

高等学校金融学专业课程系列教材

金融工程学

王光伟 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校金融学专业课程系列教材

金融工程学

王光伟 编著

苏州大学“211工程”学科建设经费资助出版



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书在对金融工程、风险、投机、套利、最优投资组合的确定等重要的核心范畴和内容进行了必要的讨论后,分章节对重要的金融衍生工具和有关基本金融产品进行了系统研究。遵循由简单到复杂的顺序,各章分别讨论了各种工具的特征,这些工具在套期保值、风险控制方面由完全免疫向或然免疫的进化等等内容,并且对有关工具的定价、套期保值比率的计算和工具的实际应用都给予了充分的关注。本书还针对我国学生的特点,特别对所需的数理方法进行了精心选择和易于理解的推演,本书对重要公式和模型都有清楚的建立过程,使学生不仅能够“知其然”,还能够“知其所以然”。即使对过于复杂的模型,也通过附录的形式给出证明,便于数学基础好的读者进一步阅读。

本书适合作为金融学、经济学、管理学专业的研究生教学用书,也适合具有上述专业本科知识的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

金融工程学/王光伟编著. —北京:高等教育出版社,

2006.1

ISBN 7-04-018376-5

I. 金… II. 王… III. 金融学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 144276 号

策划编辑 于明 责任编辑 李芸 封面设计 李卫青 责任绘图 朱静
版式设计 王艳红 责任校对 金辉 责任印制 杨明

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总机 010-58581000

经销 蓝色畅想图书发行有限公司
印刷 北京未来科学技术研究所
有限责任公司印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开本 787×960 1/16
印张 15
字数 280 000

版次 2006 年 1 月第 1 版
印次 2006 年 1 月第 1 次印刷
定价 23.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18376-00

序 言

对于“金融工程学”，成立于1991年的国际金融工程学会的定义是：金融工程学是借助庞大而先进的金融信息系统、用系统工程的方法将现代金融理论与计算机信息技术相结合、用各种模型和方法开发设计出新型金融产品、创造性地解决各种金融问题的学科。

更通俗地说，金融工程学是利用和创新金融工具，并用于解决金融活动中的风险控制和盈利问题的一个新兴学科。

在20世纪80年代，金融领域开始出现了新的金融衍生工具，对所有工具组合运用的研究及创新更多工具的现实要求就形成了金融工程学这一学科，它早已成为西方国家金融学研究生和MBA的一门重要专业课程。

金融工程学被介绍到我国后的一段时期中，学校所用的教材基本上是海外的原版教材或原版翻译教材，经过一段时间后出现了我国学者自行撰著的教材。但由于金融工程学涉及金融学、统计学、系统工程学乃至计算机信息技术，是诸多学科的综合，而且还是一门新兴的发展中的学科，而中国到目前为止还尚未应用许多金融衍生工具，这就使我国缺乏金融工程的实务基础。这样的现实，不仅进一步显示了金融工程学这门课程在我国经济发展和金融改革中的重要而迫切的意义，也意味着这门学科的教学与应用在我国有许多需进一步完善和发展之处。也正是基于同样的理由，我国的现行金融工程学教材的建设应该说还远远不能尽如人意，表现出以下特点：

(1) 一部分教材具有浓厚的数理特色。这类教材的作者多有数理及工程背景，善于用数理模型和方法来阐释金融工程原理。这类著作中充满了逻辑优美的数理推导和相关模型，而经济活动中的金融学和经济学过程相对就不是那么清晰。而对交易和经济过程的经济学及金融学解释同样是重要的，对学生来说尤其如此。我国的经济学科（当然包括金融学科）招生以文科为主的特点，使得这类教材的普遍可接受性受到了限制。

(2) 另一类教材则具有应用操作特色。这类教材的作者大多有在海外金融机构工作的经历，熟悉金融工具的交易过程，常常具有丰富的实务经验。这类教材倾向于详细介绍金融合约（工具）的交易，常常对每一种工具的每一项功能、对每一项功能（如套期保值）在不同市场（如外汇、股票、债券）中的运用都列举了大量操作案例。在上述内容占据了大量篇幅后，有关原理的论述空间就不多了。因此，这类教材更加适合金融机构的工作人员或有过有关金融业

