

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

代数 (第二册)



北京教育出版社

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

代 数

第二册

北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识代数第二册
北京实验中学数学教研室编

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
新华书店北京发行所发行
北京市房山区印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 5.625印张 121,000字

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数 1—8,300

ISBN 7-5303-0037-7/G·31

定 价： 1.60 元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请了北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，习题和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础知识和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错、常混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导，对解题的思路、方法、技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识代数》第二册，可以作为在校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的教学参考书。

《初中数学基础知识》编写组成员是北京师范大学附属实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任孝娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，欢迎读者批评指正。

目 录

第五章 二元一次方程组	1
一、内容提要.....	1
二、重点、难点解析.....	2
1. 二元一次方程.....	2
2. 二元一次方程的解.....	3
3. 怎样求二元一次方程的解.....	3
4. 二元一次方程的解与一元一次方程解 的不同.....	5
5. 二元一次方程组.....	6
6. 二元一次方程组的解.....	6
7. 用代入消元法及加减消元法解二元一 次方程组.....	7
8. 二元一次方程组解的情况.....	13
9. 三元一次方程.....	14
10. 三元一次方程组.....	14
11. 列方程组解应用问题.....	19
三、典型例题.....	24
习题五.....	33
自我检查题五.....	37
第六章 整式的乘除	39
一、内容提要.....	39
二、重点、难点解析.....	40

1. 幂	40
2. 幂的运算	40
3. 单项式与单项式的乘法	43
4. 单项式的乘方	44
5. 单项式与多项式的乘法	44
6. 多项式与多项式的乘法	45
7. 乘法公式	46
8. 单项式除以单项式	50
9. 多项式除以单项式	50
10. 多项式除以多项式	51
三、典型例题	52
习题六	62
自我检查题六	67
第七章 因式分解	69
一、内容提要	69
二、重点、难点解析	69
1. 因数与因式	69
2. 因式分解	69
3. 因式分解的基本方法	71
4. 综合运用各种方法对多项式进行因式 分解	86
三、典型例题	88
习题七	100
自我检查题七	103
第八章 分式	105
一、内容提要	105
二、重点、难点解析	106

1. 什么是分式	106
2. 分式的基本性质	107
3. 分式、分子、分母的变号法则	107
4. 分式的约分	108
5. 分式的通分	110
6. 分式的加、减、乘、除及四则运算	112
7. 繁分式	114
8. 分式方程	116
三、典型例题	118
习题八	144
自我检查题八	150
* 把一个分式化成部分分式	152
* 方程组的同解性	158
答案或提示	161

第五章 二元一次方程组

一、内 容 提 要

在第一册中，我们已经学习了一些有关方程的知识。在此基础上，本章介绍了二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组、二元一次方程组的解等概念及二元一次方程组的解法，再进一步学习解三元一次方程组，并对多元方程组的解法也可以有所了解。

一次方程组这个概念，最早见于我国古代的《九章算术》，是我国古代数学方面的杰出成就之一，至少比欧洲早一千五百年。

本章的主要内容分为四个部分：

(1) 正确理解二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组、二元一次方程组的解等概念。

(2) 二元一次方程组的解法。

(3) 三元一次方程组。关于三元一次方程组的解法在思路上一不会感到困难，但系数稍繁时出错率较高，因此在解题中要注意每步的合理运算。

(4) 布列方程解应用题时，要注意运用二元一次方程组的知识，进一步提高分析问题解决问题的能力。

本章教材的重点是二元一次方程组的解法和列方程组解应用题。

二元一次方程组是最简单的整式方程组，其解法的实质

是将二元方程经消元转化为一元一次方程而得解。这种转化是解决数学问题的一种重要方法。布列方程解应用题，需要根据问题中的数量关系列出二元一次方程组，然后解二元一次方程组，作出问题的解答。

