徐世震 著

递推数列的特征方程

浙江大学出版社

内 容 提 要

递推数列问题，一般分类纷杂，解法多变。本文则提出崭新思路，方法既巧，过程又简，特别是推荐的解法具有一统性。

本书共分六章。第一至第四章介绍各类递推式问题的一统解法，建立了简易的一统求解公式；第五章重点介绍递推式典型化理论的应用；第六章拓展对数列的认识。

本书立论新，且通过大量范例，由浅入深，循序渐进，使读者接受易、理解深。适用于对数列有所了解的各类中等学校的学生，也是大专院校低年级学生的一本颇有价值的参考书。

递推数列的特征方程

徐世震 著

责任编辑 陈晓嘉

* * *

浙江大学出版社出版

德清雷甸印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

787×1092 32开本 4.5印张 102千字

1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数00001～7150

ISBN 7-308-00492-9

O·073 定价：1.65元

代　　序

求解数学问题，贵在创新，《递推数列的特征方程》是符合这一要求的。

该书是《数学解题新思路丛书》的分册之一。丛书分册已出版的有《反演证法初步》，今后将继续出版《初等对称变换》、《均值代换》等。

该书作者积累了实践经验，高屋建瓴提出新看法，这种开拓精神值得倡导。各类中等学校、大专院校的学生，细读此书，定有裨益。

祝愿此书在广大读者的爱护、帮助下，进一步充实提高，再版或汇总付梓时能有新进展。

管志成识于浙江大学求是村

1989年9月

目　　录

第一章　递推数列的特征方程

为了探讨递推数列的解法规律，我们将引进一个新概念——递推数列的特征方程。

§1　线性分式递推式问题的传统解法

定义1.1　形如 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$（$p,q,r,s$为常数且$r\neq 0$）的递推式，称为线性分式递推式。

线性分式递推式问题的传统解法，最常见的是借助辅助数列通过倒数代换（简称倒代换）而解之。

例1.1　已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=-\dfrac{a_n+4}{a_n+3}$，且$a_1=1$，

求 a_n。

解　设$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$（*），则 $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+2}$，

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}}=a_{n+1}+2=-\frac{a_n+4}{a_n+3}+2$$

$$=\frac{a_n+2}{(a_n+2)+1}=\frac{1/b_n}{1/b_n+1}=\frac{1}{b_n+1},$$

$\therefore\quad b_{n+1}=b_n+1$，

$\because$　数列$\{b_n\}$成$A\cdot P$，其公差$d=1$，其首项为

$$b_1=\frac{1}{a_1+2}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\times 1=\frac{3n-2}{3},$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{7-6n}{3n-2}.$$

例1.2 已知数例$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$,且$a_1=2$,求$a_n$。

解法一 设$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ (*),则 $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$,

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{a_n-2}{a_n+4}+1=\frac{2(a_n+1)}{a_n+4}$$

$$=\frac{2\times 1/b_n}{1/b_n+3}=\frac{1}{(3/2)b_n+1/2},$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)\quad (**)$$

$\therefore$ 数列$\{b_n+1\}$成$G\cdot P$,其公比$q=3/2$,其首项为

$$b_1+1=\frac{1}{a_1+1}+1=\frac{4}{3},$$

$$\therefore\quad b_n+1=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

$$b_n=\frac{3^{n-2}-2^{n-3}}{2^{n-3}},$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2^{n-2}-3^{n-2}}{3^{n-2}-2^{n-3}}.$$

解法二 设$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ (*)，则 $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+2}$

