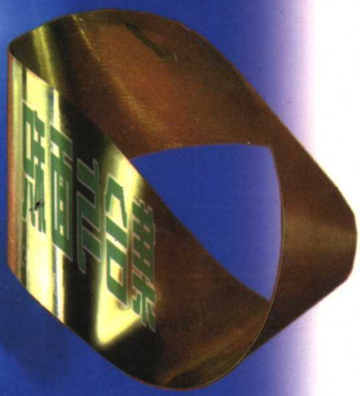
走向科学的明天丛书

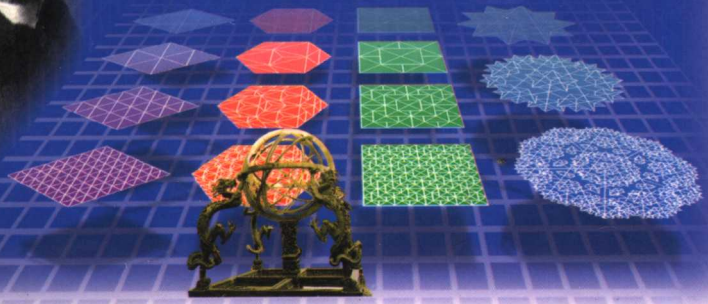
ZOUXIANG KEXUE DE MINGTIAN CONGSHU

集合与面积

JIHE YU MIANJI

李惠玲 金家樑等 著





广西教育出版社

国家“九五”重点图书
出版规划项目

走向科学的明天丛书

集合与面积

李惠玲 金家樑 苏明剑
刘 珊 吴作章 著

江苏工业学院图书馆
藏书章

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合与面积/李惠玲等著. —南宁:广西教育出版社,2000.4
(走向科学的明天丛书)
ISBN 7-5435-2981-5

Ⅰ.集… Ⅱ.李… Ⅲ.①集论-普及读物②测度论-普及读物 Ⅳ.0144-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 19549 号

走向科学的明天丛书

集合与面积

李惠玲 金家樑 苏明剑
刘 珊 吴作章 著

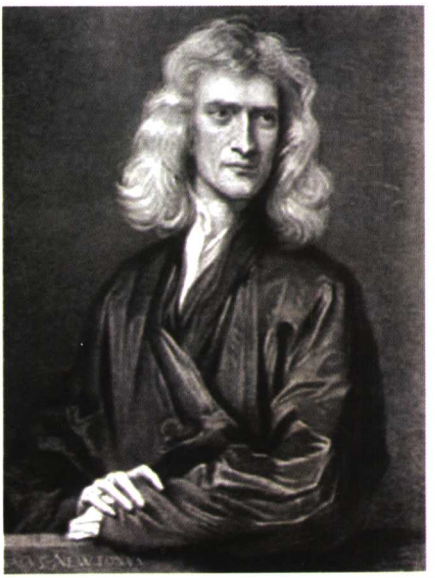
☆

广西教育出版社出版
南宁市鲤湾路 8 号
邮政编码:530022 电话:5850219
本社网址 http://www.gep.com.cn
读者电子信箱 master@gep.com.cn
全国新华书店经销 广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 3.125 印张 插页 4 58 千字
1999 年 12 月第 1 版 2000 年 8 月第 3 次印刷
印数:9 001—14 000 册
ISBN 7-5435-2981-5/G·2265 定价:6.50 元
如发现印装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换

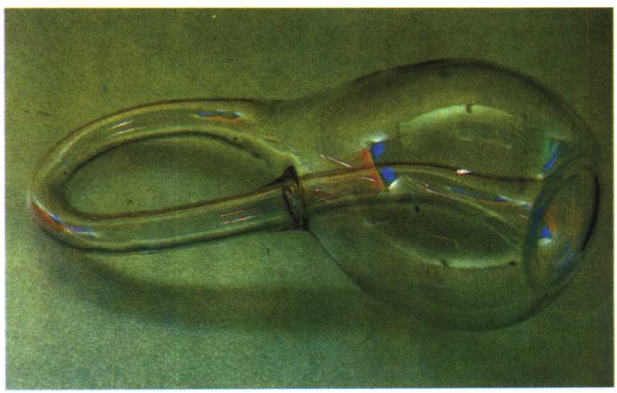
彩图 1　牛顿（Issac Newton，1642 — 1727），出生于英国，科学巨人，微积分发明者