工作经验的人士阅读。

(3) 另一类是原版及其翻译教材。原版及其翻译教材常常兼具以上两个特点, 具有广泛的系统性, 一本书往往论及金融工程所涉及的方方面面, 而且在其中大量引用华尔街的市场数据、报表和案例。以致一本教材在我国常常要分上下册出版, 我国的教师在内容选择上自然易产生难以驾驭之感, 教师在备课过程中要耗费较多的精力, 对学生来说不仅同样具有这个问题, 而且还有昂贵的教材费用负担。

正是由于如此, 在长期的金融工程教学实践中, 我总是不得不采用多本有关书籍作为教学参考, 在讲授某一部分、某一工具时主要参考一些书籍, 在讲授另一部分、另一工具时则主要参考另一些书籍, 其中的不便之处不言而喻。但在这个过程中, 终于逐步形成了本书的教学体系。

这个教学体系具有以下主要特点:

(1) 考虑到我国金融、管理研究生中文科、理科生源共存的情况, 首先加强了对有关经济、金融工程的原理论述。在金融原理论述的基础上, 有机地加入数理模型推导, 其中数理方法也经过选择, 尽量限于我国学生比较熟悉的方法。因此, 对本书中的重要公式和模型都有清楚的建立过程, 使学生不仅能够“知其然”, 还能够“知其所以然”。即使对过于复杂的模型, 也通过附录的形式给出证明, 便于数学基础好的读者进一步阅读。

(2) 原理与应用的有机结合。本书的导论部分已经对有关基本原理进行了论述, 而以后的各章主要按照由简单到复杂的顺序, 分别讨论了各种工具、这些工具间的历史演进关系, 以及这些工具在风险控制方面由完全免疫向或然免疫的进化等等内容, 在每章都给出了有关工具套期保值比率的计算, 并举出了实际应用的例证。

(3) 简洁明了是本书的又一宗旨。本书在导论中对金融工程、风险、投机、套利、最优投资组合的确定等重要的核心范畴和内容进行了必要的讨论后, 后续各章对重要的基本金融产品和金融衍生工具逐一进行了理论和应用研究, 删除了与货币银行学相重复的“资产负债管理技术”的内容、与国际金融学和投资学相重复的“金融市场分析”的内容、与管理学相重复的“产品开发分析”的内容, 以及事实上分散蕴含于对每个金融工具讨论中的“积木分析法”等等内容, 使得本书内容精炼、紧凑, 适合于我国绝大多数高校为该课程设置的一学期(2~3学时/周)的教学工作量。

鉴于理论水平、时间精力等原因的限制, 本书一定也存在不足乃至谬误, 恳请读者批评指正。

王光伟

2005年8月

苏州 静远斋

目 录

第一章 导论——风险与金融工程	1
§1 金融工程的概念	1
一、金融工程	1
二、金融工具	1
三、盈利：套期保值、套利与投机	2
§2 风险及其衡量	4
一、风险	4
二、系统风险与非系统风险	6
§3 风险投资组合的选择——可行集与有效集	10
一、人们对风险的态度分类	10
二、两种风险资产组合时的可行集与有效集	12
三、多种风险资产组合的可行集和有效集	15
四、最优投资组合选择	16
§4 无风险资产与风险资产的组合	17
一、一个无风险资产与一个风险资产组合的资本市场线	17
二、一个无风险资产与多个风险资产组合的资本市场线	19
三、证券市场线	23
复习思考题	25
第二章 金融交易手段创新	26
§1 交易委托	26
一、交易委托的数量和时间特征	26
二、交易委托的种类	27
§2 保证金账户及其保障机制	32
一、保证金账户	32
二、买空交易	32
三、卖空的含义	34
四、卖空运作机制	35
五、综合交易时的保证金要求	39
复习思考题	42

第三章	固定收益证券及其违约与定价分析	43
§1	固定收益证券的含义与种类	43
	一、固定收益债券的含义	43
	二、政府债券	43
	三、公司债券	47
	四、其他固定收益证券	49
§2	与债券契约有关的重要条款	49
	一、企业债券契约	50
	二、税收待遇	50
	三、赎回条款	50
	四、偿债基金	51
	五、破产	51
§3	固定收益证券的价格与收益	52
	一、固定收益证券的价格与内在价值	52
	二、证券的固定收益与浮动利率	53
	三、债券的久期	54
	四、固定收益证券的保值组合	56
	五、违约溢价、风险溢价、收益溢价	57
	六、违约可能性测算	59
§4	高利风险债券与公司兼并	61
	一、高利风险债券的可转股属性	61
	二、高利风险债券的弹性转换价格	62
	三、高利风险债券的期限设定创新	63
	四、超远期可转换债券	64
	复习思考题	64
	附录 债券的信用级别	65
第四章	非固定收益证券——股票及其定价	67
§1	股票的表决权与认股权	67
	一、表决权	67
	二、认股权	69
§2	股票的收入资本化定价方法	72
	一、内在价值与净现值	72
	二、股息贴现模型	73
§3	基于价格—收益比率的定价模型	79
	复习思考题	82

