揭开“集合”的面纱

JIE
KAI
JI
HE
DE
MIAN
SHA

胡 炳 生

安徽科学技术出版社

揭开“集合”的面纱

安徽科学技术出版社

胡炳生

1981 · 合肥

责任编辑：解安华
封面、插图：云　龙

揭开“集合”的面纱
胡炳生
*
安徽科学技术出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷
*
开本787×1092　1/32　印张3.125　字数64,000
1981年2月第1版　1981年2月第1次印刷
印数1—10,340
统一书号：13200·10　　定价：0.25元

前　言

“集合”，是近代数学的基本概念之一。现在中、小学新编数学课本的一个显著特点，就是处处渗透着集合的思想，并将集合论的初步知识正式编入课文。

然而，对教和学的人来说，集合给他们的初次印象是陌生的，觉得它抽象、枯燥。

其实，并非如此。集合天天在和我们打交道。一袋糖果、一盒粉笔、一张照片，一个班级、一个小组，乃至整个学校、整个国家等等，都是集合。我们生活在集合中间，集合又千姿百态地展现在我们的面前。

那么，我们为什么对集合这样陌生呢？原来是因为有一层严肃的“现代数学理论”面纱掩盖了它的真面目。

而这本科普读物，就试图借助于直观和比喻，揭开“集合”的面纱，让它以生动的形象展现在读者面前，帮助教和学的人弄明白：它的基本思想是什么？中、小学课本为什么要渗透它的思想？它与数学传统内容有什么联系？它有什么用处？

安徽师范大学雷垣、张国铮同志和张孟贤同志，曾对书稿提出过宝贵意见，在此向他们表示感谢。作者限于水平，本书缺点和错误一定不少，请读者批评指正。

胡炳生 1980.8

目　　录

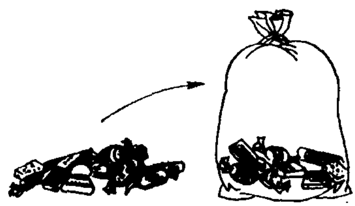
第一章　万能的口袋

“集合”这名词，听起来有点儿抽象、深奥。其实，并非那么一回事。打一个形象的比方，它就好象是一个“万能的口袋”。

1.从一袋糖果说起

把集合比做“万能的口袋”，此话从何说起？就从一袋糖果说起吧。

把一些糖果装进一个口袋里，便形成一个整体概念——“一袋糖果”。



如果用“集合”这个名词来说，这“一袋糖果”，也可以说成是：由它里面的东西(糖果)组成的一个“集合”。

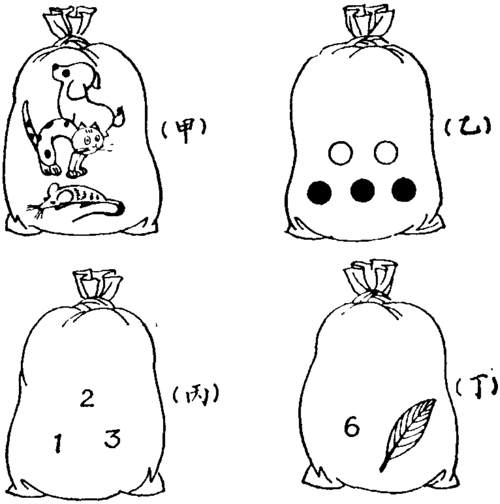
再看下面四个“口袋”，它们分别装着不同的东西。而每一个口袋，都可以看作是一个由它里面的东西组成的“集合”。于是：

