新世纪高等职业教育文化基础课程教材

线性代数与线性规划模型

Linear Algebra and Linear Programming Model

主编 张珠宝 毕朝晖

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪高等职业教育文化基础课程教材

线性代数与线性规划模型

主　编　张珠宝　毕朝晖

副主编　焦建六

主　审　胡卫群

高等教育出版社

内容简介

本书是教育部项目《将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验》的研究成果之一.

本书以线性方程组为主线，矩阵为工具，介绍线性代数的基本知识、基本理论和线性规划模型以及整数规划模型，突出学生应用数学方法和现代化计算工具解决各种实际问题的能力培养，注重于建立模型方法的介绍和实际应用. 同时，本书还介绍求解模型的算法与借助的计算机软件. 全书共分 5 章：行列式、矩阵、线性方程组以及线性规划模型和整数规划模型. 本书叙述清楚、浅显易懂，每章后配有大量的习题和应用实例，便于学生巩固所学内容或自学.

本书可作为高等职业教育、高等专科教育、成人教育经济类各专业的教材，以及经济工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与线性规划模型/张珠宝，毕朝晖主编.
北京：高等教育出版社，2005.6
ISBN 7－04－016376－4

Ⅰ.线… Ⅱ.①张…②毕… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②线性规划-高等学校-教材
Ⅳ.0151.2②0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 061076 号

责任编辑 徐 东 **封面设计** 吴 昊 **责任印制** 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021－56964871
邮政编码	100011	**免费咨询**	800－810－0598
总　　机	010－82028899	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021－56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com

排　　版	南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷	商务印书馆上海印刷股份有限公司

开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2005 年 6 月第 1 版
印　　张	12.25	**印　　次**	2005 年 6 月第 1 次
字　　数	290 000	**定　　价**	16.00 元

出版说明

为促进职业教育更好地适应社会主义现代化建设对生产、服务第一线技能型人才的需要，缓解劳动力市场上制造业和现代服务业技能型人才紧缺状况，在2003年底，教育部、劳动和社会保障部、国防科工委、信息产业部、交通部、卫生部决定组织实施“职业院校制造业和现代服务业技能型紧缺人才培养培训工程”（教职成[2003]5号，以下简称“工程”）.“工程”的目标是：“根据劳动力市场技能型人才的紧缺状况和相关行业人力资源需求预测，在数控技术应用、计算机应用与软件技术、汽车运用与维修、护理等四个专业领域，全国选择确定500多所职业院校作为技能型紧缺人才示范性培养培训基地；建立校企合作进行人才培养的新模式，有效加强相关职业院校与企事业单位的合作，不断加强基地建设，扩大基地培养培训能力，缓解劳动力市场上技能型人才的紧缺状况；发挥技能型紧缺人才培养培训基地在探索新的培养培训模式、优化教学与训练过程等方面的示范作用，提高职业教育对社会和企业需求的反应能力，促进整个职业教育事业的改革与发展.”为配合“工程”的实施，在2004年初，教育部相继推出了两年制高等职业教育数控技术应用、计算机应用与软件技术、汽车运用与维修、护理等四个专业领域的技能型紧缺人才培养指导方案，并陆续举办了这四个专业领域的相关人员培训班.

自“工程”工作开展以来，各有关参与立项研究和试点的高职高专院校在职业教育人才培养目标、人才培养模式以及专业设置、课程改革等方面做了大量的研究、探索和实践，取得了不少成果.各高职高专院校加强了专业课程的教学，强化了对学生技能的培养，原来文化基础课程的教学面临调整.各有关院校都在积极探索、研究文化基础课程的改革，并取得了很好的效果.为适应新的教育形式，同时使这些研究成果能够得以固化并更好地推广，从而总体上提高高职高专教育人才培养的质量，我们根据教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，组织规划了有关高职高专院校进行了多次研讨，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在文化基础课程的教学改革方面的成功经验，编写出版了系列“新世纪高等职业教育文化基础课程教材”，数学课程教材即该系列教材之一.这些教材结合“工程”的指导思想与目标任务，反映了最新的教学改革方向，如数学系列教材淡化了理论的推导和证明，强化了实践技能，突出了职业教育改革特色，难易程度更适应现在的生源状况.

