高 等 学 校 教 学 用 书

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

(一)

第三卷　复数分析

初　稿

南京大学数学天文学系編

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

(一)

第三卷 复数分析

初稿

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社

高等数学(一)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体编成的一部主要基础课程的新教材。它是把以往的解析几何、数学分析、微分几何、变分法、复变函数論、实变函数論和泛函分析等七門課程中的有用的内容和若干新添材料，結合起来的整体。全书共分四卷：分析基本方法、分析基本原理、复数分析与現代分析。第三卷复数分析包括解析函数、保角映射及其应用与椭圆函数等三章。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、天文、力学等专业的教材，其他如物理、气象等专业以及工科大学等都可参考。

高 等 数 学

(一)

第三卷　复数分析

初 稿

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

人民教育印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 13010·918 开本 850×1168 1/32 印张 $5\frac{7}{16}$

字数 128,000 印数 00001—1,000 定价(10)￥0.55

1961年1月第1版 1961年1月北京第1次印刷

目 录

第一章 解析函数

第二章 保角映射及其应用

第三章 椭圆函数

第一章 解析函数

在第二卷中，我們已經介紹了解析函数的概念，并給出了它的一些基本性質。但那里所講的仅是单值函数，因为那时复变函数的連續性、解析性等，都只对单值函数有意义。就是有时提到多值函数，也只是考慮它的某一单值分支。在本章中，我們将介紹一般解析函数的概念，这些函数可以是多值的。并且进一步推广到多元函数的情形。

在討論多值的解析函数之前，将先敍述一些有关单值解析函数的补充知識。

§1. 解析函数的一些性質

在第二卷的第四章与第五章中，曾經給出了解析函数的一些基本性質，例如，哥西积分定理，解析函数的唯一性定理，最大模原理，殘数定理，柳微尔定理，函数的零点与孤立奇点及其性質，函数在一区域内或在一点的邻域内为解析的充要条件等。在这一节我們再补充討論解析函数的一些性質。

1.1 整函数与半純函数 我們可以根据函数的奇点的特征，来划分二类重要的函数：

1) **整函数** 在完全的 z 平面上，除了无穷远点之外，处处都是解析的函数 $f(z)$，称为整函数。这在第二卷的第五章中也已提到过了。因此，一个整函数 $f(z)$ 可以展开成泰勒級数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n, \tag{1}$$

这級数对一切有限的 z 都收斂。反之，若冪級数(1)对一切有限的

z 都收敛，则它的和 $f(z)$ 必是一个整函数。整函数的和、差与积，显然也是整函数。

整函数 $f(z)$ 以 $z=\infty$ 为其唯一的奇点，級数(1)便可看作是它在 $z=\infty$ 的邻域内的罗朗展开式。根据 $z=\infty$ 是那一种类型的奇点，还可把整函数分成下述三类：

(i)若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在其某一个邻域 $|z|>R$ 内是有界的。由于 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上連續，从而在 $|z|\leqslant R$ 上有界。故由柳微尔定理知道，$f(z)$ 是一个常数。

(ii)若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，则在它的邻域内，$f(z)$ 的罗朗展开式只含有有限多个正幂項：

$$c_1z+\cdots+c_nz^n.$$

于是函数

$$g(z)=f(z)-(c_1z+\cdots+c_nz^n)$$

在整个 z 平面上解析，且以 $z=\infty$ 为它的可去奇点，从而是个常数。因此 $f(z)$ 是个 n 次多項式，这时也称 $f(z)$ 为有理整函数。

(iii)若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则称 $f(z)$ 为超越整函数。例如，e^z, $\sin z$ 等都是超越整函数。

当 $f(z)$ 是一个 n 次多項式时，它有 n 个零点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。我們知道，这时 $f(z)$ 可写为

$$f(z)=A(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n).$$

若 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零点，则可表为

$$f(z)=A_1\prod_{1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \qquad (2)$$