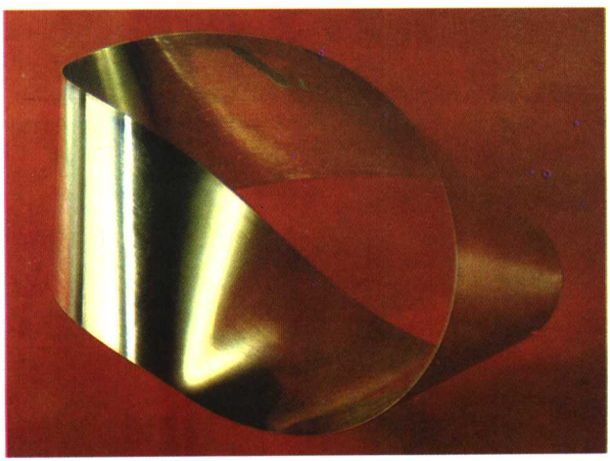
彩图 2　希尔伯特（D. Hilbert，1862 — 1943），19世纪末20世纪初的德国数学家。这是他22岁时的照片

彩图 3　康托（G. Cantor，1845 — 1918），德国数学家。集合论创始人

彩图 4　勒贝格（H. Lebesgue，1875—1941），法国数学家。创立可数可加测度理论



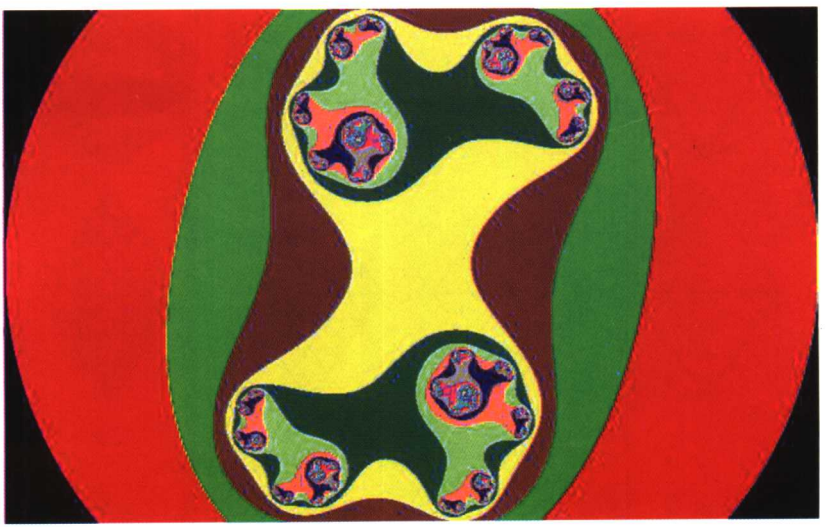
彩图 5　克莱因瓶



彩图 6　麦比乌斯带

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

彩图 7　邮票照片。从右上角按顺时针方向依次是：Lagrange，Pascal，Kovalevskaya，Al Khuwarizmi，Dedekind，Newton，Cauchy，Ramanujan，Bolzano



彩图 8　Julia 集

序

在世纪之交，我们这套《走向科学的明天丛书》问世了。这是一套面向青少年朋友的大型科普读物，是为了补充学校教育之不足，从数学、物理学、化学、天文学、地球科学和生命科学六大基础科学的历史发展、当前的成就、未来的璀璨远景，分类展示给读者。

本世纪末，有一股反科学的逆流，认为科学的时代已经过去。例如美国的约翰·霍根，他写了一本书《科学的终结》，他说："科学（尤其是纯科学）已经终结，伟大而又激动人心的科学发现时代已一去不复返了！"与此同时，法国当代女巫伊丽莎白·泰西埃也写了一本畅销书《占星术——21 世纪的科学》，再加上那些"世纪末"的谣言和形形色色的邪教，把社会搅得似乎有点混乱。