本章内容难点是列方程解应用题，因为要根据问题中的条件，列出适当而且正确的方程，再根据方程组求解，所以怎样布列方程组是解应用问题的关键，列方程需要把题目中的已知量与未知量之间的关系表示为等式，这种联系有时很明显，仅用数学语言表示出来就行了；但是在很多实际问题中已知量与未知量的关系不能直接表示，而要组成方程组。

对于解决字母系数的二元一次方程组不作重点，本章仅作些初步介绍，以便今后学习讨论及解决含有字母系数的应用题有用。

二、重点、难点解析

1. 二元一次方程

含有两个未知数，并且含有未知数项的次数都是一次的方程叫做二元一次方程。

二元一次方程的标准形式是 $ax + by = c$ （其中 a, b, c 表示常数，且 $a \neq 0, b \neq 0$ ），如 $x + y = 2$ ； $\frac{2}{3}x - 2y = 0$ 等都是二元一次方程，方程 $x^2 - y = 0$ ； $xy = 4$ ； $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ 是二次方程或分式方程而不是二元一次方程。

2. 二元一次方程的解

能够适合于一个二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解，“适合于”是指使二元一次方程两边的值相等。例如以 $x=1, y=1$ 代入方程 $x+y=2$ 。左式 $=1+1=2$ ，右式 $=2$ 。 $x=1, y=1$ 是方程 $x+y=2$ 的一个解，表示为 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 而将 $x=8, y=3$ 代入式子 $x-y=8-3=5 \neq 6$ ，因此 $x=8, y=3$ 不是方程 $x-y=6$ 的解。

例 检验以下各对数 (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases}$ 是不是方程 $3x+2y=5$ 的解。

解 (1) 以 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 代入方程。

左式 $=3 \times 1 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5 =$ 右式。

(2) 以 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1 \end{cases}$ 代入方程。

左式 $=3 \times 2 + 2 \times (-1) = 6 - 2 = 4 \neq$ 右式。

经验算 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程 $3x+2y=5$ 的解。而 $x=2, y=-1$

不是方程 $3x+2y=5$ 的解。

检查一对数是不是一个二元一次方程的解，就将这一对数代入原方程，看看能不能适合于方程，适合就是方程的解，不适合就不是方程的解。

3. 怎样求二元一次方程的解

例 求方程 $x-2y=3$ 的解。

可先确定 x 的一个值, 比如设 $x=2$, 以 $x=2$ 代入 $x-2y=3$, 得 $2-2y=3$, 这是一个一元一次方程, 解这个方程, 得 $y=-\frac{1}{2}$. $x=2, y=-\frac{1}{2}$ 适合于方程, 所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 是这个方程的一个解.

也可以先确定一个 y 值, 比如 $y=2$, 以 $y=2$ 代入 $x-2y=3$, 得 $x-2\times 2=3$, 解出 $x=7$, 所以 $\begin{cases} x=7, \\ y=2 \end{cases}$ 是方程的一个解.

另外也可以先将原方程变形, 将一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示, 例如可将方程 $x-2y=3$ 化成 $x=2y+3$, 这叫做把 x 用含有 y 的代数式表示, 这时可给定一个 y 值, 代入代数式 $2y+3$ 就可以求出 x 值. 比如设 $y=1$, 将 $y=1$ 代入 $x=2y+3=2\times 1+3=5$. 所以 $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程的一个解. 同理把方程 $x-2y=3$ 中的 y 用含 x 的式子表示也是可以的.

把一个二元一次方程变形, 将一个未知数用含另一个未知数的代数式表示, 不论用 x 表示 y 还是用 y 表示 x , 从理论上来说都可以求解, 但在实际运算中却有繁简之分. 比如方程 $x-2y=3$ 可以化成 $x=2y+3$ 与 $y=-\frac{1}{2}(3-x)$, 两式相比较, 前式为整系数, 后式为分数系数, 很显然前者在运算上比较简便, 所以在变形过程中, 一般首选系数为1的未知数来表示, 如果两个未知数系数都不是1, 那么一般选较小系数的未知数来表示.