第五章	资产证券化分析	83
§1	资产证券化的含义及其发展过程	83
	一、资产证券化的含义	83
	二、资产证券化的发展过程	83
	三、资产证券化的类型	84
§2	资产证券化的组织结构与运作流程	86
	一、资产证券化的组织结构	86
	二、资产证券化的运作流程	87
§3	证券定价与现金流	89
	一、没有提前支付情况下的按揭证券现金流分析	89
	二、有提前支付情况下的现金流模型和有关市场惯例	92
§4	资产证券化的风险	95
	一、资产证券化风险的分类	95
	二、资产证券化后风险和收益的改变	97
	复习思考题	98
	附录 不良资产证券化问题	99
第六章	远期合约及其在外汇和货币市场的应用	101
§1	远期交易简介	101
	一、远期合约的含义	101
	二、远期合约的基本特性	102
§2	远期外汇交易	102
	一、远期外汇交易的含义与分类	102
	二、远期汇率与利率	103
	三、远期汇率的表现形态	105
§3	直接远期外汇交易、汇率协议和远期外汇协议	108
	一、直接远期外汇交易	108
	二、汇率协议	108
	三、远期外汇协议	109
§4	远期利率协议	111
	一、远期利率协议概述	111
	二、远期利率协议的结算	113
	三、远期利率协议中合同利率的确定	114
	四、合同远期利率 I_F 对长期利率 I_L 和短期利率 I_s 的敏感性	115
	复习思考题	116

第七章	互换及其风险管理与成本节约效应	117
§1	互换的基本概念	117
	一、互换的概念	117
	二、互换的作用	117
§2	互换及互换市场的形成与发展	118
	一、互换的产生	118
	二、互换市场的发展	119
§3	基本的互换交易	121
	一、商品互换	121
	二、利率互换	123
	三、货币互换	126
	四、更复杂的变形互换	129
§4	互换的定价	130
	一、利率互换的定价	130
	二、货币互换的定价	135
	三、互换的功能、作用之总结	137
	复习思考题	138
第八章	期货及其套期保值分析	139
§1	期货的含义与功能	139
	一、含义与分类	139
	二、期货的功能	140
	三、期货发展的特点	141
§2	期货交易与期货市场	142
	一、期货交易中的参与者	142
	二、期货交易流程	145
§3	套期保值与基差分析	148
	一、卖出套期保值与买入套期保值	148
	二、基差及其市场形态	149
	三、基差风险	151
§4	套期保值比率分析	152
	一、方差法	152
	二、最小二乘法	154
	三、套期保值的效用函数	154
§5	国债期货套期保值实例	156
§6	套利交易	159

第九章

一、期货价格的期限结构	159
二、跨期套利（跨月套利）	160
三、其他套利形式	161
复习思考题	162
期权理论与期权组合应用	163
§1 期权的种类	163
一、期权的含义	163
二、期权的种类	163
§2 期权交易	164
一、期权买卖角色的“了结”	164
二、股票期权的保护条款	165
§3 期权交易保证金	166
§4 期权价值	168
一、期权到期时（或执行时）的价值	168
二、期权到期时的损益分析	170
三、期权（买权）的价值边界	173
§5 标的物价格变动中的期权价值	177
一、标的物价格变动与期权的套期保值比率	177
二、合理的期权价值与无风险套利	179
§6 布莱克—斯科尔斯模型——买权价值的决定	184
一、布莱克—斯科尔斯模型	184
二、利用历史资料估计股票风险	186
三、利用期权定价模型估计股票风险	187
四、套期保值比率	187
五、股票出现分红时对模型的调整	188
六、卖权定价分析	190
§7 卖权—买权平价	193
一、平价关系的建立	193
二、卖权定价公式的静态分析	195
三、平价关系与无风险套利	195
§8 差价期权组合分析	196
一、垂直差价期权分析	196
二、水平差价期权分析	200
§9 期权套期保值实例	203
复习思考题	205