若 $f(z)$ 是一个超越整函数，它可以有有限多个零点，也可以没有零点，如 e^z，或有无限多个零点，如 $\sin z$。若 $f(z)$ 沒有零点，则 $\frac{f'(z)}{f(z)}=[\ln f(z)]'$ 也是个整函数。求积分，便得出整函数

$$g(z)=\ln f(z).$$

故 $f(z)$ 可表示为 $e^{g(z)}$ 的形状，$g(z)$ 是个整函数。

若 $f(z)$ 只有有限多个零点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则函数

$$\frac{f(z)}{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}$$

便是一个沒有零点的整函数，可表为 $e^{g(z)}$，于是

$$f(z)=e^{g(z)}(z-a_1)\cdots(z-a_n).$$

若 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零点，则 $f(z)$ 可表为

$$f(z)=Ae^{g(z)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right). \tag{3}$$

若 $f(z)$ 有无限多个零点

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, \tag{4}$$

設其中的 a_k 都不为 0。在第二卷第五章中已提到过，若有正整数 m 存在，使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^m}$ 收斂，则 $f(z)$ 可表为

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m-1}}, \tag{5}$$

其中 $g(z)$ 为某一个整函数。若 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 p 阶零点，则应在 (5) 前面加上因子 z^p。

对于一般的具有零点 (4) 的整函数 $f(z)$，可以証明，总有一个整函数 $g(z)$ 与整数序列 $\{m_k\}$ 存在，使得

$$f(z)=z^pe^{g(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_k-1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{m_k-1}}. \tag{6}$$

2) 半純函数 在整个 z 平面上（无穷远点除外）除了至多有极点以外沒有其他奇点的单值函数，称为半純函数。由定义可見，整函数是包括在半純函数之内的。并且，一个半純函数 $f(z)$ 在一有界区域内只能有有限多个极点，因为，不然的話，就要有这些极

点的一个聚点 a，这是 $f(z)$ 的一个非孤立奇点，与 $f(z)$ 只有极点的假設相矛盾。

設 $f(z)$ 是一个半純函数。若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的极点或可去奇点，則称 $f(z)$ 为有理函数。事实上，这时 $f(z)$ 可以表示为两个多項式的商的形式：

$$f(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}, \tag{7}$$

从而与通常所說的有理函数的意义相一致。

我們来証明这結論。由于 $f(z)$ 是有理函数，它在整个 z 平面上只能有有限多个极点，否則或者在有限点处或者在 $z=\infty$ 处就要有 $f(z)$ 的非孤立奇点了。把这些极点記作 $z_1, z_2, \cdots, z_k$。設 $f(z)$ 在极点 z_λ 附近的罗朗展开式中的主要部分为

$$h_\lambda(z)=\frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z-z_\lambda}+\frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^2}+\cdots+\frac{c_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\alpha_\lambda}}, (\lambda=1,2,\cdots,k).$$

又 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 附近的罗朗展开式中 z 的正次幂項为

$$g(z)=A_1z+A_2z^2+\cdots+A_pz^p.$$

則函数

$$f(z)-g(z)-\sum_{\lambda=1}^{k}h_\lambda(z)$$

以 $z_\lambda(\lambda=1,\cdots,k)$ 与 $z=\infty$ 为可去奇点，此外处处解析。因此，它是一个常数 C。故我們有

$$f(z)=C+g(z)+\sum_{\lambda=1}^{k}h_\lambda(z). \tag{8}$$

再通分便得出(7)。由此知道，任何一个有理函数都可以分解成一个有理整函数与一些最簡部分分式的和，而且这分解是唯一的。(8)就表示了这一分解。

由(7)显然可見，分母的零点就是 $f(z)$ 的极点，并且，在 $n>m$ 时，$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $n-m$ 阶极点，在 $n\leqslant m$ 时，$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可

去奇点。

除了有理函数之外，例如 tg$z$ 等也属于半純函数。

对于一般的半純函数 $f(z)$，也同有理函数一样，可以分解成整函数与无限多項部分分式之和。

还容易看出，任何半純函数 $f(z)$ 都可以表示成两个整函数的商的形式。因为，由于 $f(z)$ 在任何有界区域内只有有限多个极点，故它在整个 z 平面內的极点可排成一个序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

設 $f_2(z)$ 是一个整函数，它在 $f(z)$ 的每一个 α_k 阶极点 a_k 处有 α_k 阶的零点，則乘积

$$f_1(z) = f(z)\cdot f_2(z)$$

便是一个整函数。因此 $f(z)$ 可以表示成整函数的商的形式：

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

1.2 解析函数序列 在第二卷第五章中，已經討論过一般的函数序列与函数項級数的一致收斂性，并提到了关于一致收斂的解析函数項級数的外尔斯特拉斯定理。在那里已經說过，函数序列与函数項級数是相对应的，把那里的外尔斯特拉斯定理用到解析函数的序列上来，便有下面的定理：

