大学经济数学学习方法指导丛书

高等数学

杨爱珍 叶玉全 编著

上海财经大学应用数学系 主编

复旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

大学经济数学学习方法指导丛书

高 等 数 学

上海财经大学应用数学系　　主编

杨爱珍　叶玉全　编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/杨爱珍,叶玉全编著. —上海:复旦大学出版社,2005.10
(大学经济数学学习方法指导丛书)
ISBN 7-309-04762-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨…②叶… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 111431 号

高等数学

杨爱珍 叶玉全 编著

出版发行 复旦大学**出版社** 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海申松立信印刷厂
开　　本 787×960 1/16
印　　张 20.5
字　　数 378 千
版　　次 2005 年 10 月第一版第一次印刷
印　　数 1—5 000

书　　号 ISBN 7-309-04762-1/O·349
定　　价 29.00 元

内 容 提 要

本书是与上海财经大学应用数学系所编的《高等数学》第一版(由上海财经大学出版社出版)(以下简称教材)配套的学习指导书.本书对高等数学中一些比较重要、比较难以掌握的概念进行了深入的分析和讨论,以利于读者牢固掌握这些基本概念.同时通过大量的例题分析及解题方法的归纳介绍,提高读者分析问题和解决问题的能力,开阔读者的思路.

本书内容共12章,每章包括:内容提要、典型例题解析、学习测试题A,B,其中习题A是与各章内容相配合的基本题,习题B是有一定难度的提高题,并且书末附有习题答案.

本书可供各高等院校学习高等数学的学生参考,也可作为高等数学教师(特别是使用教材的教师)的教学参考书,亦可作为报考硕士研究生的"高等数学"课程的考前复习参考书.

前　　言

由上海财经大学出版社出版、上海财经大学应用数学系主编的“新世纪财经院校经济数学”系列教材（包括《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》），自2003年出版以来，赢得了众多的读者，并于2003年列为“上海财经大学首批精品课程教材建设”的项目.作为该项目的配套成果之一，我们编写了这本“高等数学学习指导”.相信它能对提高高等数学的教学质量，对学生掌握高等数学的教学基本要求，较好地理解抽象的数学概念，提高运用数学的思维和技巧的能力，以及对有志者的继续深造起到重要的辅助作用.

本书是与上海财经大学应用数学系所编的《高等数学》第一版（由上海财经大学出版社出版）（以下简称教材）配套的学习指导.面向学习高等数学的学生（特别是使用教材的学生），也可作为高等数学教师（特别是使用教材的教师）的教学参考书，以及考研学生的复习用书.

本书按教材的章节编排内容，以便与教材同步.但编写时还注意到使用本书的独立性.

每章包括以下几部分内容：

一、内容提要

归纳总结了每一章的概念、定理、公式、方法.

二、典型例题解析

按照每一章的教学内容的顺序，我们选择了较典型的、能反映教学要求的例题，并进行解析.每道例题在解答时，先根据作者多年积累的丰富教学经验进行必要的分析，并给出一般的解题方法以及注意事项，再给出解题过程.

三、学习测试题

按照每一章教学内容的顺序，每一章都配备了A，B两组习题.习题A是与各章内容相配合的基本题，习题B是有一定难度的提高题.题型有：填空题、选择题、计算题、应用题、证明题.

另外，书末还附有习题参考答案与提示.

本书编写者：杨爱珍副教授（第1,2,3,4,5,6,12章），叶玉全副教授（第7,8,9,10,11章）.

在本书编写过程中，我们得到了上海财经大学的重视和支持，并得到了复旦

大学出版社的大力协助，特别是范仁梅同志的认真编辑和一丝不苟的校对，在此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望同行们和广大读者给予批评指正.

编者

2005 年 4 月

于上海财经大学

目　录

第 1 章

函数与极限

§1.1 内容提要

1.1.1 函　　数

1. 函数的定义

设 D 为一个非空实数集，若存在一个对应规则 f，使每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D$. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量；D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f；y 的全体数值组成的集合称为函数 f 的值域，记作 Z_f.

2. 函数的两要素(定义域与对应规则)

(1) 函数定义域的求法：所谓定义域，即使函数关系式在实数范围内有意义的 x 的变化范围.

① $y = \dfrac{1}{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x) \neq 0$(分式函数，分母不等于零).

② $y = \sqrt[2n]{\varphi(x)}$，则 $\varphi(x) \geqslant 0$(偶次根式函数，被开方非负).

③ $y = \log_a \varphi(x)$，则 $\varphi(x) > 0$(对数函数，真数大于零).

