濮燕敏　叶家琛　编著

线性代数习题与研究生入学考试试题精解

Xianxing Daishu Xiti Yu Yanjiusheng Ruxue Kaoshi Shiti Jingjie

同济大学出版社

内 容 提 要

本书主要内容包括两部分:第一部分是习题选解,共分 26 节,与同济大学应用数学系《线性代数》编写组编写的 3 学时《线性代数》教材的内容相对应.第二部分是 2002—2005 年研究生入学考试(线性代数)试题精解.

本书可供大学理工科学生和研究生学习"线性代数"时参考,也可供其他读者学习"线性代数"时参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题与研究生入学考试试题精解/濮燕敏,叶家琛编著.—上海:同济大学出版社,2005.11

ISBN 7-5608-3101-X

Ⅰ.线… Ⅱ.①濮… ②叶… Ⅲ.线性代数—高等学校—习题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088343 号

线性代数习题与研究生入学考试试题精解

濮燕敏 叶家琛 编著

策 划 吴凤萍

责任编辑 兰孝仁 责任校对 杨江淮 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 4.625

字 数 134000

印 数 1—4100

版 次 2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-3101-X/O·281

定 价 10.00 元

前　言

线性代数是大学理工科学生重要的必修基础课程之一，它的基本概念、基本理论和基本运算具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性．该课程概念多，定理多，内容抽象，很多学生在学习中普遍感到在分析问题、解决问题方面缺乏思路．同济大学应用数学系《线性代数》编写组编写的 3 学时《线性代数》一书中习题较多，而且有些习题难度较大，为此，我们特意编写了与该教材配套的习题解答书．

本书分两部分，第一部分是 3 学时《线性代数》教材中习题的选解，内容的章节安排与教材一致，共分 26 节．习题编号自成一体，并在题号后括号内表示该题在教材中的原题号．第二部分是 2002—2005 年研究生入学考试(线性代数)试题精解．

本书可供大学理工科学生和研究生学习“线性代数”时参考，也可供其他读者学习“线性代数”时参考．

笔者衷心地希望本书能够成为广大读者学习“线性代数”的很好的辅导书．由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者及同行批评指正．

编　者

2005.7

目　　录

§0 预备知识

0-1(原题 2) 设 $M\subset N$，证明：$M\cap N=M$，$M\cup N=N$.

证明 设 $x\in M\cap N$，则 $x\in M$ 且 $x\in N$，从而 $M\cap N\subseteq M$. 反之，设 $x\in M$，因为 $M\subset N$，所以 $x\in N$，从而 $x\in M\cap N$，故 $M\subseteq M\cap N$. 综上所述，有 $M\cap N=M$.

设 $x\in M\cup N$，则 $x\in M$ 或 $x\in N$. 又由于 $M\subset N$，所以，$x\in N$，从而 $M\cup N\subseteq N$. 反之，设 $x\in N$，由于 $M\subset N$，所以 $x\in M\cup N$，从而 $N\subseteq M\cup N$. 综上所述，有 $M\cup N=N$.

0-2(原题 4) 在 R 上定义 $\sigma(a)=\begin{cases}a & a\neq 1,\\ b & a=1\end{cases}$ 这里，$b^2=1$，σ 是不是 R 到 R 的一个映射？为什么？

解 σ 不是 R 到 R 的一个映射. 因为 $b^2=1$，从而有 $b=1$ 或 $b=-1$. 当 $a=1$ 时，a 在 σ 下的像不是惟一的.

§1 矩阵及其运算

1-1(原题 4) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就称为与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_1+x_2\\ x_3 & x_3+x_4\end{bmatrix}$$

由矩阵相等的定义可得

$$\begin{cases}x_1+x_3=x_1\\ x_2+x_4=x_1+x_2,\\ x_4=x_3+x_4\end{cases}\qquad \text{解得}\begin{cases}x_1=x_4\\ x_3=0\end{cases}$$

所以与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵为$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$，$x$，$y \in R$ 是任意常数.

1-2(原题 5)　设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，那么，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以，$a_{ij}=a_{ji}$，$(i\neq j)$. 设 $\boldsymbol{A}^2=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$b_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

从而 $a_{ij}=0(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$. 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

1-3(原题 7)　$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{AB}$ 的主对角线元素之和$=\boldsymbol{BA}$ 的主对角线元素之和；

(2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq \boldsymbol{E}$.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{BA}=(d_{ij})_{n\times n}$，则

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$d_{ii}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

(1) $\boldsymbol{AB}$ 的主对角线元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki},$$

$\boldsymbol{BA}$ 的主对角线元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik},$$

所以，$\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 的主对角线元素之和$=\boldsymbol{BA}$ 的主对角线元素之和.