例 将下面各方程变成一个未知数用另一个未知数的代数式表示的形式, 并求出各方程的三个解.

$$(1) x - y = 1; \quad (2) 2x + y = 3; \quad (3) 3x - 2y = 7.$$

解 (1) 将方程 $x - y = 1$ 变形 成 $x = y + 1$. 当 $y = 0, 1, 2$ 时分别代入上式, 依次得 $x = 1, 2, 3$, 所以方程的三组解是

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

(2) 将方程 $2x + y = 3$ 变形 成 $y = 3 - 2x$. 当 $x = -2, -1, 0$, 时分别代入上式, 依次得 $y = 7, 5, 3$, 所以方程的三组解是

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases}$$

(3) 将方程 $3x - 2y = 7$ 变形 成 $x = \frac{2y+7}{3}$. 当 $y = -1, 0, 1$, 时分别代入上式, 依次得 $x = 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3$.

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 1\frac{2}{3}, \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\frac{1}{3}, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases} \text{ 是方程的三组解.}$$

4. 二元一次方程的解与一元一次方程解的不同

由于二元一次方程中的一个未知数可以取任何数, 而以每取得的一个值代入原方程都可以求出另外一个未知数对应的值, 因此对于每一个二元一次方程都可以有无限多组未知数的值满足于方程, 即每一个二元一次方程都有无限多组解, 而一个一元一次方程一般只有一个解. 这是一元一次方程与二元一次方程解的不同点.

5. 二元一次方程组

由几个方程组成的一组方程，叫方程组。那么，由含有两个相同未知数的二元一次方程组成的一组方程叫二元一次方程组，例如 $2x - 3y = 4$ 与 $3x - 2y = 7$ ，就可以组成一个二元一次方程组。方程组可以写成 $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ 的形式。由定义可知“含有两个”是含相同两个未知数，并且两个方程均为一次方程。再如 $2x + y = 4$ 与 $3x - 2y = 1$ ， $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}y = 5$ 与 $3\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3}y = 1$ 就都可以组成二元一次方程组。而方程 $2x + y = 4$ 与方程 $3y - z = 7$ 尽管每一个方程都只含两个未知数，但两个方程所含未知数不全相同，这就不能组成二元一次方程组。

6. 二元一次方程组的解

在二元一次方程组里，每一个方程都有无限多组解，这两个方程的公共解叫做这个方程组的解。也就是说方程组的解须为同时满足于两个方程的未知数的值。

例如，方程组 $\begin{cases} x + y = 3, (1) \\ x - y = 1 (2) \end{cases}$ 中，

方程（1）的解有

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \end{cases} \dots\dots$$

方程（2）的解有

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \dots\dots$$

其中 $x=2$, $y=1$ 是方程(1)的解也是(2)的解, 所以 $x=2$, $y=1$ 是方程组内两个方程的公共解, 记为 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是这个方程组的解。

由定义可知检验一对数是不是方程组的解, 只要将这对数代入方程组里的每个方程进行验算, 如果这对数是每个方程的解, 那么这对数就是方程组的解。

7. 用代入消元法及加减消元法解二元一次方程组

解方程组: 求方程组的解的过程叫解方程组。

怎样求方程组的解呢? 我们不能像上面的问题那样对每一个方程都列出一串解, 然后去寻找它们的公共解。既费时费力又不一定能找到。

用代入消元法解二元一次方程组的一般步骤是:

(1) 把一个方程里的一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示出来。

(2) 把这个代数式代入另一个方程, 消去一个未知数, 得到含有另一个未知数的一元一次方程。

(3) 解这个一元一次方程, 求出一个未知数的值。

(4) 把求得的这个未知数的值代入第一步所得的方程中, 求出另一个未知数的值。

(5) 把这两个未知数的值写在一起, 就是这个方程组的解。

例1 解方程组 $\begin{cases} y=3x, & (1) \\ x+y=4. & (2) \end{cases}$

分析：两个方程中的同一个未知数代表的是相同的数值，也就是说（1）与（2）中 x 代表同一个数值， y 也代表相同的数值，所以（1）中 $y=3x$ 的关系在（2）中也同样存在，因此可以将（1）中 $y=3x$ 的关系代入（2）中，经代入以后，二元方程（2）变成了一元一次方程，只要解这个方程即可顺利求出一个未知数的值。

