

国家工科数学课程教学基地系列教材

# 微 积 分

上 册

电子科技大学应用数学学院

傅英定 谢云荪 主编

高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地系列教材

# 微 积 分

上 册

电子科技大学应用数学学院

傅英定 谢云荪 主编

高等教育出版社

## 内容简介

本书是我校“九五”规划特色教材及“十五”规划精品教材之一,也是我校“国家工科数学课程教学基地”系列教材之一.本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》和科技人才对数学素质的要求,本着面向 21 世纪深化课程体系与教学内容改革的精神,吸收国内外相关教材的长处编写的.其主要特点是:注重课程体系结构与教学内容的整体优化;重视基础,突出数学思想与方法,着力于数学素质与能力的培养;充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力;注重教学适用性.

本书分为上、下两册.上册包括极限理论、一元微积分与常微分方程;下册包括多元函数微积分与无穷级数.每节后配有习题及思考题,每章后配有应用实例与复习题,书末附有习题答案.

本书结构严谨,论证简明,叙述清晰,例题典型,便于教学.可作为高等工科院校的教材或参考书,也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分.上 / 傅英定, 谢云荪主编. —北京: 高等教育出版社, 2003.7  
ISBN 7-04-011946-3

I. 微... II. ①傅... ②谢... III. 微积分 - 高等学校 - 教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 024139 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京中科印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2003 年 7 月第 1 版
印 张	26	印 次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字 数	490 000	定 价	27.10 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

策 划	李艳馥
责任编辑	李 陶
封面设计	于文燕
责任绘图	郝 林
版式设计	陆瑞红
责任校对	尤 静
责任印制	宋克学

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

**传真：**(010) 82086060

**E-mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

**邮编：**100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

# 前 言

本书是我校“九五”规划特色教材和“十五”规划精品教材之一,也是我校“国家工科数学课程教学基地”系列改革教材之一.本书根据原国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》,本着面向 21 世纪深化课程体系与教学内容改革的精神编写的.微积分是大学理工科各专业一门主要的公共基础课,对于培养学生能力,提高学生素质具有重要的奠基作用.

本书是根据 21 世纪科技人才对数学素质的要求,吸收国内外改革教材的长处而编写的,力求突出以下的特点:

## 一、注重课程体系结构与教学内容的整体优化

分析、代数、几何是现代数学的基础,现代数学的发展趋势是它们之间相互交叉、相互渗透.因此,本教材注重课程体系结构与教学内容的整体优化,注重分析、代数与几何的有机结合,重视相关内容的内在联系与合理融合;例如,不再把不定积分单列一章,而是把不定积分与定积分合为一章,将不定积分与定积分的计算方法结合在一起讨论,这样处理,加强了相关内容与方法的联系,条理清楚,避免重复;用向量与矩阵处理多元函数微积分,不但简洁易懂,而且观点新颖,便于记忆和运用;将二重积分、三重积分、第一类曲线积分与曲面积分统一成多元数量值函数积分,并讨论它们的共同性质,介绍统一的物理应用公式,这样处理,突出了黎曼积分的本质;用第一类曲线积分和第一类曲面积分定义第二类曲线积分与第二类曲面积分,将学生感觉困难的有向投影问题蕴含在向量的内积中,这也与物理上实际应用形式一致,使学生掌握起来比较容易.

## 二、重视基础,突出数学思想与方法,着力于数学素质与能力的培养

作为 21 世纪的工程技术与科技人员,一方面应该了解现代数学的思想、方法与语言,因此,本书力求在经典微积分内容中渗透现代数学的思想与方法,为现代数学适度地提供内容展示的窗口和延伸发展的接口.另一方面,经典微积分的思想与方法仍然是现代数学与自然科学的重要基础,因此,本书十分重视基本概念、基本理论与基本方法的训练,突出数学思想与方法,着力于数学素质与能力的培养;例如,重视介绍数学概念的背景与本质,在每一节后面编有突出概念的思考题,以启发学生的思维;在极限概念中渗透逼近思想,在微分概念中渗透线性化思想,在极值问题中渗透优化思想;在微积分与微分方程的应用中突出

它们在物理、力学与工程科学中常用的微元法;在介绍了格林公式、斯托克斯公式与高斯公式以后,我们在介绍了外微分形式及外微分运算的基础上,得到了微积分基本定理的统一公式,使读者对微积分的本质有进一步的了解;由于计算机技术的迅速发展,数学软件的广泛使用,为了突出数学思想与方法,本书对运算技巧作了适当淡化.