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}}=a_{n+1}+2=\frac{a_n-2}{a_n+4}+2=\frac{3(a_n+2)}{a_n+4}$$

$$=\frac{3\times(1/b_n)}{(1/b_n)+2}=\frac{1}{(2/3)b_n+(1/3)},$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3},$$

$$\therefore\quad b_{n+1}-1=\frac{2}{3}(b_n-1)\quad (**)$$

$\therefore$ 数列$\{b_n-1\}$成$G\cdot P$，其公比$q=2/3$，其首项为

$$b_1-1=\frac{1}{a_1+2}-1=-\frac{3}{4},$$

$$\therefore\quad b_n-1=-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$b_n=\frac{3^{n-2}-2^{n-3}}{3^{n-2}},$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2^{n-2}-3^{n-2}}{3^{n-2}-2^{n-3}}.$$

说明 在例1.1与例1.2的解法中，带有(·)或(··)者是问题获得解的关键所在。

带有(·)的辅助数列是怎样想到的？是否有一定的章法可以遵循？

带有(··)的等式两端添加上去的常数又是怎样想到的？是否也有一定的章法可以遵循？

你认为是由观察试探而得出的吗？这就反映出你尚未领悟上面解法的真谛。请仔细阅读下一节内容，它能帮助你洞悉其中的奥秘。

§2 递推数列的特征方程与特征根

建立递推数列的特征方程与特征根概念，有利于探索§1中所介绍的传统解法的奥秘，同时也为后面的一统解法奠定理论基础。

定义1.2 将数列递推式中的$a_{n+t}(t\in Z)$代换为x后所得的关于x的方程，称为该数列的特征方程；此特征方程的根，称为该数列的特征根。

（1）例1.1再探

若将递推式

$$a_{n+1}=-\frac{a_n+4}{a_n+3}$$

变换为

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=-\frac{a_n+4}{a_n+3}-\alpha\\&=\frac{-(1+\alpha)a_n-(4+3\alpha)}{a_n+3}\\&=\frac{-(1+\alpha)[a_n+(4+3\alpha)/(1+\alpha)]}{a_n+3}\end{aligned}$$

