

2007

陈仲主编
答案准确
解析到位

历年试题解析

硕士研究生入学考试
· 数学四

- 1994 年—2006 年 **13** 套全真试题逐题解析
- **考点提示+思路点拨+技巧评点**
- **考点提示** 试题内涵及隐含信息披露无遗
- **思路点拨** 抽象思路与具体解法尽陈案前
- **技巧评点** 解题诀窍与应试策略启迪无限
- 书后特附有《历年真题分类索引》

全国硕士研究生入学考试

历年试题解析

数学四

主编 陈 仲
编者 姜东平 陈华钧

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试数学历年试题解析(文科卷)/
陈仲主编. —6 版—北京:学苑出版社,2006.2
ISBN 7-5077-1793-3

I. 全... II. 陈... III. 数学-研究生-入学考试
-解题 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 09350 号

责任编辑:刘 涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社 址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100078
网 址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010-67675512、84560465
经 销:新华书店
印 刷 厂:北京通州皇家印刷厂
开本尺寸:850×1168 1/16
印 张:25.75
字 数:560千字
版 次:2006年2月北京第6版
印 次:2006年2月北京第1次印刷
印 数:0001—5000册
定 价:38.00元(共两册)

总前言

本套丛书是在“恩波考研辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下编写出版的。它以历年硕士生入学考试试题为基础,经过辅导专家的整理并作详尽解析而成,提供给广大考生备考复习使用,目的是帮助广大考生高效、有序地做好考前复习,从而取得理想的考试成绩。

本套丛书在编写过程中突出如下特点:

一、引导考生备考和复习 2006年参加考研的人数达到127.5万人,竞争之激烈可想而知。所以考研复习不能落入俗套,要有创新思想,既要寻找适合自己特点的路子,又要清醒地把握住自己复习的进程,做到临考不乱,胸有成竹。本套丛书有引导考生备考和复习的初衷,供广大考生参考。

二、总结考试特点和规律 公共课是考研成功道路上最大的障碍,大多数考生因公共课成绩未达到国家最低录取控制分数线,而使其考研成功的梦想破灭。经调查分析,其原因是考生在复习时没有抓住考试的特点和规律,结果误入歧途。本套丛书编写时将试题解析与大纲考点相结合,总结出考试特点和规律,而遵循考试特点和规律从事考前复习将使考生避免盲目性,达到有的放矢、事半功倍的效果。

三、预测命题思路和趋势 本套丛书的试题与解析按时间顺序排列,先试题后解析,目的是希望考生通过做真题,熟悉考试的内容和形式;通过试题解析加强对考点的认识,理清解题思路,了解考试的最新动态和发展趋势,并对照答案解析检查不足与差距。

使用本套丛书时,请不要直接看解析和答案,最好先测试一下自己的水平,按规定的时间做完,然后对照答案,给自己记分,通过对照分析试题规律和自己的不足,以确定自己的复习重点。一位恩波考研辅导班的学员曾深有体会地说:“认真做一套全真试题,并熟记全部考点和类型,其效率超过做两套模拟试题。”总之,考生在使用本套丛书时不要就题论题,而是要通过对历年考题的比较、对书中详尽解析和复习方法指导的把握,发现一些规律性的东西,使这些资料为我所用,从而提高自身水平,并轻松应对考试。

参加本套丛书编写工作的有陈仲、余术、姜东平、陈华钧、王锁明、周固等老师。

编写组

<http://www.enbobook.org>

2007 年数学考研指南	1
1994 年数学四试题与解析	5
1994 年数学四试题	5
1994 年数学四试题解析	8
1995 年数学四试题与解析	18
1995 年数学四试题	18
1995 年数学四试题解析	21
1996 年数学四试题与解析	30
1996 年数学四试题	30
1996 年数学四试题解析	33
1997 年数学四试题与解析	41
1997 年数学四试题	41
1997 年数学四试题解析	44
1998 年数学四试题与解析	53
1998 年数学四试题	53
1998 年数学四试题解析	56
1999 年数学四试题与解析	65
1999 年数学四试题	65
1999 年数学四试题解析	68

2000 年数学四试题与解析	80
2000 年数学四试题	80
2000 年数学四试题解析	83
2001 年数学四试题与解析	94
2001 年数学四试题	94
2001 年数学四试题解析	97
2002 年数学四试题与解析	109
2002 年数学四试题	109
2002 年数学四试题解析	112
2003 年数学四试题与解析	123
2003 年数学四试题	123
2003 年数学四试题解析	126
2004 年数学四试题与解析	137
2004 年数学四试题	137
2004 年数学四试题解析	141
2005 年数学四试题与解析	154
2005 年数学四试题	154
2005 年数学四试题解析	157
2006 年数学四试题与解析	173
2006 年数学四试题	173
2006 年数学四试题解析	177
历年试题分类索引	190