定理 1 設函数 $f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$ 都在区域 (D) 內解析，且函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在 (D) 內每一閉集上都一致收斂于函数 $f(z)$，則 $f(z)$ 也在 (D) 內解析，而且，对于任何正整数 k，导函数序列 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 也在 (D) 內每一閉集上都一致收斂于 $f^{(k)}(z)$。

关于解析函数序列的收斂性，我們还将介紹一个很有用的定理：

定理 2 設 $f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$ 都在区域 (D) 內解析，序列 $\{f_n(z)\}$ 在 (D) 內每一閉集上都一致收斂于 $f(z)$，且 $f(z)$ 在 (D) 內

不是一个常数。若每一个 $f_n(z)$ 在 (D) 內的 a 值点都不超过 p 个，则 $f(z)$ 在 (D) 內的 a 值点也不超过 p 个。

証明　区域 (D) 不能是完全的 z 平面。因为，若 $f_n(z)$ 都在完全的 z 平面內解析，则由定理 1，$f(z)$ 也在完全的 z 平面內解析，从而由柳微尔定理便要得出 $f(z)$ 是一个常数了。

先設 (D) 是有界区域。若定理不成立，設 $f(z)$ 在 (D) 內有 $p+1$ 个 a 值点 $z_1, z_2, \cdots, z_{p+1}$。以每一个点 z_k 为中心作一小圓周 γ_k，使每一个 γ_k 都全在 (D) 內，且这些 γ_k 彼此不相交。在每一个 γ_k 上都有 $f(z) \neq a$，故必有一常数 $m>0$ 使

$$|f(z)-a|>m, \quad (z\in\gamma_k, \ k=1,2,\cdots,p+1).$$

另一方面，$\{f_n(z)\}$ 在包含这些 γ_k 的一个閉区域上一致收斂于 $f(z)$，故在 n 足够大时，可使

$$|f_n(z)-f(z)|<m, \quad (z\in\gamma_k, \ k=1,2,\cdots,p+1).$$

因此，对于函数

$$f_n(z)-a=[f(z)-a]+[f_n(z)-f(z)]$$

可应用儒雪定理（第二卷，第五章），从而知道函数 $f_n(z)-a$ 与 $f(z)-a$ 在每一个 γ_k 的內部都应有相同个数的零点，即，$f_n(z)$ 也应有 $p+1$ 个 a 值点。这与定理的假設相矛盾。

若 (D) 是无界的，包含无穷远点，但不是完全的 z 平面，则作一适当的綫性分式映射，可把 (D) 变换成一个有界区域（見后面第二章 §2），因此定理仍然成立。証毕。

設 $f(z)$ 为定义在区域 (D) 內的单值函数。若当 $z_1, \ z_2\in(D)$，$z_1 \neq z_2$ 时，恒有

$$f(z_1)\neq f(z_2),$$

则說 $f(z)$ 在 (D) 內是单叶的。显然，$f(z)$ 是在 (D) 內的单叶函数的充要条件是，对于任何值 a，$f(z)$ 在 (D) 內的 a 值点不可能多于一个。

在定理 2 中置 $p=1$，便得出一个关于单叶解析函数序列的性質：

定理 3 若 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是在区域 (D) 内的单叶解析函数，序列 $\{f_n(z)\}$ 在 (D) 内每一閉集上都一致收斂于 $f(z)$，且 $f(z)$ 在 (D) 内不是常数，則 $f(z)$ 也是在 (D) 内的单叶解析函数。

在第二卷第二章中曾經指出：一个有界的无穷点列，一定存在一个收斂的子序列。这对于代表实数的点与代表复数的点同样成立。現在来考慮，对于函数序列来說，是否有同样的性質。就一般講，有界的函数序列不一定有收斂的子序列存在。例如，序列 $\{\sin nx\}$ 在实軸上是有界的，但沒有收斂的子序列。