④ $y = \arcsin\varphi(x)$，$y = \arccos\varphi(x)$，则 $|\varphi(x)| \leqslant 1$.

⑤ $y = \arctan\varphi(x)$，则 $\varphi(x) \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

⑥ $y = \mathrm{arccot}\varphi(x)$，则 $\varphi(x) \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

⑦ $y = f_1(x) \oplus f_2(x)$，则 $D_{f_1} \cap D_{f_2}$(多个函数，取交集).

⑧ $y = \begin{cases} f_1(x), x \in D_1 \\ f_2(x), x \in D_2 \end{cases}$，则 $D_1 \cup D_2$(分段函数，取并集).

⑨ 反函数的定义域为直接函数的值域.

(2) 对应规则(求函数值):

① $f(x_0) = f(x)\mid_{x=x_0}$;

② 求 $f(x)$,有变量代换法和配方法.

3. 函数的基本性质

(1) 有界性:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若 $\exists M > 0$,使得 $\forall x \in I$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上有界;若不存在这样的 $M > 0$,则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

常见的有界函数有:

$$|\sin x| \leqslant 1,\ |\cos x| \leqslant 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2},\ |\arccos x| \leqslant \pi, x \in [-1,1].$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2},\ |\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 单调性:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,恒有

$$f(x_1) < f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少).

注　若 $f(x)$ 在定义域 D 上单调增加(或单调减少),则称 $f(x)$ 为单调函数,否则,$f(x)$ 为非单调函数.

(3) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义,若 $\forall x \in I$,恒有

$$f(-x) = f(x)(\text{或 } f(-x) = -f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴(即 $x = 0$)对称.常见的偶函数有 x^{2n}, $|x|$, $\cos x$, C,…, $f(x) + f(-x)$,….

奇函数的图形关于原点对称.常见的奇函数有 x^{2n+1}, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$,…, $f(x) - f(-x)$, $\ln(\sqrt{1+x^2} \pm x)$,….

奇 ± 奇 = 奇;偶 ± 偶 = 偶;奇 × 奇 = 偶;偶 × 偶 = 偶;奇 × 偶 = 奇.

(4) 周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若 $\exists$ 常数 $T > 0$,使得 $\forall x \in D$,且 $x + T \in D$,恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,使上式成立的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

常见周期函数的周期有:

$$A\sin(\omega x+\theta),\ A\cos(\omega x+\theta),\ 周期\ T=\frac{2\pi}{|\omega|};$$

$$A\tan(\omega x+\theta),\ A\cot(\omega x+\theta),\ 周期\ T=\frac{\pi}{|\omega|};$$

$$|\sin x|,\ |\cos x|,\ 周期\ T=\pi.$$

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f，若 $\forall y\in Z_f$，从关系式 $y=f(x)$ 可确定一个 x 值，则变量 x 是变量 y 的函数，记为

$$x=\varphi(y),$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$.

反函数的求法

$$y=f(x)\xrightarrow{解出}x=\varphi(y)\xrightarrow{改写}y=\varphi(x).$$

注　① 直接函数 $y=f(x)$ 的图形与 $x=\varphi(y)$ 的图形重合；$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称；

② 一一对应函数必存在反函数，且反函数也一一对应；

③ 直接函数与反函数的定义域与值域互换.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 值域为 Z_φ，若 $Z_\varphi\subset D_f$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数.

x 称为自变量，y 称为因变量，u 为中间变量.

6. 基本初等函数

(1) 幂函数：$y=x^u$（u 为任意实数）.

(2) 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(3) 对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(4) 三角函数：$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot}x$.

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的用一个式子表示的函数，称为初等函数.

8. 分段函数

若一个函数在其定义域内，对应于不同的区间有不同的函数表达式，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数：

(1) 符号函数：$1, x > 0$，

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 取整函数：y 为不超过 x 的最大整数，记为 $y = [x]$.

一般分段函数非初等函数.

9. 常见的经济函数

(1) 成本函数 $C(x)$：成本是产量 x 的函数，它由固定成本 C_0 和变动成本 $C_1(x)$ 组成，即

$$C(x) = C_0 + C_1(x).$$

$\overline{C(x)} = \dfrac{C(x)}{x}$ 称为平均成本，即单位产品的成本.

(2) 收益函数 $R(x)$：收益是销售量（即需求量）x 的函数，若产品单价为 p，则 $R(x) = px$，其中 p 可为常数，也可为 x 的函数. $\overline{R(x)} = \dfrac{R(x)}{x}$ 称为平均价格，即单位产品的收益.

(3) 利润函数 $L(x)$：在产销平衡条件下，$L(x) = R(x) - C(x)$，其中 x 是产量 $=$ 销量 $=$ 需求量.