本系列教材出版后，我们还将广泛调研和收集反馈意见，准备在今后推出高等职业教育文化基础课程的立体化教材，提供整体的教学解决方案．我们希望通过立体化教材，实现教学信息化、网络化，以学生的学习为本，为技能型人才的培养创造良好的条件．

文化基础课程是高等职业教育各专业的基础课，在目前不断深化的教学改革中，必将会不断涌现新理念、新成果，希望使用本系列教材的广大师生对需要改进之处给予及时的指正．

“新世纪高等职业教育文化基础课程教材”适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用．

高等教育出版社

2005 年 3 月

前　　言

随着我国高等教育由精英化向大众化发展,高职院校的崛起体现了社会和市场对人才多元化的需求.高职教育是培养应用型人才的高等教育,更应该注重知识的实用性.目前,高职院校许多专业以及相应学科的课程设置仍在为适应市场需求而进行探索和优化.而以培养“应用数学知识来分析和解决实际问题的能力”作为数学教学目标之一已成为共识.线性代数与线性规划模型在许多领域中得到应用,如财政、金融、会计、营销、人力管理、投资经济分析、生产计划等,具有联系实际领域广的特点.因此,将数学建模思想和方法融入数学课程教学是高等职业教育数学教学改革的重要举措之一.

本套高职高专数学系列教材是编者在长期教学实践和科学研究基础上编写而成的,今年出版的教材包括:《高等数学》、《线性代数与线性规划模型》和《数学建模与数学实验》,明年还将陆续出版《经济数学》和此系列相关的配套辅导用书。《线性代数与线性规划模型》从内容到思想方法上均汲取了数学建模活动中获得的新的思想、方法和成果,并充分考虑到高职高专院校学生的知识结构和基础,是适应高职院校学生学习的教材.

本教材的特点:

1. 体现创新

本书将数学知识与实际问题有机地相结合,在数学建模和数学实验这两方面作了探索和尝试,注意知识体系的完整和“有所为,有所不为”的指导思想,各章后均有与之相对应的实际问题.对实际问题分析透彻,建立模型思路清晰,使学生较容易地掌握应用数学思想解决实际问题的方法.通过数学实验的学习,使学生能运用现代化的计算工具计算实际问题中出现的复杂计算问题,将数学知识、数学建模与计算机应用三者有机地融为一体.

2. 突出应用

本书通过讲解数学理论应用的实际案例,将数学建模思想引入教学.实际案例选材十分广泛,涉及经济及日常生产、生活等各个方面,不少内容具有实用价值,而且趣味性强.

3. 结合计算机应用

本书注重数学方法与计算机应用相结合.为了使教师教学方便,学生学习容易,选用了界面友好、易学易教的 MATLAB 6.5 软件以及 LINDO 软件,充分发挥计算机软件的作用,有效地培养了学生应用数学方法和现代化计算工具解决各种实际问题的能力.

本书共分 5 章:行列式、矩阵、线性方程组、线性规划模型和整数规划模型.全书内容可在 54 学时授完.本书中的内容有的相对独立,如行列式、矩阵、线性方程组可成为一个教学模块,约需 30 学时.线性规划模型与整数规划模型可分别成为一个教学模块,各需 10 学时;

也可视专业需要和学时限制而确定教学模块；或将每章中的 MATLAB 软件应用和应用实例两部分内容在第二课堂上学习，这样可用 40 学时授完其他内容.

本书主编为张珠宝和毕朝晖，副主编为焦建六.第 1、2、3 章由毕朝晖编写；第 4(4.3 节单纯型算法除外)、5 章以及全书的应用实例和实验由张珠宝编写；书中的 MATLAB 软件应用部分由孙旸编写；焦建六编写了 4.3 节单纯型算法，并对本书提出修改意见和建议.