設 E 为由无限多个在区域 (D) 内解析的函数 $f(z)$ 所构成的集合，$E=\{f(z)\}$。若每一个属于 E 的函数序列 $\{f_n(z)\}$ 都具有在 (D) 内每一閉集上都一致收斂的子序列，則說 E 在 (D) 内是列紧的，或致密的。

設 E 为定义在点集 M 上的一个函数集合 $E=\{f(z)\}$，若有固定的数 K 存在，使得对 E 中的任何函数 $f(z)$ 与 M 中的任何点 z，都有

$$|f(z)|<K,\quad (z\in M,\ f(z)\in E),$$

則說函数集合 $E=\{f(z)\}$ 在 M 上一致有界。

对于解析函数序列的列紧性，我們有下面的蒙德尔(Montel)凝聚原理：

定理 4 設函数 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在区域 (D) 内解析。序列 $\{f_n(z)\}$ 在 (D) 内是列紧的充要条件为：$\{f_n(z)\}$ 在 (D) 内每一閉集上都一致有界。

这定理我們不預証明。它对于分析中的某些存在問題，例如在微分方程、积分方程上是很有用的。在高等数学(二)就用到这定理，那是仅就一般的連續函数族而言的，在那裏称为阿尔采拉

(Arzela)定理。

§2. 解析开拓

在前面，我們已經知道解析函数在一个区域内的值，可由它在这个域内的一个任意小的綫段上的值(或者甚至是在这个域内无穷多个点上的值，只要它有一个釆属于这个区域的聚点)来完全确定。这是一个和实变函数有着本質上的区别的性質。在实变函数中，一个定义在区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的函数 $\varphi(x)$，我們可以用无限多种方式将这函数的图形延长到区間以外去，而不破坏它的連續性。对于解析函数来說，定义域的扩大，只要是可能的話，那末扩大将是唯一的，換句話說，它在某一区域内的值，完全地、唯一地确定了它在这个区域以外的值。下面我們来詳細地研究这个特性。

2.1 解析开拓原理 若函数 $f_1(z)$ 在区域 (D_1) 内解析，又若区域 (D_2) 与 (D_1) 有公共部分 $(D_{1,2})$，則根据唯一性定理，或者在 (D_2) 内存在唯一的函数 $f_2(z)$，它在区域 (D_2) 内解析，且在 $(D_{1,2})$ 内滿足 $f_1(z)=f_2(z)$，或者根本就沒有这样的 $f_2(z)$ 存在。

我們称这样的 $f_2(z)$(如果存在的話)为 $f_1(z)$ 向 (D_2) 内的直接解析开拓。同样 $f_1(z)$ 也是 $f_2(z)$ 向 (D_1) 内的直接解析开拓。

由等式

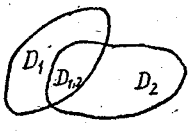

图 1.1

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in(D_1)\\ f_2(z), & z\in(D_2)\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in(D_{1,2})\end{cases}$$

所定义的函数 $F(z)$，显然是在区域 $(D)=(D_1)+(D_2)$ 内的解析函数。由唯一性定理可知，如这个函数存在的話，那末就仅有一个，它在 (D_1)，(D_2) 内的值有严密的内在联系，因为这函数在 (D_2) 内的值完全由它在 (D_1) 内的值所确定，同样，在区域 (D_1) 内的值也完全由它在 (D_2) 内的值所确定(图 1.1)。

如我們用(d)記(D_1)[或(D_2)],则解析开拓的一般定义可叙述为:

定义 若函数$f(z)$在(d)内解析，且在包含(d)在内的区域(D)内存在一个函数$F(z)$,它在(D)内解析，且在(d)内和$f(z)$完全一致，则我們称$F(z)$为$f(z)$在域(D)内的解析开拓。有时也把“扩大解析函数的定义域”这一动作称为解析开拓。

上面所說的两个区域(D_1)与(D_2)，也可以沒有公共部分，而只有一段公共的边界γ_{12}。这时，若有一个在区域$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内解析的函数$F(z)$，它在(D_1)与$f_1(z)$一致，在(D_2)内与$f_2(z)$一致，则便說$f_2(z)$是$f_1(z)$通过γ_{12}到(D_2)内的直接解析开拓。

我們时常要考慮一个在区域(D)内解析的函数通过(D)的一段边界而作的解析开拓，下面給出一个便于使用的充分条件:

連續开拓原理 設两个不相重迭的单連通区域(D_1)与(D_2)有一段公共弧γ_{12}，函数$f_1(z)$在(D_1)内解析，$f_2(z)$在(D_2)内解析。若$f_1(z)$在$(D_1)+\gamma_{12}$上連續，$f_2(z)$在$(D_2)+\gamma_{12}$上連續，且在γ_{12}上有

$$f_1(z)=f_2(z),\quad (z\in\gamma_{12}),$$

则$f_2(z)$便是$f_1(z)$通过γ_{12}到(D_2)内的直接解析开拓。

証明 函数

$$F(z)\doteq\begin{cases}f_1(z), & (z\in(D_1))\\ f_1(z)=f_2(z), & (z\in\gamma_{12})\\ f_2(z), & (z\in(D_2))\end{cases}$$

是在单連通区域$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内連續的，因此，只要能証明它沿在$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内的任一条封閉曲綫C的积分都为0，則由第二卷第四章中的莫累拉定理，$F(z)$便是在$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内解析的，从而$f_2(z)$便是$f_1(z)$的直接解析开拓了。

設C是在$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内的任何一条封閉曲綫。若C完

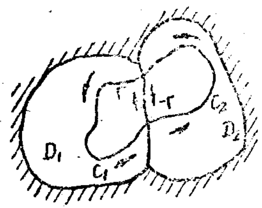

图 1.2

全在$(D_1)+\gamma_{12}$内或$(D_2)+\gamma_{12}$内，则由于$f_1(z)$与$f_2(z)$分别在(D_1)与(D_2)内解析，$F(z)$沿C的积分显然为0。若C一部分在(D_1)内，一部分在(D_2)内，把它在(D_1)与(D_2)内的部分分别記为C_1与C_2，把γ_{12}圈在C内的那一部分記作Γ，任給定其方向，如图1.2所示。则有

$$\int_C F(z)dz=\int_{C_1+C_2+\Gamma-\Gamma} F(z)dz=\int_{C_1+\Gamma} F(z)dz+\int_{C_2-\Gamma} F(z)dz=$$

$$=\int_{C_1+\Gamma} f_1(z)dz+\int_{C_2-\Gamma} f_2(z)dz=0.$$

故$F(z)$沿在$(D_1)+\gamma_{12}+(D_2)$内的任何封閉曲綫的积分都为0。証毕。

須注意，当(D_1)与(D_2)有若干公共部分或若干公共边界时，通过不同的公共部分或公共边界的解析开拓可能是不同的。例如，設(D_1)是区域$1<|z|<2$, $\mathrm{Im}z>0$，而(D_2)为$1<|z|<2$, $\mathrm{Im}z<0$。函数$f_1(z)$为