口袋(甲)，是由三只动物——狗、猫和鼠组成的集合。

口袋(乙)，是由两个白球和三个黑球组成的集合。

口袋(丙)，是由三个自然数 1 、 2 、 3 所组成的集合。

口袋(丁)，是由一个数字 6 和一片树叶子组成的集合。



可见，集合的具体例子，对我们来说，并不陌生。

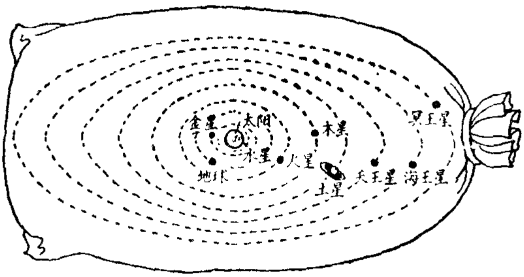
有一位集合论大师、著名的数学家豪斯道夫，曾经这样描述过集合："把一个个东西，合起来看成一整体，便形成一集合。"

我们把集合比作"口袋"，恰好强调了集合是一个整体概念——它好象是一口袋东西，而不是个别散放着的东西。

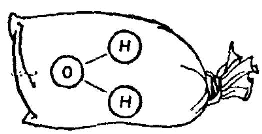
但是，这不过是一个形象的比喻。并不是说，一定要把一些东西真正装进一个口袋里，才算一个集合。这集合"口袋"，是我们假设的，不必是真实的。想象中的"口袋"可大可小，其外形也可以是这样或那样。两个集合口袋是不是相同，只能从它们各自所装的东西是否相同来辨别。

例如，可以把太阳系中的九大行星，连同太阳本身，一

起装进一个假想的大“口袋”里，形成一个太阳系中大星球的集合。



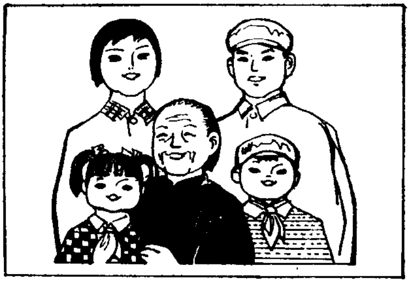
也可以把一个氧原子“O”和两个氢原子“H”，装进一个小“口袋”里，形成一个由三个原子组成的集合。



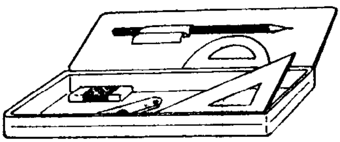
以上两个集合的差别，不在于它们的大小，而仅在于它们所装的东西不同。

从上面所举的例子中，已经看到，同一个集合里的东西，可以是同类的，也可以是毫不相关的；可以大至天体，也可以小至粒子。所以说，集合“口袋”是万能的，它什么都能装。

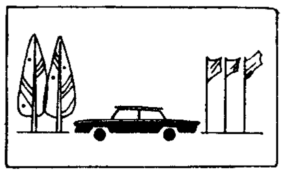
正因为这个想象中的集合“口袋”，重在内容，不在形式，所以，为了方便，有时也可以把它的外形画成别的形状，例如，可以画成一个方框、一个圆圈，或者一个盒子等。



(A) 李小明一家



(B)



(C)

上面三个图，分别表示了三个不同的集合：李小明一家，一盒文具，和由一辆汽车、两棵树、三面旗组成的集合。

集合里面的东西，在数学上，把它叫做元素，或者简称元。集合里的每一个元素，都没有双重资格，而只能算作一个。

集合里的元素是有限个的，称为有限集；若集合的元素有无限多个，称为无限集。前面列举的集合，都是有限集。下面举几个无限集的例子。

我们用文字甲、乙、丙、丁等，来表示某些集合。当然，也可以用别的文字来表示集合。按照目前数学上的惯例，已经约定：用大写英文字母A、B、C、D、M等，表示集合；

而用小写英文字母a、b、c、d、m等，表示集合的元素。

现在用A表示“501班”这个集合，用a表示李小明同学。要是李小明在501班，可以说成：李小明“属于”501班。如果用符号“$\in$”表示“属于”这个词，可以写成：$a\in A$，读作“元素a属于集合A”。

要是李小明不在501班，也可以简单地表示成：$a\notin A$。其中符号“$\notin$”读作“不属于”。它的意思是：元素a不属于集合A。

2.集合口袋的标志

假如我们只用A、B、C等英文字母来表示集合，是不能将集合里的元素都显示出来的。因而我们必须进一步给集合一个标志，使人们知道它里面究竟装了些什么东西。以下介绍三种表示集合的方法。