本书由南京林业大学胡卫群教授主审，并提出了诸多修改意见和建议，在此深表谢意.

在本书编写过程中，得到江苏经贸职业技术学院、南京交通职业技术学院的大力支持和关心，在此一并表示感谢.

我们期望该系列教材的出版能为提高高等职业教育数学课程的教学质量起到促进作用，为高职教育培养"应用型"人才作出贡献.

本书可作为高职高专院校"线性代数与线性规范模型"课程用教材，也可作为高职高专院校数学建模培训的教材之一.

编者

2005.5

目　　录

第1章　行　列　式

在许多实际问题，特别是经济学的问题中，人们常常会碰到求解线性方程组的问题. 所谓线性方程组是指一组含有若干个未知数的一次方程式. 在初等代数中，为便于求解二元和三元线性方程组，引进了二阶行列式和三阶行列式. 为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二阶、三阶行列式加以推广. 本章我们将给出 n 阶行列式的概念，研究它的基本性质并将给出用行列式求解线性方程组的一种重要方法——克莱姆法则.

1.1　行列式的概念

1.1.1　二阶和三阶行列式

考虑由两个线性方程式构成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 x_1，x_2 为未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为未知量的系数，b_1，b_2 为常数项.
用消元法解此线性方程组，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，线性方程组仅有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

为了方便起见，引进二阶行列式概念.

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称它为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

其中公式(1-3)等号右边的式子又称为**二阶行列式的展开式**. 数 $a_{ij}\,(i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2)$ 称

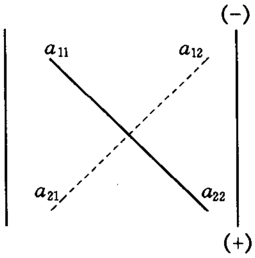

图 1-1

为该行列式的元素，每个横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列. 此时，a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第 2 个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交处的一个元素. 在二阶行列式中，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

二阶行列式的计算，可以用画线的方法记忆，即二阶行列式等于主对角(实线)上两个元素的乘积减去次对角线(虚线)上两个元素的乘积，如图 1-1 所示.

例 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 1\times 3 = 2.$

例 2 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

我们将行列式应用到线性方程组(1-1)，称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为方程组(1-1)的系数行列式.

当 $D \neq 0$ 时，方程组的解(1-2)可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中 D_1 是把系数行列式 D 中 x_1 的系数用常数项替换后所得到的行列式，D_2 是把系数行列式 D 中 x_2 的系数用常数项替换后所得到的行列式.

例 3 解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = -3. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 3\times(-1) = 7 \neq 0.$$

所以方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{7} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{7} = -3.$$

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3, \end{cases} \tag{1-4}$$

为了更方便地求解它,我们引进三阶行列式的概念,三阶行列式的展开式规定为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

其中,$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为 a_{11} 的**余子式**,它由上面的三阶行列式划去 a_{11} 所在的行(第一行)及所在的列(第一列)而得到二阶行列式.同样,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为 a_{12} 的余子式,它由划去 a_{12} 所在的行(第一行)及所在的列(第二列)而得到二阶行列式.a_{13} 的余子式为$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$,它由三阶行列式划去第一行及第三列得到二阶行列式.

例 4 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 利用展开式计算,得

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 15 - (-12) + 10 - 12 - 2[8 - (-12)] = -15. \end{aligned}$$

例 5 已知 $D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$,求 a 值.

解 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3.$$

由于 $D=0$，所以 $a=1$ 或 $a=3$.

用三阶行列式解三元线性方程组，若分别记三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

如果方程组(1-4)的系数行列式 $D\neq 0$，那么方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

在方程组(1-4)的解的表达式中，$x_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 的分母均是(1-4)的系数行列式 D，x_i 的分子是把系数行列式的第 i 列换成方程组(1-4)中的常数项，其余列不动所得到的行列式.