### 三、充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力

长期以来,理工科学生学了数学不知怎样用,缺乏应用数学知识解决实际问题的意识与能力,更谈不上数学建模意识与能力.为了解决这一问题,本书重视将数学建模的思想和方法渗透到教材中去,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力.例如,每一重要概念都介绍其应用背景,每一重要结论都要举出应用实例,应用的范围也不仅仅局限在几何与物理方面,而扩大到经济、生物、化学与生命科学等领域,特别是每一章后面编写了典型应用实例,这些实例内容丰富,取材得当,富有启发性,有利于培养建立数学模型解决实际问题的意识与能力.

### 四、注重教学适用性

本教材从最初编写及在我校理工科各专业大面积使用至今已近十年,十年来随着我国高等教育改革的深入与发展,边使用,边修改,边完善,力求使本教材既能满足新世纪教学改革与人才培养的需要,又能把握好尺度,与当前教学现状相适应;为了便于教学,本教材精选例题与习题,难易适度,文字叙述力求清晰流畅,深入浅出,通俗易懂.

本书分上、下册,上册包括极限理论、一元函数微积分与常微分方程;下册包括多元函数微积分与无穷级数.每节配有思考题与习题,每章配有应用实例与复习题,书末附有习题答案.

使用本书上、下册需要 160 学时左右.本书可作为高等工业院校高等数学或微积分课程的教材或教学参考书,也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考.

本书由傅英定、谢云荪主编,上册执笔者是:陈良均(第一章),蒲和平(第二章),李昌宜(第三章),高建(第四章);下册执笔者是:傅英定(第五章),彭年斌(第六章),谢云荪(第七章),钟守铭(第八章).

本书由原全国高等学校工科数学课程教学指导委员会委员赵中时教授(重庆大学)与赵善中教授(电子科技大学)主审,他们提出了十分宝贵的意见与建议.本书在使用过程中我校任课教师也提出了不少宝贵的意见,在此一并表示衷心的感谢!

本书在编写与使用过程中,得到全国高等学校工科数学课程教学指导委员会的指导,得到高等教育出版社及电子科技大学领导与教务处的大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

限于编者水平,疏漏之处在所难免,敬请同行专家及读者批评指正.

编 者

2003年1月



# 目 录

绪 论 .....	1
第一章 函数 极限与连续 .....	4
§ 1.1 映射与函数 .....	4
一、集合 区间与邻域 .....	4
二、映射 .....	7
三、函数的概念 .....	9
四、函数的运算 反函数 .....	13
五、函数的几种简单性态 .....	16
六、基本初等函数 初等函数 .....	19
七、建立函数关系式举例 .....	26
思考题 1.1 .....	28
习题 1.1 .....	29
§ 1.2 极限的概念 .....	30
一、数列的极限 .....	31
二、当自变量趋于无穷大时函数的极限 .....	35
三、当自变量趋于有限值时函数的极限 .....	37
四、单侧极限 .....	41
五、数列极限与函数极限的关系 .....	43
思考题 1.2 .....	44
习题 1.2 .....	45
§ 1.3 无穷小量 无穷大量 .....	46
一、无穷小量与无穷大量的概念 .....	46
二、无穷小量与无穷大量的关系 .....	47
三、无穷小的运算性质 .....	47
四、函数及其极限与无穷小之间的关系 .....	49
思考题 1.3 .....	50
习题 1.3 .....	50
§ 1.4 极限的性质及运算法则 .....	51
一、极限的性质 .....	51
二、极限的运算法则 .....	53