然而，科学永远是照亮世界的火炬，光芒所至，一切邪魔歪道都会原形毕露。这套《走向科学的明天丛书》也正是告诉大家，21 世纪的科学非但不会终结，还将会有更大的发展。

为什么《走向科学的明天丛书》还是从数、理、化、天、地、生这老的六大基础科学讲起？因为我们不能割断人类认识客

观世界的历史，这是人类认识绝对真理的长河中的一个非常重要的环节，近代科学和未来的科学都是在这个基础上发展起来的，边缘科学、前沿科学……我们都在科学的明天中讲到了。有人不顾客观的科学发展的历史事实，主观地想把科学体系打乱，从而建立个人的“新科学体系”，这样只能把科学搞乱，给伪科学以钻空子的机会。

在80年代初期，科普界曾有过一场争论，那就是有人说知识的科普已经过时，科普的任务是普及科学思想和科学方法，而这个任务将由科学文艺（主要是科幻小说）来完成。我们说科学基础知识与科学思想和科学方法是刀与刃的关系，抛弃科学基础知识，科学思想和科学方法就成了无刀之刃，只是幻想与空话。科学基础知识越深厚，科学之剑也就越坚实，砥砺出来的剑刃也就无坚不摧。我们推出这套《走向科学的明天丛书》，也就是想让每一位读者都能得到这柄坚实的剑，而砥砺剑刃则需要读者们自己的努力了。

这套丛书的编写是在一批老科普作家支持下集体完成的，他们多年来在教育和科研第一线工作，如今大多已年近花甲或年过花甲，但为了科普事业的发展，他们仍然在百忙之中创作了这批精彩的科普作品，我们应该向他们表示衷心感谢。

最后，要特别感谢广西教育出版社，正是在编辑们的精心设计和组织下，这套《走向科学的明天丛书》才能与读者早日见面。

郭正谊

1999年8月20日

致青少年朋友

无论哪个国家，数学和本国语文都是学生的主课。这两科构成了人们最基本的文化素养。数学，则是最具国际性的学科。到20世纪中叶，世界各国的数学课程大体上是相同的。算术、几何、代数、三角成为人类基础教育的主题。这一切，古希腊的学者都已完成了，埃及、巴比伦、印度、阿拉伯和古代中国的数学家也都有特定的贡献。因此，现在的中小学数学内容，是人类的共同财富。

17世纪牛顿和莱布尼兹发明微积分，20世纪冯·诺依曼等发明了计算机，使得数学文明发生了巨大的变化。数学，以更新的面貌推动着社会前进。20世纪的数学发展，抵得上过去的几百年。现在的标准数学学科分类，有96门大学科，几百门小学科。现在世界上已经找不到能够通晓整个数学的数学家了。

一方面是中小学数学内容相对不变，另一方面是现代数学内容飞速发展。这二者间如何协调？除了加强中小学数学教育改革之外，对公众进行数学普及是一件大事。在“科教兴国”的今天，没有数学的普及是不可想像的。

2000年，被国际数学家联合会确定为数学年，目的是让公众了解数学。

广西教育出版社出版《走向科学的明天丛书》，其中包括的数学学科一套共6册。数学学科的内容是如此广泛，一套科普丛书是不可能介绍完全的。我们只选择一些重要的、比较熟悉的部分向读者做一些力所能及的介绍，希望本丛书能帮助读者对当代数学及其前景作一管窥。

数学全套书由以下6册组成：

1.《数学的明天》，这是我个人对现代数学的一些感受，主要由一些新闻和故事组成，期望从整体上看看数学。

2.《集合与面积》，这是一本涉及无限的书，是现代数学的精华部分，我们做了简单的描述。主要作者是李惠玲和金家樑。苏明剑、刘珊、吴作章写了一些初稿。

3.《精益求精的最优化》，反映了人类期望用数学方法求得精确控制经济、管理、军事以及生产过程的愿望。李惠玲是主要作者。参加写作的有施洪亮、刘开峰和刘玲。

4.《大千世界的随机现象》，主要介绍概率和数理统计的简单内容。当“降水概率”在电视屏幕上出现时，高中毕业生却全然没有在课堂上听说过“概率”，这是数学教育的悲哀。对这本书，我花了一些力气，刘萍作了一些整理工作。初稿由张东鸿、李雪峰、何君等完成。