一、列举元素。画一个集合口袋，把它里面装的东西都画出来，这对于元素较少的集合，是最清楚的表示方法。但它有很大的缺点，就是画起来很费事，而且不便于印刷和书写。为了避免这些缺点，我们使用花括号{　　}来表示集合的范围，而把它所有的元素，填写在这花括号内。

例如，若用M表示由1、2、3三个自然数组成的集合，那么就可以写成：$M=\{1、2、3\}$。

然而对于元素较多的集合，写起来也不方便。例如，设集合B是由1—1000这一千个数字所组成的，要写出它的全部元素，那就太长了。

二、陈列“样品”。如果集合的元素太多，所有元素不可能全部摆出来，我们就选几个有代表性的元素，作为“样

品”，陈列出来；而把其它的元素加省略号，予以省略。

如上例的集合B，可以表示成：

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\cdots 1000\}$$

所有自然数的集合N，可以表示成：

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

当然，这里两个括号内的省略号，所代表的元素不完全一样。前者代表4,5,……999这有限个自然数；而后者所代表的是，从4以后的所有的自然数——有无穷多个。

如果集合的元素有一般的形式，我们也可以用这一般形式来做代表。例如，自然数的一般形式可以写成n，因此，自然数集N可以写成：$N=\{n\}$。偶数的集合$P_2=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$，也可以写成：$P_2=\{2n\}$。

三、贴“说明书”。假如一个集合的元素很多，又无法排列，或者写不出具体的“样品”来，但它的元素具有共同的特征，那么我们可以采用贴“说明书”的办法。

例如，用A表示数轴上0—1之间的所有点(不包括两个端点)的集合。A的点虽无法列举，但它们有一个共同的特征性质：都大于0而小于1。因此，如果x是A的一个元素的话，就有：$0<x<1$。于是，我们可以把集合A写成：$A=\{x \mid 0<x<1\}$*。其中“x”是“样品”；竖线后面的“$0<x<1$”，是对x的说明。总起来，括号里面的文字式，就好象是对集合A的一张“说明书”。

又如，所有正分数的集合Q_+，可以写成：

$$Q_+=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n\in N\right\}$$

注：*有的书上表示为$A=\{x: 0<x<1\}$

其中“$\frac{m}{n}$”是“样品”的形式，“$m, n\in N$”是对样品的说明：m 和 n 都是自然数。这样，集合 Q_+ 里究竟有哪些元素，就十分清楚了。

推而广之，我们可以把具有特性P的元素表示成$p(x)$。由所有具有特性 p 的元素组成的集合 P，便可以表示成：

$$P=\{x \mid p(x)\}$$

3.不定义之秘

我们学过的一些数学和其它学科中的概念，书上总要给它下一个“定义”。那么，集合这个概念，是不是也应该给它下一个“定义”呢？这似乎是应该的。

但是，尽管前人为此伤透了脑筋，作过许多尝试，而结果总是不太理想。

例如，有人曾给集合下过这样一个“定义”：“集合就是具有某种共同本质属性的事物的全体。”

这妥当不妥当呢？不很妥当。

第一、如前所述，同一个集合里的元素，可以千差万别，甚至毫不相干，而不必“求同排异”。例如曾经举过的例子，由数字6和一片树叶子组成的集合(丁)，若据此“定义”，它就不能算是一个集合，因为它里面的两个元素很难说有什么“共同的本质属性”。如果那样，就把集合概念的应有范围(逻辑学上称作概念的“外延”)缩小了。

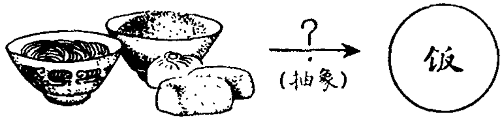
第二、就好象一袋糖果，不必将所有糖果都囊括无遗一样，一个集合，也并不要求它一定包括某种特性元素的全体。例如，集合：$M=\{1, 2, 3\}$，它的元素就是1、2、3三