思考题 1.4 .....	57
习题 1.4 .....	58
§ 1.5 极限存在准则 两个重要极限 .....	59
一、夹逼准则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....	59
二、单调有界准则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .....	63
三、无穷小的比较 .....	68
思考题 1.5 .....	71
习题 1.5 .....	72
§ 1.6 连续函数 .....	73
一、连续性的概念 .....	73
二、函数的间断点 .....	76
三、连续函数的运算 .....	79
四、初等函数的连续性 .....	81
五、闭区间上连续函数的性质 .....	82
思考题 1.6 .....	86
习题 1.6 .....	86
§ 1.7 应用实例 .....	88
实例一 分形曲线 .....	88
实例二 椅子平稳模型 .....	90
复习题一 .....	92
第二章 一元函数微分学 .....	94
§ 2.1 导数的概念 .....	94
一、引例 .....	94
二、导数的定义 .....	96
三、单侧导数 .....	99
四、导数的几何意义 .....	100
五、函数可导与连续的关系 .....	101
六、在经济学中导数的含义 .....	103
思考题 2.1 .....	104
习题 2.1 .....	105
§ 2.2 导数的运算法则 .....	106
一、导数的四则运算法则 .....	106
二、反函数的求导法则 .....	108

三、复合函数的求导法则 .....	110
四、导数基本公式 .....	113
思考题 2.2 .....	115
习题 2.2 .....	116
§ 2.3 隐函数及参数式函数的导数 .....	117
一、隐函数的导数 .....	117
二、参数式函数的导数 .....	120
三、相关变化率问题 .....	124
思考题 2.3 .....	125
习题 2.3 .....	126
§ 2.4 高阶导数 .....	127
思考题 2.4 .....	131
习题 2.4 .....	132
§ 2.5 函数的微分 .....	133
一、微分的概念 .....	133
二、微分运算法则 .....	136
三、函数的线性近似 .....	137
思考题 2.5 .....	139
习题 2.5 .....	140
§ 2.6 微分中值定理 .....	141
一、函数的极值及其必要条件 .....	141
二、微分中值定理 .....	142
思考题 2.6 .....	149
习题 2.6 .....	150
§ 2.7 不定型的极限 .....	151
一、 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 .....	151
二、其他不定型 .....	154
思考题 2.7 .....	157
习题 2.7 .....	157
§ 2.8 泰勒公式 .....	158
一、泰勒公式 .....	158
二、几个常用的麦克劳林公式 .....	163
三、泰勒公式的应用 .....	166
思考题 2.8 .....	169

习题 2.8 .....	169
§ 2.9 函数的单调性与极值 .....	170
一、函数单调性的判定法 .....	170
二、函数极值的判定法 .....	173
三、最大值与最小值问题 .....	177
四、在经济学中的极值问题 .....	182
思考题 2.9 .....	183
习题 2.9 .....	184
§ 2.10 函数的凸性与曲线的拐点 .....	185
思考题 2.10 .....	191
习题 2.10 .....	191
§ 2.11 函数作图 .....	191
一、曲线的渐近线 .....	192
二、函数作图 .....	195
思考题 2.11 .....	197
习题 2.11 .....	197
§ 2.12 曲线的曲率 .....	198
一、弧微分 .....	198
二、曲率 .....	199
习题 2.12 .....	204
§ 2.13 应用实例 .....	204
实例一 运输问题 .....	204
实例二 拐角问题 .....	206
复习题二 .....	207
<b>第三章 一元函数积分学</b> .....	<b>211</b>
§ 3.1 定积分的概念与性质 .....	211
一、引例 .....	211
二、定积分的定义 .....	213
三、函数可积的充分条件 .....	215
四、定积分的几何意义 .....	215
五、定积分的性质 .....	217
思考题 3.1 .....	221
习题 3.1 .....	222
§ 3.2 微积分基本定理 .....	222
一、积分上限的函数 .....	223