解 以（1）代入（2），得 $x+3x=4$ ，（3）

$$4x=4,$$

$\therefore$

$$x=1.$$

以 $x=1$ 代入（1），得 $y=3 \times 1=3$ 。

$\therefore \begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 是方程组的解。

$$y=3$$

以上解方程组过程中关键的一步是以（1） $y=3x$ 代入（2），从而使（2）由二元方程转化成了一元方程，这种解方程组的方法叫代入消元法，简称为代入法。

例2 解方程组 $\begin{cases} 3x-y=3; & (1) \\ 4x+3y=17. & (2) \end{cases}$

分析应用代入消元法，需要先将一个方程中一个未知数用含另一个未知数的代数式表示，由（1）可以化出两个式子，即 $y=3x-3$ 或 $x=\frac{1}{3}(y+3)$ ，由（2）也可化出两个式

子，即 $x=\frac{17-3y}{4}$ 或 $y=\frac{17-4x}{3}$ ，比较以上的四个式子，

式子 $y=3x-3$ 为整数系数，再加上原方程各项也是整系数，代入后运算比较简便，所以选 $y=3x-3$ 。

解 由（1）化成 $y=3x-3$ 。（3）

以（3）代入（2），得

$$4x + 3(3x - 3) = 17,$$

$$4x + 9x - 9 = 17,$$

$$13x = 26,$$

$$\therefore x = 2.$$

以 $x = 2$ 代入 (3), 得

$$y = 3 \times 2 - 3 = 3.$$

$\therefore \begin{cases} x = 2, \\ y = 3 \end{cases}$ 是原方程组的解.

例3 解方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 13, & (1) \\ 5x - 3y = 9. & (2) \end{cases}$

分析: 前面例题中 x, y 中有系数为 1 的, 而这个方程的 x, y 项系数当中没有一个是 1, 为了计算的方便, 一般情况下可选系数绝对值比较小些的 (或取系数为正的).

解 由 (1) 化成 $y = \frac{13 - 3x}{2}$. (3)

以 (3) 代入 (2), 得

$$5x - 3 \times \frac{13 - 3x}{2} = 9.$$

去分母, 得

$$10x - 3(13 - 3x) = 18,$$

$$10x - 39 + 9x = 18,$$

$$19x = 57,$$

$$\therefore x = 3.$$

以 $x = 3$ 代入 (3), 得

$$y = \frac{13 - 3 \times 3}{2} = \frac{13 - 9}{2} = 2.$$

$$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases} \text{ 是原方程组的解.}$$

用加减消元法解二元一次方程组的步骤是:

(1) 把一个方程或两个方程的两边乘以适当的数, 使两个方程里某一个未知数的系数的绝对值相等.

(2) 把所得的两个方程的两边分别相加或相减, 消去系数绝对值相等的未知数项, 得出含另一个未知数的一元一次方程.

(3) 解这个方程, 求得一个未知数的值.

(4) 用这个未知数的值代入方程组的任何一个方程, 求出另一个未知数的值.

(5) 小结, 答案写出方程组的解.

例 4 解方程组 $\begin{cases} x+y=2, & (1) \\ x-y=3. & (2) \end{cases}$

分析: 用加减消元法解方程组, 其根据是“在等式两边加上同一个数或同一个整式, 所得的仍是等式”, 这两个方程中含 y 项的系数正好是互为相反数, 所以可以将两个方程两边分别相加消去 y 项; 使这两个方程中含 x 项的系数完全相同, 也可以将两个方程的两边分别相减消去 x 项.

解法一 (1) + (2), 得 $2x=5$,

$$\therefore x=2\frac{1}{2}.$$

以 $x=2\frac{1}{2}$ 代入 (2), 得 $2\frac{1}{2} - y=3$,

$$y=-\frac{1}{2}.$$