量，以次类推。根据坐标变换式(1.2.2)，有

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \tag{1.2.21}$$

由上式还可以得到另外一个微分关系

$$\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j \tag{1.2.22}$$

现用广义坐标来表示动能，将式(1.2.21) 代入式(1.2.20) 得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{kl}\dot{q}_k \dot{q}_l，\ m_{kl} = m_{lk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} \tag{1.2.23}$$

可见，系统的动能可以表示为广义速度的二次函数。式中的 m_{kl} 一般称为广义质量。

若作用在系统上的外力 F_{pi} 为保守力，则一定存在某一势函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})$，使得

$$F_{pi} = -\partial V / \partial x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 3N) \tag{1.2.24}$$

则这些主动力的虚功为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_{pi}\delta x_i = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta V \tag{1.2.25}$$

同时，根据坐标变换式(1.2.2)，势函数也可以用广义坐标来表示：$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，则

$$\delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.2.26}$$

由式(1.2.25) 和式(1.2.26)，并应用虚功原理可知，系统处于静平衡的充要条件是

$$\delta V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \tag{1.2.27}$$

根据广义虚位移 δq_j 的任意性，上式要求

$$\partial V / \partial q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.28}$$

式(1.2.28) 表明，对于具有理想约束的保守系统来说，其平衡状态必定出现在势能取驻值的位置上。另外，比较式(1.2.18) 与式(1.2.25 - 26) 知，广义力 F_{qj} 可用下式表示

$$F_{qj} = -\partial V / \partial q_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.29}$$

§ 1.3　结构动力问题的特点与研究方法

结构动力问题与结构静力问题相比存在很大差别，主要体现在：第一，由于动荷载是随时间变化的，因而动力问题不像静力问题那样具有单一的解答。为了对结构响应有一个全面了解，我们必须在动荷载作用的时间范围内求解结构响应的时间历程。第二，结构在

静荷载作用下的位移和内力仅仅依赖于结构本身的刚度特性与外荷载的大小和分布，而结构的动力响应不仅与结构的刚度特性有关，还与结构的质量分布和耗能特性有关；不仅与外荷载的大小和分布有关，还与荷载的干扰频率，即动荷载随时间变化的快慢有关。如果激振频率接近结构的固有频率，尽管荷载的幅值不大，也会引起很大的结构响应，这就是所谓的共振现象。

工程中，结构物是否作为动力系统来分析，具体要看荷载是否会激起结构物产生较大的振动加速度。如果结构振动的加速度较小，以至于对应的惯性力只占弹性恢复力所平衡的全部外力的一小部分，可以将结构分析按静力问题来处理。比如，当激振频率较低，而系统的固有频率相对较高，两者相差较大时，则动荷载引起的动位移较小，且振动频率也较低，这时的惯性力可以忽略不计。一般而言，结构分析是否按动力分析来处理，需要根据结构系统的固有动力特性和荷载随时间的变化规律来综合考虑。

结构动力学的研究方法主要分为分析方法和试验方法两大类。这两种方法各有优点，也各有不足，需要我们在实践中扬长避短。

分析方法的首要任务是建模(modeling)。模型就是我们进行动力学分析的对象，是对原结构的一种物理和数学的抽象。建模的过程，其实就是对问题的去粗取精，去伪存真的过程。模型要反映问题的本质，但又不能太复杂，以便于求解。建模的方法有很多，但大致可分为正问题建模方法和反问题建模方法。采用正问题建模方法，前提是我们必须对所研究的结构系统有足够的了解。我们把实际系统分解为若干个部件，每个部件的力学特性(如本构方程等)是已知的，这种系统称为白箱系统。反问题建模方法适用于系统参数完全不了解(黑箱系统 —black box system)和部分了解(灰箱系统 —gray box system)的情况。在反问题建模时，必须对系统进行动力学试验，利用系统输入和输出的试验数据，再根据输入和输出之间的关系建立识别系统参数的数学方程。所以，反问题建模方法也称为试验建模方法。