附录 布莱克—斯科尔斯期权定价模型	205
第十章 多期期权及其组合应用	213
§1 多期期权	213
§2 利率上限	213
一、利率上限的含义	213
二、利率上限合约的结算	214
三、利差与买卖双方的损益	215
四、分摊期权费	216
五、事后的会计核算	216
六、利率上限互换	217
§3 利率下限	218
一、利率下限的含义	218
二、利率下限互换	219
§4 利率上下限	219
§5 参与上限	221
§6 看涨上限期权	223
§7 互换期权	224
复习思考题	224
参考书目	225

第一章

导论——风险与金融工程

§1 金融工程的概念

一、金融工程

金融工程是一个较新的概念，在 20 世纪 80 年代末才被提出。首倡者约翰·芬那提认为：“金融工程学包括新型金融工具与手段的设计、开发与实施，以及对金融问题给予创造性的解决。”后来又有许多学者在自己的著作和文章中，对金融工程这一概念进行过描述。成立于 1991 年的国际金融工程学会（International Academy of Financial Engineering）对金融工程的系统定义是：

金融工程学是借助庞大而先进的金融信息系统、用系统工程的方法将现代金融理论与计算机信息技术相结合、用各种模型和方法开发设计出新型金融产品、创造性地解决各种金融问题的学科。

在我们看来，金融信息系统、计算机信息技术和系统工程方法都是环境性的因素，是一个时代的技术环境；而各种金融问题，则无非是以盈利和风险控制为目的的各种融资、投资问题，因此，金融工程可以更简明地理解为：

利用和创新金融工具，并用于解决各种金融活动中的风险控制和盈利问题。

在上述金融工程的含义中，有三个需要进一步讨论的核心内容，那就是：金融工具、风险，以及盈利。风险是投资中的一个核心概念，我们将在下一节作专门的论述。在这里我们只对“金融工具”和“盈利”展开分析。

二、金融工具

金融工具是实现金融目的的手段。在国际金融工程师协会关于金融工程的定义中，不难看出“现代金融理论”也被看成是实现金融工程目标的手段，从而使得金融工具有广义和狭义之分。

广义金融工具包括概念性金融工具和实体性金融工具两类。所谓的概念性

金融工具，指现代金融理论，比如投资组合理论、资产定价理论、套期保值理论等等。

实体性金融工具则是指可以进行组合运用的金融工序与金融工具。它们各自更具体的含义如下：

金融工序：主要是指金融证券发行和交易的程序。比如证券的公募私募发行程序、二级市场的证券交易程序、交易清算和转账程序等等。

金融工具：是指狭义的实体性金融工具，是广泛存在于各个金融市场的金融产品，包括现货市场的各种工具和衍生市场的各种工具。其中，现货市场工具有股票、债券、外汇等等，衍生市场有远期合约、期货合约、期权合约等等。

三、盈利：套期保值、套利与投机

盈利指通过一个经营或工作过程后获得有经济利益的结果，“有经济利益”表明收益大于成本。在金融投资中，狭义的盈利途径指投机和套利；广义的盈利途径还可包括套期保值，因为套期保值操作总是为了另一项经营活动能够获得有利的结果而进行的。以下分别对套期保值、套利和投机展开进一步的分析。

1. 套期保值 (hedge)

套期保值是经常被运用的一种交易手段。在买进（或卖出）某种头寸时，未来的市场价格变化会使该头寸的价值上升或下降。为了防止这种可能的价值下降的损失，就在另一个市场上卖出（或买进）另一种头寸，使得一种头寸的价值下降时，另一种头寸的价值却上升，结果是一个市场上的损失可以为另一个市场的收益所弥补。这种在两个市场进行反向交易以消除可能不利结果的行为就称为套期保值。

下面的图 1.1 表示了在价位 P 持有（买进）某资产，以后资产价格或涨或跌造成的亏损或盈利；图 1.2 和图 1.3 表示了为套期保值卖出的资产价格的反向变化，结果是合成损益为零的套期保值结果。显然，这是一个非常有效的套期保值例子。