式中α为实数。令$\dfrac{4+3\alpha}{1+\alpha}=-\alpha$，则得

$$\alpha^2+4\alpha+4=0 \qquad \cdots\cdots①$$

解①得

$$\alpha=-2(\text{重根}) \qquad \cdots\cdots②$$

由①知α为方程$x^2+4x+4=0$的根。

再者，根据定义1.2可得数列$\{a_n\}$的特征方程

$$x=-\frac{x+4}{x+3},$$

化简整理得$x^2+4x+4=0$。

由此可知，②中的$\alpha=-2$即为数列$\{a_n\}$的特征根。

（2）**例1.2**再探

若将递推式

$$a_{n+1}=\frac{a_n-2}{a_n+4}$$

变换为

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{a_n-2}{a_n+4}-\alpha$$

$$=\frac{(1-\alpha)[a_n-(2+4\alpha)/(1-\alpha)]}{a_n+4}$$

其中α 为实数。令$\dfrac{2+4\alpha}{1-\alpha}=\alpha$，则得

$$\alpha^2+3\alpha+2=0 \qquad \cdots\cdots①$$

解①得

$$\alpha=-1\text{或}\alpha=-2 \qquad \cdots\cdots②$$

由①知α为方程$x^2+3x+2=0$的根。

再者，根据定义1.2可得数列$\{a_n\}$的特征方程

$$x=\frac{x-2}{x+4},$$

化简整理得

$$x^2+3x+2=0.$$

由此可知，②中的$a=-1$或$a=-2$即为数列$\{a_n\}$的特征根。

建立了递推数列的特征方程与特征根的概念，我们所介绍的传统解法中带有(*)或(**)处的奥秘，不是昭然若揭了吗？

§3 等差数列与等比数列解法共性探秘

3.1 常系数递推式与变系数递推式

定义1.3 数列的递推式中，若含$a_{n+t}(t\in Z)$各项的系数均为常数，则称该递推式为常系数递推式。

众所周知，由常系数递推式

$$a_{n+1}=a_n+d \quad (d\text{为常数})$$

所确定的数列$\{a_n\}$是等差数列。

由常系数递推式

$$a_{n+1}=qa_n \quad (q\text{为常数，且}q\neq 0)$$

所确定的数列$\{a_n\}$是等比数列。

等差数列和等比数列是最基本的两类递推数列。

又如递推式

$$a_{n+1}=3a_n+3^n$$

中的3^n并不是常数，根据定义1.3可知，它仍是常系数递推式。

定义1.4 数列的递推式中，若含$a_{n+t}(t\in Z)$各项的系数不都是常数，则称该递推式为变系数递推式。

递推式

$$(n+1)a_{n+1}-na_n-2=0$$

就是变系数递推式的一例。

3.2 等差数列与等比数列解法变通

常系数递推式

$$a_{n+1}=a_n+d \quad (d\text{为常数，且}a_1\neq d) \qquad \cdots\cdots①$$

所确定的等差数例$\{a_n\}$的通项求法，一般数学课本已详细阐述。这里从另一角度进行探索，并以此揭示等差数列与等比数列的解法变通。

显然，①可变换成常系数的另一形式

$$a_{n+1}-d(n+1)=a_n-nd\,,$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}-d(n+1)}{a_n-nd}=1\,,$$

$\therefore$ 数列$\{a_n-nd\}$成$G\cdot P$，其公比$q=1$，其首项为a_1-a。

$$\therefore \quad a_n-nd=(a_1-d)\times 1^{n-1}\,,$$

$$\therefore \quad a_n=a_1+(n-1)d\,.$$

这就揭示了：可将刻划等差数列$\{a_n\}$的递推式变换成刻划等比数列$\{a_n-nd\}$的递推式。为此，有关等差数列求通项或和的问题，必然可以变通后纳入等比数列的范畴。

再者，常系数递推式

$$a_{n+1}=qa_n \quad (q\text{为常数，且}q\neq 0,\ a\neq 0)$$

所确定的是等比数列，

当$a_1>0$，$q>0$时，数列$\{a_n\}$是正项数列，则可变换成常系数的另一形式

$$\lg a_{n+1}=\lg a_n+\lg q \qquad \cdots\cdots②$$

②所刻划的数列$\{\lg a_n\}$是等差数列，其公差$d=\lg q$，其首

项为$\lg a_1$；从而可由等差数列求通项，则为

$$\lg a_n = \lg a_1 + (n-1)\lg q,$$

$$\therefore\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

当$a_1<0$，$q>0$时，则可仿上先求$|a_1|>0$，$q>0$时的通项，最后再冠以负号即可。

当$a_1>0$(或$a_1<0$)、$q<0$时，同样仿上先求$a_1>0$(或$|a_1|>0$、$|q|>0$时的通项，最后冠以$(-1)^{n-1}$〔或$(-1)^n$〕即可。

如此也就揭示了：可将刻划等比数列的递推式变换成刻划等差数列的递推式。为此，有关等比数列求通项或和的问题，必然可以变通后纳入等差数列的范畴。

解题思路迥然相异的等差数列与等比数列两类问题，以递推式为纽带，其解法则可在变通中求得一统。

第二章　线性分式递推式问题解法一统

满足线性分式递推式的数列，其通项的求法可以一统于一种有规律性的解法，根本没有必要面对各个问题冥思苦想以觅求各自相异的解题思路。

数列的特征根与通项结构式之间，存在着有机联系，如果把握这方面的微妙联系，那么就能十分敏捷地将各个问题统一于雷同的思路而正确求得答案。

§1　简易的一统解法

定理2.1　由线性分式递推式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\quad (p,q,r,s\text{为常数，且}r\neq 0)$$

所确定的数列$\{a_n\}$，其通项结构式为：

1°当特征根为重根时，

$$a_n=\frac{\alpha\cdot n+\beta}{n+\delta}\quad (\alpha\text{为特征根，}\beta,\delta\text{为特定的实数})；$$

2°当特征根为单根时，

$$a_n=\frac{\alpha\cdot\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1}+\beta}{\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1}+\delta}\quad (\alpha\text{为特征根，}\beta,\ \delta\text{为}$$