在结构动力学中，我们研究的模型有力学模型和数学模型两种。力学模型，又称为物理模型，是对原结构的物理和力学的抽象。根据描述系统运动的自由度来划分，力学模型有离散模型和连续模型两种。数学模型是对力学模型的一种数学描述。通常，离散模型所对应的数学模型是常微分方程组或代数方程组，而连续模型所对应的数学模型为偏微分方程(组)。数学模型建立后，关键问题是要寻找一套有效的求解体系，不管是解析的还是数值的，来求解这组方程。建模和求解这两个过程将贯穿本教材的各个部分。

试验方法，也就是结构动力试验，主要包括模态试验、模拟试验和力学环境试验等。动力试验是产品在设计和生产过程中不可缺少的环节。例如，大跨度的柔性桥梁在设计过程中要做模型的模态试验和风动试验，在通车运行前要做整桥的模态试验。又如新型号的飞机必须做整机的地面共振试验，运载火箭必须要做整体的模态试验等。

分析方法和试验方法往往是相辅相成的，仅仅利用一种方法一般很难得到我们预想的结果。应用现代的数值分析手段，分析方法能提供任何我们需要的数据。但对于一些复杂的结构体系来说，一方面，其抽象的求解模型一般很难得到解析解，不得不采用一些费时的数值方法来求解，而由此得到的数值结果需要试验数据来检验；另一方面，我们对结构的简化模型到底合不合理，需要作哪些修改，也要通过试验方法来确定。结构试验不仅能直接考核产品的动力学性能，还能为分析方法建立可靠的数学模型提供必要的动力学参

数。然而，我们所具有的试验手段还是有限的。由于激振条件的限制，对于一些大型的结构物还无法做原型的动力试验．而只能做模型试验，这对模型的制作提出了很高的要求。反过来，分析方法的结果往往对试验方法起着很重要的指导作用。对于一些我们没有多少经验的结构试验来说，分析方法对我们选择合理有效的试验方案经常起着至关重要的作用。因此，只有通过两种方法的合理互动，才能大大提高分析或试验结果的合理性和有效性。

§1.4　建立系统运动方程的几种常用方法

我们对结构进行动力分析的主要目的是为了获得结构在外荷载作用下的动力响应，即动位移或动应力的时间历程。在大多数情况下，应用包含有限个自由度的近似方法就具有足够的精度，这样，我们只要求出这些选定自由度的位移分量就可以了。

描述系统的动位移在任意时刻所应满足的数学方程式称为系统的运动方程。建立运动方程是整个分析中最重要的环节之一，有时也是较困难的一个环节。运动方程与采用的力学模型有关，尽管有多种方法可以建立系统的运动方程，但对同一模型来说，最终的结果是一致的。下面介绍几种常用的方法。

1.4.1　达朗伯原理 — 动静法

任何动力系统的运动方程，本质上都可以代表牛顿第二运动定律。对一具有 N 个质点的系统，每个质点都按牛顿第二运动定律建立动力学方程，有

$$\boldsymbol{F}_{pi}+\boldsymbol{F}_{Ri}=m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \text{ 或 } \boldsymbol{F}_{pi}+\boldsymbol{F}_{Ri}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{pi}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ri}$ 分别为作用在第 i 质点上的主动力和约束力，m_i 为 i 质点的质量，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为相对于惯性参考系的加速度矢量，$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 具有力的量纲，称之为惯性力。式(1.4.1)可以视为相对于第 i 质点静止的非惯性参考系而言的静平衡方程。

与惯性力不同，习惯上把 $\boldsymbol{F}_{pi}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ri}$ 叫做真实力。式(1.4.1)表示，作用于系统的每个质点上的全部真实力和惯性力的矢量和等于零，这就是达朗伯原理。它把一个动力学问题转化为静力学问题来求解，所以人们也称之为动静法。

1.4.2　动力学普遍方程

如果系统的自由度较多，且各质点间包含许多彼此的联系，则直接写出系统内所有质点的平衡方程往往比较困难，此时，虚功原理就可以用来代替平衡条件来建立运动方程。考虑方程(1.4.1)，设每个质点发生符合约束的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，则全部力所作的总虚功为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_{pi}+\boldsymbol{F}_{Ri}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.4.2}$$

对具有理想约束的质点系，由于所有约束力所作虚功之和等于零，则有

$$\delta W_p=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_{pi}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{Ri}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.4.3}$$