上面我们运用了二阶、三阶行列式，在一定的条件下给出了二元线性方程组和三元线性方程组的公式解. 我们希望用同样的方法在某种条件下给出 n 元线性方程组的公式解，为此我们引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 阶行列式

我们可以有多种方法将二阶、三阶推广到 n 阶行列式. 这里我们采用归纳的方法，用低阶行列式来定义高阶行列式. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-5}$$

它由 n 行 n 列元素(共 n^2 个元素)组成，称之为 n **阶行列式**. (1-5)式代表一个由确定的运算关系所得到的确定的数，其值规定为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j}(j=1,\ \cdots,\ n)$ 是带有负号 $(-1)^{1+j}$ 的 $n-1$ 阶行列式，即

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{1j} 的**代数余子式**.

例如,5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

D 的第一行和第一列的元素 a_{11} 的代数余子式等于

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

D 的第三行和第四列的元素 a_{34} 的代数余子式等于

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

例 6 计算五阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 由定义

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}+6\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}+7\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+6\times3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+6\times7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}$$

$$=6\times20+7\times0-18\times0+42\times0=120.$$

例 7 计算：

$$D=\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&e&f&0\\g&0&0&h\end{vmatrix}.$$

解 由定义，得

$$D=a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}c&d&0\\e&f&0\\0&0&h\end{vmatrix}+b\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&c&d\\0&e&f\\g&0&0\end{vmatrix}$$

$$=a\times\left[\left(c\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}f&0\\0&h\end{vmatrix}\right)+d\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}e&0\\0&h\end{vmatrix}\right]$$

$$-b\times\left[\left(c\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&f\\g&0\end{vmatrix}\right)+d\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&e\\g&0\end{vmatrix}\right]$$

$$=acfh-adeh-bcfg+bdeg.$$

通过上面例题的计算，我们体会到，第一行的零元素越多，它的计算就越简单.

利用行列式定义我们可以计算得到下列几种特殊的 n 阶行列式的值：

主对角线以上(下)的元素都为零的行列式称为**下(上)三角形行列式**.

例 8 计算下三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 $$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

上式行列式称为**对角行列式**.

1.2 行列式的性质

在上一节里,我们引进了 n 阶行列式的概念,但仅运用行列式的定义来计算行列式的值是比较麻烦的.特别是当行列式的阶较大时,计算量迅速增加.因此有必要来研究行列式的性质,使实际计算成为可能.

下面介绍 n 阶行列式的性质.

性质 1 互换行列式的任意两行(或列),行列式仅改变符号.

例如,对二阶行列式互换两列,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

性质 2 若行列式中某两行(或列)对应元素相同,则此行列式的值为零.

例如,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

因为若交换 D 中第 1, 2 行,则有 $D=-D$, $2D=0$,所以 $D=0$.

性质 3 行列式中某行(或列)的各元素有公因子时,可把公因子提到行列式符号前面[或用数 k 乘行列式某行(或列)各元素,等于用 k 乘此行列式].

例如,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1 若行列式有一行(或列)的各元素都是零,则此行列式的值等于零.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

推论 2 若行列式有两行(或两列)对应元素成比例,则此行列式的值等于零.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 若行列式中某一行(或列)是两组元素的和,则此行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组元素之一为相应行(或列),而其余各行(或列)不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 把行列式的某一行(或列)的各元素分别乘以常数 k 后加到另一对应元素上去,则行列式的值不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式等于它的任意一行(或列)的各元素与对应的代数余子式的乘积之和.

例如,三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

按第 i 行展开为 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$,

按第 j 列展开为 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

性质 7 行列式中,任一行(或列)各元素与另一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

例如,在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,有 $a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0$.

对三阶行列式,利用性质 6 和 7 可以合写成

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \begin{cases} D, \text{当 } i = j \text{ 时}; \\ 0, \text{当 } i \neq j \text{ 时} \ (i, j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

或