$$f_1(z)=\sqrt{z},\quad 0<\arg z<\pi.$$

则$f_1(z)$通过实軸上綫段$(-2,-1)$到(D_2)内的解析开拓是

$$f_2(z)=\sqrt{z},\quad \pi<\arg z<2\pi.$$

而$f_1(z)$通实軸上綫段$(1,2)$到(D_2)内的解析开拓是

$$f_2^*(z)=\sqrt{z},\quad -\pi<\arg z<0.$$

这两个函数在(D_2)内的値是不相同的。

我們有时利用一序列的区域来得到函数$f_1(z)$的一个解析开拓，有时借助于曲綫来得到解析开拓。

設有一曲綫L被分为依次相接的綫弧

$$\overset{\frown}{P_1Q_1},\ \cdots,\ \overset{\frown}{P_nQ_n},$$

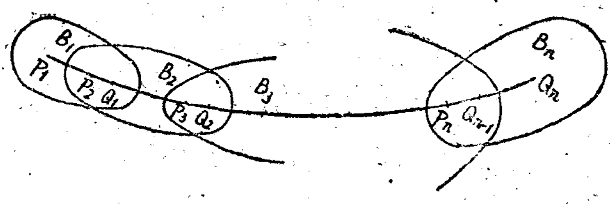

图 1.3

使 $\overset{\frown}{P_kQ_k}$ 和 $\overset{\frown}{P_{k+1}Q_{k+1}}$ 常有一公共部分 $\overset{\frown}{P_{k+1}Q_k}$（图 1.3）設这曲綫 L 为一串区域(B_1)，(B_2)，(B_3)，…，(B_k)，…，(B_n)所复盖，使得 $\overset{\frown}{P_kQ_k}$ 处于(B_k)之內，(B_k)和(B_{k+1})的公共部分$(B_{k,\,k+1})$含有 L 上的 $\overset{\frown}{P_{k+1}Q_k}$ 段。如在(B_1)中有解析函数 $f_1(z)$，它借助于这一串区域(B_1)，(B_2)，…，(B_n)經过$(B_{1,2})$，$(B_{2,3})$，…，$(B_{n-1,n})$而被开拓，那末，我們称 $f_1(z)$ 沿曲綫 L 被解析开拓。如果这种开拓是可能的，則必为唯一的，它与 L 上的分段法和上述的区域串的取法无关。

設由函数 $f_1(z)$ 出发，沿一切可能的方向，(卽沿一切可能的曲綫 L 上)，利用一切可能的区域序列$\{(B_k)\}$，进行解析开拓。这样，借助于一切可能的解析开拓而得到的所有函数值的总体，决定唯一的函数 $F(z)$，称为解析函数，而构成 $F(z)$ 的部分函数值（或表达式）$f_k(z)$ 称为解析函数 $f(z)$ 的一个元。在上述所有可能用来进行解析开拓的一切区域序列$\{(B_k)\}$的"总和"，称为解析函数 $F(z)$ 的存在域。因为解析函数 $F(z)$ 在它的存在域內已完全包括了它所可能作的解析开拓的全体，所以有时又称 $F(z)$ 为完全解析函数。对应于存在域中一切点的函数值的总和称为函数的值域。

在进行解析开拓时，可能出現这种情况：当 $f_1(z)$ 沿着一条曲綫 L 由 P_1 向 Q_n 进行解析开拓时，只能达到 L 上某一个点 c 为止，不能越过它进行开拓；这时便称点 c 为函数 $F(z)$ 的奇点。相反地，不論沿任何方向，总不会阻碍解析开拓的点，則称为函数 $F(z)$ 的正規点。根据解析开拓所定义的奇点和正規点与以前的

定义，在本質上是一致的。前面所述，函数的正规点，总在它的存在域内，而存在域本身，就是由函数的全部正规点所构成的。相反的，函数的奇点，总在它的存在域的边界上，而存在域的边界本身，就是由函数的全部奇点所构成的，又称为自然疆界。

在解析开拓过程中还有另一种重要的情况，即經过若干次解析开拓后(图 1.4 中为第三次)，新的区域又回到了原来的区域。图中加斜綫的部分就是重迭部分。这时，定义在 B_3 内的函数 $f_3(z)$ 在$(B_{1,3})$[(B_1)和(B_3)的公共部分]上的値，可能和$f_1(z)$[定义在(B_1)上的函数]在$(B_{1,3})$上的値完全相同，或者完全不同。在第一种情况时，函数在那里将是单値的。在第二种情况下，函数在那里将是多値的，这后一种情况，将在下节中詳細研究。

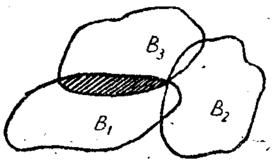

图 1.4.

如果从沿曲綫开拓的情况来看，单値函数在一点的函数値和解析开拓的路徑无关，仅决定于点的位置，而多値函数在一点的函数値不仅决定于点的位置，还和解析开拓的路徑有关。

2.2 冪級数开拓法 根据上面的解析开拓原理，如何来具体地进行解析开拓呢？方法是很多的，但是利用冪級数的开拓方法，在理論上将是最重要的一个。下面我們就来介紹这一种方法。

如在区域(G_1)内給定了一个解析函数 $f_1(z)$，并設 z_1 是 (G_1) 内的任意一点，則 $f_1(z)$可在 z_1 点的邻域内展成冪級数：

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}(z-z_1)^n. \tag{9}$$

如果这个級数的收斂半徑为无穷大，换句話說，即在 z 平面上每一点处，級数(9)都收斂。这时級数(9)的和表示一个在整个平面上处处解析的函数，而在(G_1)内与 $f_1(z)$相同，因之，这个函数就是 $f_1(z)$在(G_1)以外的解析开拓。