5.《组合数学方兴未艾》，对未来会有重大发展的一门学科做了介绍。计算机是“离散”的，数据是离散的。“组合”爆炸是一个现实问题。书中谈了许多中国古代数学家的贡献。此书由王春萍、张建国写初稿。

6.《平面几何定理的机器证明》，是一本介绍当代中国数学家成就的普及性书籍。由江西师范大学孙熙椿教授撰写，

预想会受到读者的关注。

这套书是1998年动手写的。我拟订了提纲。开始时由华东师范大学数学系一批研究生写初稿，开过几次会。有些同学很用心，写得不错。不过毕竟第一次写作，需要改动之处甚多，有许多则完全是另起炉灶。我在匆忙中找李惠玲教授帮忙。她费了许多工夫。

由于匆忙，参与的人多，错误之处在所难免，对此心中十分忐忑，诚恳地希望读者原谅。

数学不像有些人宣传的那样，存在“数学危机”。数学在一日千里地前进。祝愿中国数学繁荣发展，尽早实现“21世纪数学大国”梦想。

张奠宙

1999年12月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

写在前面的话

本书是《走向科学的明天·数学》丛书中最为抽象的一本。不过,只要耐着性子读下去,就会回味无穷。这些内容虽然抽象,但却是20世纪数学的"华丽乐章",一旦有所领悟,将会击节三叹,感到美不胜收。此外,你会知道"什么是好的数学,而什么是不大好的数学"。读完本书,也许会对你长期形成的某些陈旧数学观产生巨大的冲击。

确实,数学中有"大江东去"式的豪放型的理论构思,同时也有"小桥流水"式的"婉约"型的技巧制作。自从陷入中小学的"数学题海"之后,技巧派大行其是,而在数学发展史上所发生的数学理论变革,即那些激动人心的数学革命,几乎从数学教学中消失了。这里,我们想对20世纪以来数学发展的一个侧面——集合、维数、测度——做一个鸟瞰式的介绍,体会一下数学家创新的心迹。同时,这些内容也必将向21世纪延伸。陈省身在《微分几何讲义》一书中明确提出:"下一世纪数学的研究对象必然是流形。"本书当然不可能接触到当今的数学研究前沿,但是,为了理解今天数学家所努力追求的目标,"窥其一斑"大概还是可以做到的。

自从徐迟的名作《哥德巴赫猜想》发表以后,陈景润的数学工作为世人所景仰。这篇报告文学对中国数学发展起了重

大的作用，功不可没。文中把“解决哥德巴赫猜想”比喻为“摘取皇冠上的明珠”，这本无不可。但是，听说不少人士以为“中国数学离世界最高水平”仅“一步之遥”，而“哥德巴赫猜想”就是世界数学的研究中心，产生了一种盲目乐观的情绪，这恐怕是徐迟先生所未曾想到的了。产生这样的错觉，其实是数学教学上的失败。因为我们没有向我们的中小学生，甚至一些大学生，适当地介绍20世纪以来数学发展的真实面貌。

今天的数学家有三类，第一类数学家是专攻数学难题的，例如，陈景润研究“哥德巴赫猜想”，“1+2”的结果至今仍是世界上最好的。1993年，淮尔斯(Wiles)证明了费尔马猜想($x^n+y^n=z^n$，当$n>2$时无整数解)，轰动了世界。第二类数学家是构筑数学模型，用来描述科学规律，解决工程技术难题，参与金融、社会、经济等重大决策。这是数学直接为社会发展服务的方面，中国数学在这方面比较落后，需要大力发展，迎头赶上。此处不赘。第三类数学家是面对一些“基本的数学问题”，构思理论，提供新的数学工具，提升数学理解的水平。确实，一些非常基本的数学问题现在还远远没有得到解决。就以代数方程的求根问题而言，一个未知数的n次方程一定有n个根，这在高斯时代已经解决了。可是，对于多变量的情形呢？我们却所知甚少。比如，两个未知数的方程

$$x^2+y^2-1=0$$

其解是一条曲线：圆。我们当然很清楚。可是，只要稍稍复杂一点，比如，有4个未知数的方程(爱因斯坦相对论认为现实空间是四维的)