2007 年数学考研指南

近几年来,国家机关、企事业单位、各行各业对高素质、高能力、高学历人才的需求不断提高,也由于就业市场的竞争日趋激烈,促使不少大学毕业生选择考研接受继续教育的道路,希望学到更多的专业知识,提高学历,以增强自己的竞争力.国家的硕士生招生人数也逐年增加,2005 年 37 万人,2006 年将达 40 万人.约占当年本科毕业人数的 11% 左右.

硕士生入学数学统一考试是国家选拔高层次人才的水平考试,命题者将考试成绩的期望值设置在 75 ~ 80 分(总分 150 分)之间进行命题,试题面广量大,基础性强,难题较多,因此竞争力强,淘汰率高.

考试大纲

数学考试的命题是严格按照国家考试中心制定的“**数学考试大纲**”所规定的考试内容和考试要求进行的.该大纲对考试方法、试卷分类和适用专业详细阐明;对各卷考试内容、考试要求和试卷结构均一一详述,它不但是国家考试中心命题的指导性文件,也是广大考生复习迎考的惟一重要依据.每年的“考试大纲”都有变化,如 2004 年数学二增加了“多元函数微积分学”,并将选择题和填空题的考分比例由原来的 48 分增加到 56 分,总分 150 分不变.2005 年的“大纲”在“隐函数存在定理”,“平面曲线的切线方程与法线方程”等内容又作了修改,对样卷作了修订.“数学考试大纲”是必备材料,广大考生在复习时要好好研究“大纲”,经常对照“大纲”,明确考试范围和考试要求,了解分数分布,按“大纲”所指明的“了解”、“理解”、“掌握”等不同考试要求有重点地复习.

三轮复习

考研数学复习通常分三轮进行.第一轮,**重温教材,系统复习**.考生将自己在大学一年级时学习的课本认真复习,将自己过去的作业本看一遍,学过的东西抓起来往往容易一些.第二轮,**搜集资料,重点复习**.选择一、二本好的考研复习参考书,将有助于提高阶段的复习质量.现在市面上考研参考书琳琅满目,有的内容太杂,非常容易的基本题很多,非常难的不适合作考研题的题目也很多.一本差的参考书可能会误人子弟;一本好的考研参考书可以使你的复习更接近于考试的要求.此外,选择一个好的辅导班,在名师指导下,除系统复习外,更好地掌握数学方法,把握考研重点,提高应试水平,这也是一个明智的选择.在辅导层次上有些辅导班又分为基础班、提高班、强化班与冲刺班.一些基础不好的考生可选基础班和提高班(或强化班)两期,基础较好的考生可选择提高班(或强化班)和冲刺班两期,不要四期全部参加.辅导班只能助你一臂之力,不可能代替你的复习.听了辅导班之后还得消化、巩固,认真地、耐心地做一定量的习题.犹如学习游泳,老是听教练讲如何如何游,怎么也学不会,一定要自己下水去多练习才行.听课方法也大有学问,要多听,听懂,理解,能达到举一反三.第三轮,**模拟考研,实战演练**.

数学的概念和方法一般说来不是一、二遍就能学好的.必须多次反复、多次学习才能掌握.学会了还有个熟练的问题.如果在考试中,基本题不但会做,而且能较熟练地、比别人花较少的时间做对,你就有较多的时间去做难题,难的那怕做对一半也能使你的考分比别人高.

试题分析与解题指导

要收集与研究近几年的研究生入学考试试题,了解题型、题量,知道哪一类题是常考的,哪一类题是必考的,哪一类题是基本不考的.全国研究生入学统一考试的基本模式是稳定的,虽然每年都有一些新编的题目,但大量的题目还是老脸谱,甚至有相当一部分是雷同题.例如:

- (1) 2005 年数学一、数学二题(8) 与 1999 年数学一题二(1), 数学二题二(3);
- (2) 2004 年数学一题(18) 与 1996 年数学一题四(1);
- (3) 2003 年数学三(19) 与 2002 年数学一题七;
- (4) 2003 年数学一题四与 2001 年数学一题五;
- (5) 2001 年数学一题一(2) 与 1993 年数学一题一(4);
- (6) 2001 年数学一题六与 1997 年数学一题三(2);
- (7) 2001 年数学二题八与 1995 年数学一题五;
- (8) 2001 年数学三、数学四题三与 1997 年数学三题四;
- (9) 2001 年数学三、数学四题七与 1996 年数学三题六;
- (10) 2000 年数学三、数学四题九与 1991 年数学一题七;
- (11) 2000 年数学一题七与 1995 年数学一题一(4);
- (12) 2000 年数学三、数学四题五与 1991 年数学三题七;