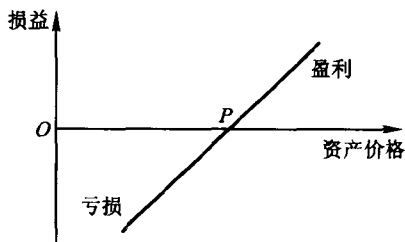


图 1.1 持有某资产的风险剖面图

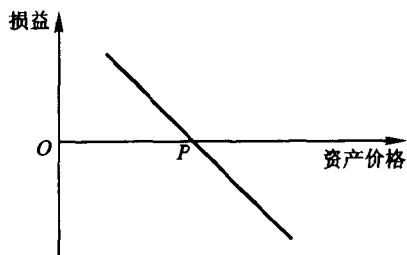


图 1.2 用于套期保值的资产的风险剖面图

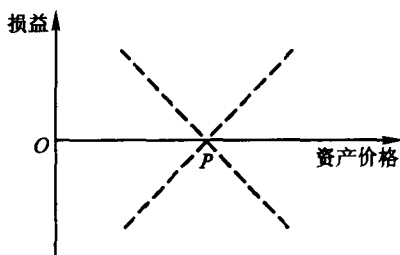


图 1.3 套期保值的结果

可是实际上，当被保值的资产下跌一元时，用于保值的资产却并不一定上升一元。显然，当后者上升不足一元时，就需要卖出更多的保值资产；而当后者上升超过一元时，就只需要卖出较少的保值资产。这种达到套期保值效果时，被保值资产与保值资产的数量比率就是最佳套期保值比率^①。

关于套期保值，在后面许多章节中都还要继续进行讨论，我们将可以看到有的套期保值工具（如期权），甚至可以达到消除价格下跌的不利影响，同时保持价格上升的有利影响的效果。这种效果也被称为“或然免疫”效果。

2. 套利 (arbitrage)

套利是在两个市场同时进行交易，利用不同市场上资产的价格差价来赚取利润的操作。

套利的特点是在两个市场同时交易，两个市场的价差是套利的基础。

套利的两种主要形式是时间套利和空间套利。

时间套利 (temporal arbitrage)：是指在买进（卖出）现货标的物的同时卖出（或买进）未来某时的同类标的物（资产）。

在时间套利中，操作者常常需要付出储存成本（商品套利的情况下），或者是利息成本（金融套利的情况下）。但在有的时候，标的资产也会带来收益，比如买进的国债会带来利息，这种收益称为资产的“便利收益”(convenience yield)。

储存成本加利息再减去便利收益，被称为“持有成本”(cost of carry)。

空间套利 (spatial arbitrage)：是在一个价格相对较高的（相对较低的）市场上卖出（买入）标的资产，同时在一个价格相对较低的（相对较高的）市场上买入（卖出）同类资产。在空间套利中，操作者须承担市场间的运输成本、与买卖有关的交易成本以及市场间处理标的物的标准品质差异而需要的转换成本。

由于套利操作具有上述成本，这就要求市场间的价差要大到足以弥补上述成本，套利才会实际发生。

^① 在后面关于期货的讨论里可见，如果从理论上进行严格的表述，使两种资产损益之和的方差最小的套期保值比率是“最佳套保比率”。

套利是使市场成为有效率市场的重要力量。空间套利可以使高价格市场的标的物价格下跌,使低价格市场的标的物价格上升。时间套利则使价格的纵向变动更加平稳。顺畅的套利是“一价定律”成立的重要前提。

3. 投机 (speculate)

操作者根据自己对资产未来的价格的预测,决定买入或卖出该资产的行为称为投机。但前提是,单个投机者必须不能够影响市场价格,也就是说投机者必须只能是市场价格的预测者而不能是市场价格的操作者。

投机能否盈利取决于对价格的预测是否正确,预测正确则盈利,反之则亏损。

虽然单个投机者对市场价格的影响可以忽略不计,但是投机者买卖行为的总体效果对市场价格却起着非常大的影响。投机者是在他们的信息收集和分析的基础上,进行投机交易活动的,这种活动以及随后导致的价格变化表明了趋向于市场出清的变动趋势。如果没有投机,市场价格对市场状况变化的反应将相当缓慢,这种迟延意味着资源再配置的低效。

越来越多的人对投机活动给予肯定,认为投机起到了以下作用:

(1) 帮助市场实现“价格发现”功能。投机者通过收集信息、分析信息并进行交易,信息就更通畅地进入市场,并且帮助市场正确评估价格,这样,投机者谋取利润的努力导致了资源的更优配置,从而就实现了“价格发现”功能。

(2) 投机活动有助于资源在时间跨度上的均匀分配,从而有助于熨平价格的波动。这种投机活动对收获季节很短、库存时间很长的农畜产品来说尤为重要。如果没有投机,丰收时的供给将主导市场,使价格过度下跌,并由此导致未来生产的丰歉波动。而当投机者在丰收时买进便宜的货物,并储存到在价格上升时卖出时,资源在时间跨度上的分配就会相对均匀,通过丰收时引入投机需求提高价格和短缺时引入投机供给以降低价格,投机活动可以使价格波动更加平稳。