$$x^2+y^3+z^4+w^4+x^2y^2z^2+yw^4-xwz+1=0$$

它的根是什么？表示怎样的“曲面”？分为几块？各为几维？

曲面是否光滑？有没有奇点？二次曲线可以分类(椭圆、双曲线、抛物线),高次曲面如何分类？用什么指标作为分类的标准？这些基本的问题到现在还远远没有解决。数学家绞尽脑汁,试图构造出一种理论,求得比较彻底的解决。20 世纪已经过去,进展很大,但离开完全解决还非常遥远。21 世纪必将继续努力。

上述这样的代数方程求解问题,与几何密切相关。一般方程的解,乃是一个高维曲面,现代数学中称之为“流形”。如果未知数 x,y,z,w 是复数,其解所成之曲面,便是“复流形”了。正如二维曲面有单侧、双侧之分,高维曲面的类型就远为复杂。代数几何学,微分几何学,纤维丛理论,大范围微分几何学等等,都是为解决这一基本问题而发展起来的。

显然,要解决这样的深刻问题,做几万道习题是不够用的,也不是算几麻袋草稿纸所能奏效的。关键在于面对现实,富于想象,善于表示,深于思考,敢于建构,有远大的理想,并脚踏实地去做。就这一层面来说,中学的数学学得再好,哪怕是得了“国际数学奥林匹克”金牌,在数学攻坚的国际竞赛中,恐怕还远未入门呢！

现在让我们回到本书。中学里引入了集合的概念。平面上点的集合也是一种图形,它是否有面积？这是本书的主旨。

20 世纪的数学,先是从“无限”引起争端。康托的集合论是向“无限”进军的利器。可数与不可数,在无限王国里排成次序。“无限”是对人们认识能力的一种挑战,悖论也随之而来。数学基础是否牢靠,曾经是一个严重的问题,而且现在也不能算解决了。

无限集合有许多奇异的性质。康托三分集是一个杰出的例子,令人叹为观止。它所具有的分数维数,形成了当代数学

的新分支。

20世纪初的勒贝格测度是人类深沉思考的产物，它和康托的集合论遥相呼应，创立的可数可加测度理论，终于导致积分学的一场革命。概率论在20世纪走向成熟，其根基正是勒贝格积分论。

群是解代数方程的产物。在大数学家庞加莱的手里，却成为描写曲面(流形)的工具。球面和环面有何不同，似乎只能意会不能言传，即使说了也不准确。好，庞加莱提出了曲面的基本群的概念，用完全准确的数学语言加以表达。这是真正好数学的范例。

总之，写这本书的目的在于使读者能够感受一下纯粹数学的一点气氛，让大家对20世纪的一些重大数学成果作一些欣赏，能够从内心感到数学的精美，并大声喝彩。

目录

序

致青少年朋友

写在前面的话

无限集合…… 1

☞无限…… 1

☞希尔伯特的无限旅店…… 6

☞基数的困惑…… 11

☞芝诺悖论…… 16

☞罗素悖论…… 21

集合的维数…… 26

☞n 维欧氏空间…… 27

☞曲线和曲面的维数…… 29

☞海岸线的长度,豪斯道夫维数 …… 33

☞柯赫雪花曲线的维数…… 36

☞康托三分集的维数…… 40

☞西尔宾斯基地毯的维数…… 42

长度　面积　测度…… 50

☞长度公理、面积公理 …… 50

☞内填外包法…… 57

☞测度公理…… 61

☞质量分布测度…… 66

☞概率测度…… 69

☞20 世纪的化圆为方问题 …… 74

☞高维高次的时代…… 78

无限集合

无　限

“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独沧然而涕下。”这是唐朝陈子昂的诗，诗中对时间和空间的无限，感慨万千。

就感性认识而言，人只能认识有限的事物。从生到死的时间段，从他的目力所及的领域，就是一个人的时间和空间感知范围。但是，人还可以想象，用理性来认识世界，就会得到陈子昂那样的印象：时间无始无终，天地无边无沿。

时间和空间的无限，是一个哲学问题。现在的天文学有所谓“宇宙大爆炸”的时

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com