(2) 用反证法. 假设 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{E}$，从而$\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}=n+\sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii}$. 因 $n\neq 0$，由(1)可知这与$\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii}$ 矛盾. 所以，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq \boldsymbol{E}$.

1-4(原题 8)　利用等式

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

解

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5=\left[\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\right]^5$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\times3^6-7\times2^6 & 3\times2^6-2\times3^6\\35\times3^5-35\times2^5 & 15\times2^5-14\times3^5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\,197&-1\,266\\7\,385&-2\,922\end{bmatrix}$$

1-5(原题 9)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，证明：当 $n\geqslant3$ 时，恒有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，并利用它计算 $\boldsymbol{A}^{100}$.

证明　当 $n=3$ 时，经直接验证可知，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^{3-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

假设 $n-1$ 时等式成立，即 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，则

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{n-3}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$$

所以，当 $n\geqslant3$ 时，恒有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{96}+2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}=\cdots=\boldsymbol{A}^2+49\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E}$$

$$=50\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}49&0&0\\0&49&0\\0&0&49\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}$$

§2　分块矩阵与初等阵

2-1(原题 1)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明　令 $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1，其余分量都为 **0** 的 n 维列向量. 由假设知，$\boldsymbol{Ae}_i=\boldsymbol{0}$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{Ae}_1,\boldsymbol{Ae}_2,\cdots,\boldsymbol{Ae}_n)=\boldsymbol{0}.$$

2-2(原题 3)　找一个 3 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使它左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 连续施行了下述两个行初等变换：

(1) 用$(-b)$乘 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行并加到第 3 行上去；

(2) 再调换第 2，3 两行.

其中，
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}.$$

解 对矩阵 A 先施行第一种行初等变换，相当于在 A 的左端乘以初等阵 $P(1(-b),3)$；再对 A 施行第二种行初等变换，相当于在 $P(1(-b),3)A$ 的左端再乘以初等阵 $P(2,3)$，因而矩阵 Q 是初等阵 $P(1(-b),3)$ 与 $P(2,3)$ 的乘积，即
$$Q=P(2,3)P(1(-b),3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-b&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

2-3(原题 5) 设 $A=\begin{bmatrix}0&E_{n-1}\\1&0\end{bmatrix}$，证明：$A^k=\begin{bmatrix}0&E_{n-k}\\E_k&0\end{bmatrix}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，$A^n=E_n$.

证明 设 e_j 是第 j 个分量为 1，其余分量都为 0 的 n 维列向量，则可证 Ae_j 是矩阵 A 的第 j 列. 将矩阵 A 按列分块，$A=(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$，从而
$$\begin{aligned}A^2&=AA=A(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})=(Ae_n, Ae_1, \cdots, Ae_{n-1})\\&=(e_{n-1}, e_n, e_1, \cdots, e_{n-2})=\begin{bmatrix}0&E_{n-2}\\E_2&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

假设 $A^{k-1}=\begin{bmatrix}0&E_{n-k+1}\\E_{k-1}&0\end{bmatrix}$，$1\leqslant k-1<n-1$，则
$$\begin{aligned}A^k&=AA^{k-1}=A\begin{bmatrix}0&E_{n-k+1}\\E_{k-1}&0\end{bmatrix}\\&=A(e_{n-k+2}, e_{n-k+3}, \cdots, e_n, e_1, \cdots, e_{n-k+1})\\&=(Ae_{n-k+2}, Ae_{n-k+3}, \cdots, Ae_n, Ae_1, \cdots, Ae_{n-k+1})\\&=(e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \cdots, e_{n-1}, e_n, e_1, \cdots, e_{n-k})\\&=\begin{bmatrix}0&E_{n-k}\\E_k&0\end{bmatrix}(1\leqslant k\leqslant n-1),\end{aligned}$$
$$A^n=AA^{n-1}=\begin{bmatrix}0&E_{n-1}\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\E_{n-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{n-1}&0\\0&1\end{bmatrix}=E_n$$

2-4(原题 6) 如果 A 是对称矩阵，那么，任意对调 A 的两列及相同的两行，所得的矩阵仍为对称矩阵.