二、微积分基本定理 .....	225
思考题 3.2 .....	227
习题 3.2 .....	227
§ 3.3 不定积分的概念与性质 .....	228
一、不定积分的概念 .....	228
二、不定积分的几何意义 .....	229
三、不定积分的性质 .....	230
四、基本积分公式 .....	231
思考题 3.3 .....	235
习题 3.3 .....	235
§ 3.4 换元积分法 .....	236
一、不定积分的换元积分法 .....	236
二、定积分的换元积分法 .....	249
思考题 3.4 .....	254
习题 3.4 .....	254
§ 3.5 分部积分法 .....	257
一、不定积分的分部积分法 .....	257
二、定积分的分部积分法 .....	262
思考题 3.5 .....	265
习题 3.5 .....	265
§ 3.6 有理函数的积分 .....	266
一、有理函数的积分 .....	266
二、三角函数有理式的积分 .....	274
思考题 3.6 .....	276
习题 3.6 .....	276
§ 3.7 反常积分 .....	277
一、无穷区间上的反常积分 .....	277
二、无界函数的反常积分 .....	280
三、 $\Gamma$ 函数与 B 函数 .....	283
思考题 3.7 .....	286
习题 3.7 .....	286
§ 3.8 定积分的几何应用 .....	287
一、微元法 .....	287
二、求平面图形的面积 .....	288
三、求体积 .....	292

思考题 3.8 .....	295
习题 3.8 .....	296
§ 3.9 定积分的物理应用 .....	297
一、功 .....	297
二、引力 .....	298
三、液体的压力 .....	301
四、函数的平均值与均方根 .....	302
思考题 3.9 .....	304
习题 3.9 .....	304
§ 3.10 应用实例 .....	305
实例 钓鱼问题 .....	305
复习题三 .....	306
第四章 常微分方程 .....	310
§ 4.1 微分方程的基本概念 .....	310
一、引例 .....	310
二、基本概念 .....	312
思考题 4.1 .....	314
习题 4.1 .....	314
§ 4.2 一阶微分方程 .....	315
一、可分离变量的方程 .....	315
二、齐次方程 .....	319
三、一阶线性方程 .....	323
思考题 4.2 .....	329
习题 4.2 .....	329
§ 4.3 可降阶的高阶微分方程 .....	331
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型 .....	331
二、 $y'' = f(x, y')$ 型 .....	332
三、 $y'' = f(y, y')$ 型 .....	334
思考题 4.3 .....	336
习题 4.3 .....	336
§ 4.4 二阶齐次线性方程 .....	336
一、二阶齐次线性方程解的性质与结构 .....	337
二、二阶常系数齐次线性方程的解法 .....	340
思考题 4.4 .....	345
习题 4.4 .....	345

---

§ 4.5 二阶非齐次线性方程 .....	346
一、二阶非齐次线性方程解的性质与结构 .....	346
二、二阶常系数非齐次线性方程的解法 .....	348
三、欧拉方程 .....	358
思考题 4.5 .....	362
习题 4.5 .....	362
§ 4.6 应用实例 .....	363
实例一 鱼雷击舰问题 .....	363
实例二 人口增长模型 .....	365
复习题四 .....	368
附录 常用曲线图 .....	371
习题答案 .....	374

# 绪 论

数学是研究现实世界数量关系与空间形式的一门科学,简单地说,数学就是研究数与形的一门科学.在数学发展的不同历史阶段,随着人们对客观世界认识的不断深化,作为数学的研究对象——“数”与“形”,其表现形式经历了由常量到变量、由特殊到一般、由直观到抽象的过程.回顾数学发展的历史,可以使我们了解微积分的研究对象以及在数学发展过程中的地位与作用.

数学发展的历史大体上可以分为四个阶段:

第一阶段为萌芽时期(大约在公元前5世纪以前).人类从数数开始建立了自然数的概念与简单的记数法,并认识了最简单的几何形体.这个时期算术与几何开始逐渐形成,其特点是简单的推理.

第二阶段为常量数学时期(大约在公元前5世纪到公元17世纪中叶).这个时期前后延续了两千多年.在这个时期不仅数学已成为独立的学科,而且代数、几何、三角等都成为比较独立的学科.这个时期研究的数是常数或常量(即在某一变化过程中保持不变或相对保持不变的量),研究的形是不变的规则几何形体.研究常量间的代数运算和不同形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数与初等几何,也就是现在中学数学的主要内容.