个自然数，并不包括自然数“4”。但若按上述“定义”行事，那么，“4”就应该属于集合M，因为“4”和“1、2、3”都是自然数，当然具有“共同本质属性”。

总之，前述的集合“定义”，没有反映出“集合”这一概念的真正本质，因此，它不能作为“集合”的科学定义。为什么给“集合”下不好定义呢？我想主要有以下两个原因。

（1）一个概念，它概括的事物越多样、越广泛，它的抽象程度就越高，那么要给它下一个严格的科学定义，就越发困难。

比如说，我们天天吃饭，北方吃面饭，南方吃米饭，还有稀饭、汤饭、杂粮饭，等等。但是，要给“饭”下一个严格的、抽象的定义，就不那么容易。不妨大家试试看！

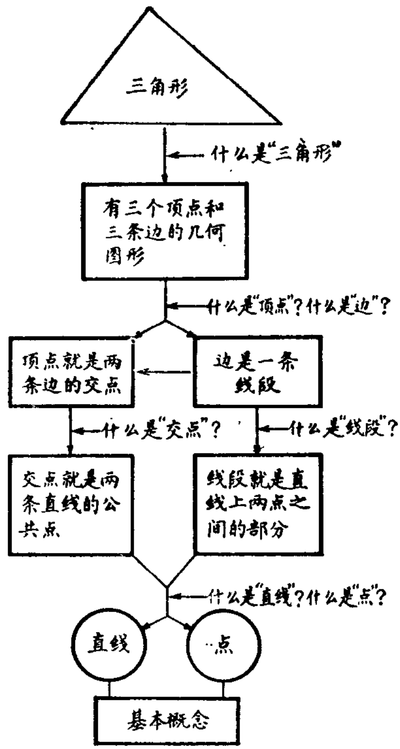


而集合，是数学中最基本、最抽象的概念之一，它概括的事物，比“饭”不知要多多少。因此，要给集合下一个“定义”，使之适合每一个具体的集合，就十分困难，所以至今还无法办到。

（2）所谓给一个概念（甲）下定义，就是要用比它更简单明白、更容易为人们所理解的概念（乙）——对“甲”来说，称作“在前”概念，来说明它、规定它。而概念（乙），又要用“在前”的概念（丙）来说明它、规定它。（丙）是什么呢？又要用更“在前”的概念（丁）来说明它、规定它。如果打破沙锅问到底，那么，到了最后，总有一个或几个概念，再也找不到比它们更“前”的概念来加以说明和规定它们了。这些概

念就是这门学科中最基本的概念，已经不能再给它们下定义了。

我们来看一个例子：从“三角形”出发，一直追问下去，到了“点”和“直线”，便再也不能“定义”了。点和直线，就是数学中的两个基本概念。



与点、直线一样，“集合”也是数学中的基本概念之一。

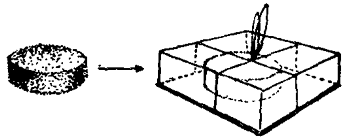
点、直线、集合这些基本概念，又称为不定义概念。它们虽然不加定义，但是因为它们所概括的事物极其广泛，它们的实例，或者说它们的“模型”，在我们日常生活和实际经验中到处都有，所以，对它们的理解是并不困难的。

那么前面所说：“把一个个东西合起来看成一整体，便形成一集合”的说法，算不算集合的定义呢？不能算。因为这里面使用的“东西”、“整体”等，并不比“集合”更简单明白。如果再追问一下：“东西”是什么？“整体”又是

什么？那么谁也说不清楚了。

4.盒装蛋糕和北极企鹅

一盒蛋糕和一块蛋糕，谁都清楚，是不一样的。把一块蛋糕装进一个盒子，便成了一盒蛋糕。尽管这盒蛋糕只有一块，但它毕竟还是一盒！

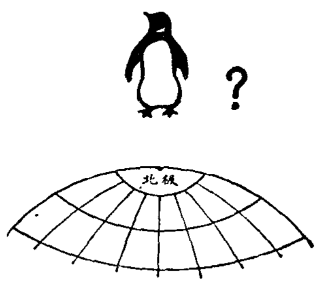


与此相仿，只含有一个元素 a 的集合$\{a\}$，和一个元素a本身，也是不一样的。它们之间的关系，只能是一个“属于”一个：$a\in\{a\}$，而不能在二者之间划等号。