(3) 投机者提供了风险承担服务。人们通常用套期保值来规避市场中存在的风险,他们一般通过持有如期货、远期合同、期权和互换等相关工具的头寸来达到套期保值的目的。但是,在某些时候会出现多头或空头某一方力量明显压倒另一方的情形,这时投机者的活动就扮演着“造市商”的角色,使多空双方力量达到平衡。

§2 风险及其衡量

一、风险

风险是未来发生消极结果的可能性,风险显然是源于不确定性。对投资而言,投资结果的波动越大,风险就越大;或者说,投资结果对“正常值”或“平

均值”的偏离越大, 风险也就越大。

人们通常用“随机变量”来描述具有不确定性的过程或事件, 将不确定性事件的各种结果用随机变量所取的不同的值来表示; 而随机变量取这些值的概率, 自然就是上述各种结果出现的可能性了。如果用 X 表示随机变量, 当 X 所取的结果是一个一个分离的数值时, X 称为离散型随机变量, 相应的概率也是分散的; 当 X 取值是连续的时候, X 就称为连续型随机变量。

投资过程或投资项目的收益显然常常是不能确定的, 因此随机变量非常适用于描述投资结果。投资的平均收益或期望收益则是可以确定的, 这也正是随机变量的“期望”这一数字特征; 而随机变量的方差正好表现的是随机变量的取值对其期望值(平均值)的偏离程度, 因此投资过程或投资项目的风险正好可以用随机变量的方差这一数字特征来表现。

1. 期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$

如果用 X 表示一个离散型随机变量, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示随机变量所取的各种数值(比如这可以是一项投资的各种可能的收益率), w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示随机变量取相应值的概率, 那么 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 就分别表示为:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n w_i x_i, \text{ 其中 } w_i \text{ 满足:}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \sigma^2 = E[X - E(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 w_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

如果 X 是连续型的随机变量, 那么 X 就具有一个连续的概率密度函数 $f(x)$, $f(x)$ 满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu \quad (1.3)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2 \quad (1.4)$$

$\sigma = \sqrt{D(X)}$ 称为标准差, 也同样是一个衡量风险的指标。

2. 协方差 σ_{xy} (或 $\text{Cov}(X, Y)$)

当投资中涉及两个以上的投资项目或资产时, 总收益就是两个(以上)收

益（随机变量）之和。假定每个项目分别投入一个单位的投资，如果记这两个项目收益分别为 X 和 Y ，那么总收益 Z 为：

$$\begin{aligned} Z &= X + Y \\ E(Z) &= E(X) + E(Y) \\ D(Z) &= E[Z - E(Z)]^2 \\ &= E[(X + Y) - E(X + Y)]^2 \\ &= E\{[X - E(X)] + [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

其中的 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 和 Y 的协方差，记为 σ_{xy} 或 $\text{Cov}(X, Y)$ 。

在投资中，两种资产收益的协方差表现的是两种资产的关联性风险。比如，投资棉花种植和投资棉纺业是两种投资，棉花价格上升导致投资棉花种植的收益提高，但投资棉纺业的收益则会因棉花价格上升而下降。这就是这两种投资的“相关联风险”。

协方差具有以下重要性质：

- (1) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ ；
- (2) $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$ ，其中， a, b 为两个常数；
- (3) 如 X, Y, Z 为三个随机变量，则：

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

3. 相关系数 ρ_{xy}

如果有随机变量 X, Y ，那么记其标准差为 σ_x, σ_y ，记两者的协方差为 $\text{Cov}(X, Y)$ ，那么 X 与 Y 的相关系数 ρ_{xy} 定义为：

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.6)$$

ρ_{xy} 同时也是 Y 与 X 的相关系数，也称为“标准协方差”。

二、系统风险与非系统风险

当投资的资产在两个或两个以上时，这种投资组合的风险就不仅包括这两种资产单独的风险，而且还包括这两种资产的相关风险。由于由多种资产组成的投资组合是非常普遍的，因此自然需要对多种资产的投资组合的风险展开研究。

假定市场上有 n 种风险资产，它们相应的收益和风险分别为 μ_i 和 σ_i ， $i=1, 2, \dots, n$ 。假定投资者的资金全部投资于这 n 种资产上，投资的相应的份额为 w_i ，