第三阶段为变量数学时期(大约从17世纪中叶到19世纪中叶).变量数学起始于对物体运动的研究.作为变化着的量的一般性质和它们之间依赖关系的反映,在数学中产生了变量与函数的概念.数学研究对象从常量到变量的这种根本扩展是数学发展中的一个飞跃.

解析几何的出现是变量数学发展的第一个决定性步骤,其主要标志是1637年法国数学家笛卡儿(Descartes)的论著《方法论》的发表.恩格斯对此有高度的评价:“数学的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分与积分也就立刻成为必要的了……”.

微积分的出现是变量数学发展的第二个决定性步骤,其主要标志是英国科学家牛顿(Newton)在1665年的论文中出现了“流数术”(即微分与积分)及1687年发表的专著《自然哲学的数学原理》.同一时期,德国数学家莱布尼茨(Leibniz)发表了求极大、极小值及切线的新方法,1684年发表了关于微分学的论文,1686年发表了关于积分学的论文.

微积分的起源主要来自两方面的问题:一是几何学中一些问题,作曲线的切线和求面积与体积;二是力学中的一些问题,已知路程对时间的关系求速度,或



已知速度对时间的关系求路程. 这些问题,许多数学家虽然都曾研究过,但是这两类问题之间的关系的发现,以及解决这些问题一般方法的形成,是由牛顿与莱布尼茨完成的.

18世纪以微积分为主体的分析学进一步发展,微分方程、积分方程、函数论、级数、变分法等方面的研究成果不断涌现,同时出现了以研究随机变量为对象的概率论,并且形成了分析、代数与几何三大数学分支.

第四阶段为近代与现代数学时期(19世纪中叶以来). 19世纪中叶,数学的发展出现了一系列重大的变化,分析、代数与几何三大分支都有重大的突破. 如在分析方面,极限理论进一步精确化,微积分理论进一步完善,德国数学家康托尔(Cantor)创立了集合论,为微积分奠定了坚实的基础;在代数方面,从数的运算到集合的运算,群、环、域等代数系统结构得到了研究;在几何方面,从欧氏几何第五公设结论的正确性引出了罗氏几何、黎曼几何;从现实空间转入数学的抽象空间、拓扑空间等.

现代数学时期的主要特点是:数学理论更加抽象,纯数学方面出现了一些重大突破;多种新的数学思潮不断出现,如非标准分析、模糊数学等;电子计算机应用于数学的证明与实验,如1976年计算机证明了一个多世纪以来没有解决的著名难题“四色猜想”;应用数学分支大量涌现和发展,如运筹学、信息论、对策论、控制论、生物数学、经济数学等;数学向生物学、经济学、社会学、语言学等几乎所有领域渗透,数学的应用更加广泛.

从数学发展的历史可以看出,微积分的产生,是由常量数学向变量数学转变的一件具有划时代意义的大事. 时至今日,它不仅成为学习高等数学各分支必不可少的基础,而且可以毫不夸张地说,不掌握微积分,就无法学习和掌握任何一门自然科学与工程技术. 因此,读者要充分认识到学习微积分的重要性.

从数学发展的历史还可以看出,高等数学与初等数学的研究对象与方法有很大的不同,从常量到变量、从有限到无限、从特殊到一般、从直观到抽象,这些特点使高等数学的概念更加复杂、理论性更强、推理更加严谨、表述更加抽象,因此,读者在学习微积分时,要认真阅读和深入钻研教材,深刻理解基本概念和基本理论,掌握它们的内在联系,重视领会数学思想与方法;同时也必须认真完成课外作业,通过独立完成一定数量的习题,可以帮助我们进一步理解基本概念和基本理论,掌握数学思想与方法,培养抽象思维与逻辑推理的能力.

此外还应指出,作为工科院校的大学生,学习数学的目的还在于应用数学知识解决实际问题,因此,我们要重视培养综合运用所学知识,建立数学模型,解决实际问题的意识和能力. 由于计算机和数学软件的广泛应用,读者要通过数学实验,学会使用数学软件进行数值计算、符号运算与计算机模拟. 在学习过程