我们把只含有一个元素的集合，叫做单元素集。

另外，有时遇到的集合，不能立即判断出它里面是不是一定有元素存在。例如：$S=\{$北极的企鹅$\}$、$T=\{$不能表示成两个素数和的、大于2的偶数$\}$，就是这样的集合。

我们知道，企鹅生活在南极。北极有没有企鹅呢？目前还没有发现。但是，“没有发现”并不等于没有。因此，第一个集合里究竟有没有元素，现在还不能断定。



经过大量试验，许多大于2的偶数都能表示成两个素数之和。例如：

$4=2+2$、$6=3+3$、$8=3+5$、$10=5+5$、

$12=5+7$、$14=7+7$、$16=5+11$，等等。

因此，在二百多年前，德国中学数学教师哥德巴赫猜想：是不是“任何大于 2 的偶数都能表示成两个素数之和”？这就是著名的“哥德巴赫猜想”。

关于“哥德巴赫猜想”，尽管许多数学家做了长期努力，包括我国数学家取得的重大突破，但至今仍没有被完全证明。因此，上面列举的第二个集合T，是不是有元素存在，现在也还不能断定。

所以，为了使集合论的观点和方法，能在更多的领域中应用，有必要规定：什么元素也没有的空“口袋”，也算一个集合，叫做空集合。空集合也是集合，记作$\varnothing$，或$\{\ \}$。后面一个记号，更加直观。

如果有一天“哥德巴赫猜想”终于被证明，那么就相当于证明了：集合T是空集。

此外，规定空集，还有集合论理论本身的需要，这在以后可以看到。

当然，空集不是一个实在的集合，而是为了研究问题的方便，人为地规定的一个特殊的集合。

和空集相反，另一个极端的情况是，把在我们研究范围内的所有元素组成的集合，叫做全集合(全集)。

例如，班主任的主要工作范围是某一个班级，那么这个班级的全体学生组成的集合，就是一个全集——谓之“全班”。校长的主要工作范围是一个学校，全校师生员工合起来，也组成一个全集——谓之“全校”。如果我们限于研究实数，那么数轴上所有表示实数的点，就组成一个全集——谓之“整个数轴”。如此等等。

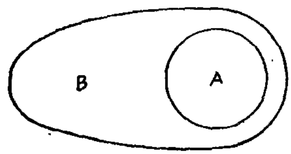
空集$\varnothing$只有一个。全集则具有相对性。全班，对于班上

每一个小组来说，是全集；但对全校来说，它只是一个部分，而不是全集了。

全集，我们常用英文字母 I 来表示。

5.母集与子集

假设A、B是两个集合，若 A 的每一个元素，也都是B 的元素，那么就说集合 A 包含于集合B，并且记为$A\subseteq B$。很明显，此时集合 A 是由集合 B 的一部分元素组成的。所以把 A 叫做 B 的部分集合，或叫做 B 的子集；而把 B 叫做 A 的母集。



符号“$\subseteq$”读作“包含于”。“$\subseteq$”与“$\in$”的意义大不一样，不能混为一谈。前者是集合与集合之间的关系，后者是元素与集合的关系。形象地说，“$\subseteq$”是集体与集体的关系，“$\in$”是个体与集体的关系。

设A、B是两个集合。如果我们要判断关系“$A\subseteq B$”成立与否，需要检查 A 的每一个元素，看它们是不是都在集合 B 里。

如果要判断关系“$A\in B$”成立与否，则只要看一看 A 作为一个东西，是否在集合B中。

把 A、B 比作两袋糖，就更清楚了。若验证“$A\in B$”，只要检查一下，在B集合的袋子里，有A这个袋子就行了。