所谓"盈亏平衡点"，即收益与成本相等时的产量，亦即 $L(x) = R(x) - C(x) = 0$ 时的 x.

(4) 需求函数 $Q(p)$：在不考虑其他因素影响的前提下，需求量 Q 是价格 p 的函数，称为需求函数，记为 $Q = f(p)$，一般需求函数是价格的减函数.

(5) 供给函数 $Q(p)$：在不考虑其他因素影响的前提下，供给量 Q 是价格 p 的函数，称为供给函数，记为 $Q = g(p)$，一般供给函数是价格的增函数.

1.1.2 极　　限

1. 数列的极限

(1) 定义：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists$正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

(2) 性质：

① 唯一性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = B$，则 $A = B$.

② 有界性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$，则$\{a_n\}$有界.

③ 单调有界准则：单调增且有上界或单调减且有下界的数列必有极限.

④ 夹逼准则：设有 3 个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，若 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = A$.

⑤ 柯西极限存在准则：数列$\{x_n\}$极限存在$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists$正整数 N，当 $m,n > N$ 时，恒有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

(3) 重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

2. 函数的极限

(1) 定义：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists$正实数 M，当 $|x| > M$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\,\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) 左右极限：

左极限：$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\,\delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta$（即 $x_0 - \delta < x < x_0$）时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限：$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\,\delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$（即 $x_0 < x < x_0 + \delta$）时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) 性质（下面以 $x \to x_0$ 表示 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$）：

① 唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = B$，则 $A = B$.

② 局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$，则 $\exists x_0$ 的 δ 邻域 $U_0(x_0,\delta)$，$f(x)$ 在 $U_0(x_0,\delta)$ 内有界.

③ 保号性：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或$A<0$)，则$\exists U_0(x_0,\delta)$，在$U_0(x_0,\delta)$内$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

④ 保号性推论：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$),则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

⑤ 夹逼准则：若在$U_0(x_0,\delta)$内，有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

⑥ 运算法则：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$.

特别,$\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cA$.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n=A^n\ (n\text{ 为自然数}).$$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

(4) 定理：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(5) 重要极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

特点：

(i) $\dfrac{0}{0}$ 型未定式；

(ii) $\dfrac{\sin\Delta}{\Delta},\Delta\to 0$.

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

特点：

(i)1^∞ 型未定式；

(ii)$(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}},\Delta\to 0$.

3. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量：

① 定义：以零为极限的变量，称为无穷小量.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| < \varepsilon$.

② 性质：

(i) 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量；

(ii) 有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量；

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha,\ \lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

③ 比较：设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

(i) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$；

(ii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c, (c \neq 0)$，则称当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量，记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$；

(iii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

(iv) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小量；

(v) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c(c \neq 0, k > 0)$，则称当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量.

④ 等价替换：若当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，$\beta(x) \sim \beta_1(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在，则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

常用的等价形式

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

当 $f(x) \to 0$ 时，$\sin f(x) \sim f(x)$，$\arcsin f(x) \sim f(x)$，$\tan f(x) \sim f(x)$，$\arctan f(x) \sim f(x)$，$\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$，$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$，$1 - \cos f(x) \sim \dfrac{f^2(x)}{2}$，$(1 + f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha f(x)$.

(2) 无穷大量：当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$,恒有 $|f(x)| > M$.

(3) 无穷大量与无穷小量的关系:

当 $x \to x_0$ 时,若 $f(x)$ 为无穷大量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量.

若 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

(4) 无穷大量与无界变量的区别:无穷大量一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大量.

考虑 $f(x) = x\sin x, x \to \infty$

4. 极限的计算

(1) 代入法 —— 利用极限的四则运算法则.

(2) 消去"零因子"法 —— 通过因式分解.

(3) 消去"∞ 因子"法 —— 通过分子、分母同除最高阶无穷大.

(4) 有理化法 —— 分子或分母有理化去掉根号.

(5) 利用两个重要极限.

(6) 利用无穷小量性质.

(7) 利用等价无穷小量替换.

(8) 利用变量代换 —— $x = \dfrac{1}{t^k}, k \in \mathbf{N}$.

(9) 利用左、右极限 —— 求分段函数分界点处的极限.

(10) 利用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限.

(11) 利用泰勒公式.

(12) 利用导数定义.

(13) 利用定积分定义求和式的极限.

(14) 利用级数收敛的必要条件.

5. 极限的证明

(1) 利用极限的分析定义.

(2) 利用极限存在准则(夹逼准则,单调有界准则,柯西存在准则).