待定的实数）。

证 首先证明特征根$\alpha \neq 0$时的情形。

$\because \quad a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的特征方程为

$$x=\frac{px+q}{rx+s},$$

$$rx^2+(s-p)x-q=0,$$

设特征根为α，则得

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha=\frac{(p-r\alpha)a_n-\alpha s+q}{ra_n+s}$$

$$=\frac{p-r\alpha}{r}\cdot\frac{a_n-(\alpha s-q)/(p-r\alpha)}{a_n+(s/r)}$$

$$\cdots\cdots①$$

$\because \alpha$是数列$\{a_n\}$的特征根，

$$\therefore r\alpha^2+(s-p)\alpha-q=0,$$

$$\therefore -(p-r\alpha)\alpha+\alpha s-q=0,$$

$$\therefore \alpha=\frac{\alpha s-q}{p-r\alpha} \qquad \cdots\cdots②$$

将②代入①得

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{p-r\alpha}{r}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n+(s/r)}$$

$$=\frac{p-r\alpha}{r}\cdot\frac{1}{1+[(s/r)+\alpha]/(a_n-\alpha)},$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{r}{p-r\alpha}\left(1+\frac{(s/r)+\alpha}{a_n-\alpha}\right)$$

$$= \frac{\text{[illegible]}\, r}{p - r\alpha} + \frac{s + r\alpha}{p - r\alpha} \cdot \frac{1}{a_n - \alpha}$$

……③

1° 当α为重根时，

$$\alpha = \frac{p - s}{2r}$$

$\therefore s + r\alpha = p - r\alpha,$

$\therefore \dfrac{s + r\alpha}{p - r\alpha} = 1,$

从而由③可知，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n - \alpha}\right\}$成$A \cdot P$，其公差$d = \dfrac{r}{p - r\alpha}$，其首项为$\dfrac{1}{a_1 - \alpha}$；

设首项$\dfrac{1}{a_1 - \alpha} = b_1$，

$$\therefore \frac{1}{a_n - \alpha} = b_1 + (n-1)\,d,$$

$$\therefore a_n - \alpha = \frac{1}{(n-1)d + b_1},$$

$$\therefore a_n = \frac{(n-1)d\alpha + \alpha b_1 + 1}{(n-1)d + b_1}$$

$$= \alpha \cdot \frac{n - 1 + b_1/d + 1/\alpha d}{n - 1 + b_1/d} \quad (\because \alpha \neq 0)$$

……④

令$\beta_1 = -1 + \dfrac{b_1}{d} + \dfrac{1}{\alpha d}$，　$\delta = -1 + \dfrac{b_1}{d}$代入④，从而

通项结构式呈现的形式为

$$a_n=\alpha\cdot\frac{n+\beta_1}{n+\delta}\quad(\alpha\neq0),$$

即 $$a_n=\frac{\alpha\cdot n+\beta}{n+\delta}\quad(\text{其中}\beta=\alpha\cdot\beta_1)$$

2° 当α为单根时，由③可得

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha}$$

$$=\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\left(\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha}\right),$$

$\therefore$数列$\left\{\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha}\right\}$成$G\cdot P$，其公比为

$\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}$，其首项为

$$\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha},$$

设首项为 $$b_1=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha},$$

$$\therefore\frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{r}{s-p+2r\alpha}=b_1\cdot\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1},$$

$$\therefore a_n-\alpha=1\Big/\left[b_1\cdot\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1}-\frac{r}{s-p+2r\alpha}\right],$$

$$\therefore a_n=\alpha\cdot\frac{\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1}-\frac{r}{(s-p+2r\alpha)b_1}+\frac{1}{\alpha b_1}}{\left(\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}\right)^{n-1}-\frac{r}{(s-p+2r\alpha)b_1}}$$

$(\because\alpha\neq0)$ ……⑤