证明 设 B 是对调 A 的第 i,j 两列及第 i,j 两行后所得的矩阵，则 $B=P(i,j)AP(i,j)$. 由于 $P(i,j)$ 是对称矩阵，A 也是对称矩阵，从而

$$B^{T}=(P(i,j)AP(i,j))^{T}=P(i,j)^{T}A^{T}P(i,j)^{T}=P(i,j)AP(i,j)=B,$$
所以 B 仍为对称矩阵.

§3 可逆矩阵

3-1(原题 1) 求矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{bmatrix}.$$

解 设 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_2\end{bmatrix}$，其中 $A_1=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}8&3\\5&2\end{bmatrix}$，由于

$$(A_1,E)=\begin{bmatrix}5&2&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&-2&5\end{bmatrix},$$

$$(A_2,E)=\begin{bmatrix}8&3&1&0\\5&2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{若干次行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&-3\\0&1&-5&8\end{bmatrix},$$

所以 A_1 与 A_2 可逆，且 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}$，$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3\\-5&8\end{bmatrix}$，从而 A 可逆且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{bmatrix}$$

3-2(原题 2) 解矩阵方程:

$$X\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$$

解 令 $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$，则原方程为 $XA=B$，可先

用行初等变换求 A^{-1}，再作矩阵乘法 BA^{-1} 来求 X. 另外，可由原方程 $XA=B$ 得到一个新的矩阵方程 $A^{T}X^{T}=B^{T}$，由

$$(A^{T},B^{T})=\begin{bmatrix}2&2&1&1&4\\1&1&-1&-1&3\\-1&0&1&3&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-2&-\frac{8}{3}\\0&1&0&2&5\\0&0&1&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

可得 $X^{T}=\begin{bmatrix}-2&-\frac{8}{3}\\2&5\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，从而 $X=\begin{bmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

3-3(原题 3)　利用逆矩阵解线性方程组：

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$$

解　系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{bmatrix}$，未知数列向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，常数列向量为 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，则线性方程组等价于矩阵方程 $AX=b$. 因为

$$(A,\ b)=\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\2&-1&-3&1\\3&2&-5&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&-1&-3\\0&5&-2&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&3&9\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&0&1&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&0\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

所以 A 可逆，且 $X=A^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$.

3-4(原题 4)　设 $A^{k}=0$(k 为正整数)，证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^{2}+\cdots+A^{k-1}$

证明　因为

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$
$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-A^3-\cdots-A^{k-1}-A^k$$
$$=E,$$

所以，$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

3-5(原题 5)　设 A,B 都是可逆矩阵，求矩阵的逆：

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

解　设 $X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$满足 $AX=E$，即

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ CX_1+BX_3 & CX_2+BX_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

从而可得方程组

$$\begin{cases} AX_1=E_1 & (1) \\ AX_2=0 & (2) \\ CX_1+BX_3=0 & (3) \\ CX_2+BX_4=E_2 & (4) \end{cases}$$

因为 A,B 是可逆矩阵，从而由式(1)与式(2)可得 $X_1=A^{-1}$，$X_2=0$，由式(3)与式(4)可得 $BX_3=-CA^{-1}$，$BX_4=E_2$，即 $X_3=-B^{-1}CA^{-1}$，$X_4=B^{-1}$.

所以$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

3-6(原题 6)　验证矩阵等式(假设下式中出现的各量都有意义)

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

解法 1　因为

$$(A+B)[A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]$$
$$=E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$$
$$=E-[A(A^{-1}+B^{-1})]^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1}[A(A^{-1}+B^{-1})]^{-1}$$
$$=E-(E+AB^{-1})^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1}(E+AB^{-1})^{-1}$$
$$=(E+BA^{-1})-(E+BA^{-1})(E+AB^{-1})^{-1}$$
$$=(E+BA^{-1})[E-(E+AB^{-1})^{-1}]$$
$$=(A+B)A^{-1}[(E+AB^{-1})(E+AB^{-1})^{-1}-(E+AB^{-1})^{-1}]$$
$$=(A+B)A^{-1}(E+AB^{-1}-E)(E+AB^{-1})^{-1}$$
$$=(A+B)B^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})^{-1}$$
$$=(A+B)B^{-1}B(B+A)^{-1}$$

$=\boldsymbol{E}$,

所以,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

解法 2

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]\\&=\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}]=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}\\&=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{BB}^{-1}+\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\end{aligned}$$

3-7(原题 7)　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 皆可逆,证明:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})[\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}]\\&=\boldsymbol{AB}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{BB}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\&=(\boldsymbol{AB}^{-1}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{AB}^{-1}+\boldsymbol{AA}^{-1})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

所以$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3-8(原题 8)　证明:如果 5 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是对调 5 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行与第 5 行得到的,那么,$\boldsymbol{B}^{-1}$是对调 $\boldsymbol{A}^{-1}$的第 3 列与第 5 列得到的.