关于考研试题的特点, 主要有下列四点:

第一, 研究生入学统一考试一直是以考查“三基”(即基本概念、基本理论和基本方法) 为主线的. 这些考查“三基”内容的基本题, 覆盖面广, 基础性强, 而且要求有一定的熟练程度. 基本题的主体是填空题和选择题, 统称为客观题, 它是考研的必考题型, 从 2004 年起, 其题量已稳定在填空题 6 道, 选择题 8 道, 每道 4 分, 共 54 分, 占总分的 37%, 在整份考研试卷中有着举足轻重的作用. 填空题分值少, 只写结果, 不写过程, 因此作答时要做到: 小题小做, 小题巧做, 运算准确, 书写规范. 选择题是一种标准化题型, 形式活泼新颖, 知识面宽, 综合性强, 技巧性高. 选择题做的好坏, 直接影响到整份试卷的解题速度. 解选择题有两个重要思路, 一是肯定 1 条, 二是排除 3 条. 下面介绍解选择题的常用方法.

1. 直接法. 从题设条件出发, 通过分析、计算、判断, 得到一个正确答案, 或从 4 个备选答案中挑选出一个给出正面证明, 这是解选择题最基本与常用的方法.

例如, 2004 年数学一题二(9): 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 下列结论中正确的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
- (B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
- (C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.
- (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

解析 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$ ($\lambda \neq 0$), 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 应用比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故

选(B). 若改用排除法, 欲举出反例否定其他三条, 难度将大大增加.

2. 排除法. 若从正面入手, 不易挑选出正确答案时, 可从反面入手, 逐一排除 3 个不正确的备选答案, 则剩下的一个(无须证明) 就是正确答案.

2002 年数学一题二(3) 与数学二题二(4) 是一道相同的选择題:

设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- (C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$.

解析 设 $f_1(x) = \frac{1}{x} \sin(x^2)$, 则 $f_1(+\infty) = 0$, $f_1(0+) = 0$, 但是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)$$

不存在, 故排除(A). 设 $f_2(x) = \sin x$, 则 $f_2(0+) = 0$, $f'_2(0+) = 1 \neq 0$, 故排除(C)和(D). 剩下的只有选(B)为正确答案了. 如果用直接法, 证明(B)是有一定难度的.

3. 验证法. 根据题设条件, 举一实例进行运算, 验证备选答案并从中选择.

例如, 1996 年数学一题二(4):

设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解析 设 $f(x) = x$, 则 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1 \neq 0$, 且

$$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) t dt = \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4},$$

于是 $F'(x) = x^3$, $k = 3$, 故选(C).

4. 图解法. 对于一些具有几何背景的考题, 可根据题给条件, 画出函数的图形, 并数形结合, 综合分析, 获取正确答案.

例如, 1997 年数学一题二(2)与数学二题二(2):

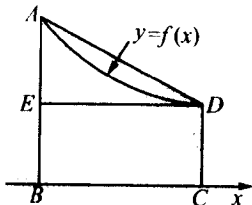
设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 令

$$S_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad S_2 = f(b)(b-a), \quad S_3 = \frac{1}{2} [f(a) + f(b)](b-a),$$
 则

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$. (B) $S_2 < S_1 < S_3$. (C) $S_3 < S_1 < S_2$. (D) $S_2 < S_3 < S_1$.

解析 根据题设条件, 知函数的图形特征是:

位于 x 轴上方, 严格减少, 下凸. 画出图形如右图. 则 S_1 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积, S_2 是矩形 $EBCD$ 的面积. S_3 是梯形 $ABCD$ 的面积. 由图得知 $S_2 < S_1 < S_3$, 故选(B).



第二, 每年都有考查灵活运用重要定理、重要公式的证明题. 除了要理解这些重要定理的条件、结论外, 还要针对具体情况灵活运用.

例如 2000 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同的证明题:

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

该题需用到高等数学的零点定理、定积分中值定理、罗尔定理. 有两种解法: 一是先用定积分中值定理, 推得 $f(x)$ 的一个零点, 再用反证法求得第二个零点; 二是构造辅助函数

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

设法对 $F(x)$ 两次应用罗尔定理推得 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有两个零点. 绝大部分考生用的是上述第一种方法, 上述第二种方法证明很简捷, 但使用此方法的考生极少.