证明　设 $\boldsymbol{B}$ 是对调 $\boldsymbol{A}$ 第 3 行与第 5 行得到的,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(3,5)\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{P}(3,5)$是对应的初等阵.从而 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}(3,5)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}(3,5)$,即 $\boldsymbol{B}^{-1}$是对调 $\boldsymbol{A}^{-1}$的第 3 列与第 5 列得到的.

§4　线性方程组

4-1(原题 3)　问 a,b 为何值时,线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2\qquad\quad=3\\4x_1+7x_2+x_3=10\\\qquad\ \ x_2-x_3=b\\2x_1+3x_2+ax_3=4\end{cases}$.有惟一解,无解,无穷多解?

解　对增广矩阵作行初等变换,有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}$$

当 $b-2\neq0$，即 $b\neq2$ 时，方程组无解；当 $b-2=0$ 且 $a-1\neq0$，即 $b=2$ 且 $a\neq1$ 时，方程组有惟一解；当 $b-2=0$ 且 $a-1=0$，即 $b=2$ 且 $a=1$ 时，方程组有无穷多解.

4-2（原题 4） 证明：当 $m<n$ 时，m 个方程 n 个未知数的线性方程组（不一定是齐次）有解的话，就一定有无穷多解.

证明 对 m 个方程 n 个未知数的线性方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}&\cdots&c_{1n}&d_1\\&c_{22}&\cdots&c_{2r}&\cdots&c_{2n}&d_2\\&&\ddots&\vdots&&\vdots&\vdots\\&&&c_{rr}&\cdots&c_{rn}&d_r\\&&&&&&d_{r+1}\end{bmatrix}$$

因为，此线性方程组有解，所以，一定有 $d_{r+1}=0$，又由 $m<n$ 可知，$r\leqslant m<n$，从而此线性方程组一定有无穷多解.

4-3（原题 5） 证明：齐次线性方程组有一个非零解时，必有无穷多解.

证明 设齐次线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，若它有一个非零解 $\boldsymbol{\alpha}$，则对任意常数 k，都有 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{A\alpha})=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $k\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解. 由常数 k 的任意性可知，此线性方程组必有无穷多解.

§5 行列式的定义与性质

5-1（原题 1） 求 $\begin{vmatrix}a&1&2&3\\b&-1&0&1\\c&0&2&3\\d&1&-1&-2\end{vmatrix}$ 的第一列元素的代数余子式，并求

出此行列式的值.

解 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&2&3\\1&-1&-2\end{vmatrix}=-1,$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\1&-1&-2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\0&2&3\end{vmatrix}=2$$

此行列式的值为 $D=aA_{11}+bA_{21}+cA_{31}+dA_{41}=b-a+2c+2d.$

5-2(原题 3) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&5&7&-8\\1&1&1&1\\2&0&-9&6\\-3&4&3&7\end{vmatrix}$,证明 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0.$

证明

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&5&7&-8\\1&1&1&1\\2&0&-9&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

5-3(原题 6) **设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,证明奇数阶反对称矩阵的行列式是零.**

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$,若阶数 n 是奇数,则有

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|,$$

所以有 $|\boldsymbol{A}|=0.$

5-4(原题 8) (1) 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&7&19&0\\0&7&-2&-1&3\\8&0&4&2&11\\0&0&5&2&22\\0&0&0&3&100\end{vmatrix}=10,\quad D_1=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 100 \end{vmatrix}$$，求 D_1 的值.

(2) 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

解 (1) 将 D 及 D_1 均按第 5 列展开，有

$$\begin{aligned} D &= 3A_{25}+11A_{35}+22A_{45}+100A_{55}=10 \\ D_1 &= 3A_{25}+7A_{35}+22A_{45}+100A_{55} \\ &= 3A_{25}+11A_{35}+22A_{45}+100A_{55}-4A_{35} \\ &= 10-4A_{35}=-410 \end{aligned}$$

(2) 设

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = D_1+D_2$$

因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1 \leftrightarrow c_2]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_2} \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

所以$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

5-5(原题 9) 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，(2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=\!=\!=\!=}_{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_4+r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$=1\times(-2)\times(-2)\times4=16$

(2) **解法 1**

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=\!=\!=\!=}_{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1-c_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} + x^2y^2$$