又例如 1998 年数学一题九、数学二题八、数学三题六、数学四题七分别是应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题, 在证明中都要根据题意构造辅助函数, 这一点对许多考生而言是个难点, 要通过做一定数量的习题(包括一定比例的难题)才能做到.

第三, 每年都有一定量的应用题. 在考查“三基”的基础上, 对考生运用所学知识解决实际问题的能力进行考查, 在近几年的考研试题中有加强的趋势. 应用题包括几何与物理上的应用(如变力作功, 旋转体体

积,弧长,立体的重心等),还有与社会生活有关的其他专门设计的应用题,其中积分学和微分方程的应用是重点.对文科考生而言,应用导数或偏导数解经济问题中的极值应用题是重点.

例如 2004 年数学一题(16)同数学二题(20)是微分方程的应用题,求飞机滑行的最大距离;2003 年数学一题六是定积分与极限的综合应用题,求汽锤打桩的深度;2003 年数学二题九是定积分与微分方程的综合应用题,求容器侧壁的曲线方程;2001 年数学一题八同数学二题九是微积分的应用,求雪堆全部融化所需的时间;2001 年数学四题六是导数在经济上的应用,求利润的最大值.2000 年数学一题八是三重积分的应用题,求球体的重心坐标;2000 年数学三题五同数学四题五是多元函数极值(拉格朗日乘数法)在经济上的应用,求产品销售价格使利润取最大值.

第四,每年都有一定量的综合题.在近几年研究生入学试题中综合题也有加强的趋势.它要求考生将微积分、线性代数和概率统计这三部分的知识综合起来解题.这类题往往有一定难度,失分率大,要求考生所学知识融汇贯通,灵活运用.

例如 2005 年数学二题(15):

设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0) \neq 0$,求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

该题用到变上限积分的求导公式、洛必达法则、定积分中值定理、定积分的换元公式等.

又如 2000 年数学二题十一:

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t)dt = 0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明:当 $x \geq 0$ 时成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

该题是导数、积分、微分方程和导数的应用的综合题.

又如 1999 年数学三题一(5):

设随机变量 $X_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n; n \geq 2)$ 独立同分布, $E(X_{ij}) = 2$, 求行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y)$. 这是线性代数与概率统计的综合题.

考试艺术

考试时要遵循先易后难,遇难不慌,知一写一的原则.

硕士生入学考试是国家选拔高层次人才的水平考试,因此考试题中一定有难题,应试者一定会有不顺手的地方,这时应试者的心态是很重要的,如果遇难题就发慌,再遇难题就不知所措,严重影响甚至放弃后面的考试,那是一定考不好的.有这样的一个真实的例子,1998 年硕士生入学考试中有一位考生数学考了 38 分,其他 4 门都过线,总分超过分数线 15 分,结果落榜.该考生非常懊恼地回忆道:数学考试时很不顺手,几道题不会做,认为一定完了,就没有信心做余下的题,没想到最后数学单科的分数线是 40 分(注:数学单科的分数线 2002 年前一般在 50~55 之间,2003 年后一般在 75~80 分之间.)如果当时心态好一点,认真做余下的题,多拿 5~10 分一定没问题.广大考生应从这个例子中吸取教训,应试时会做的题,能拿分的题先解;难题或自己没有见过的题型要逐个攻克,能写几步写几步(评分是按步给分);没有把握的题,分析题意,估计用什么公式,写出有关的思路和公式有时也能得 1~2 分;有些题或一些解题步骤很难,得分又少,放到最后思考或者大胆地放弃;最后还一定要腾出时间复查一遍,纠正笔误或不足之处.如果能将有限的时间都花在能得分的解题上,达到高水平发挥,就一定能获得好成绩,实现自己的理想.

1994 年数学四试题与解析

1994 年数学四试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设方程 $e^{xy} + y^2 = \cos x$ 确定 y 为 x 的函数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 假设一批产品中一,二,三等品各占 60%, 30%, 10%, 从中随意取出一件, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内)

(1) 曲线 $y = e^{1/x^2} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 $\underline{\hspace{2cm}}$ ()

(A) 1 条.

(B) 2 条.

(C) 3 条.

(D) 4 条.

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 则方程

$$\int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$$

在开区间 (a, b) 内的根有

(A) 0 个.

(B) 1 个.

(C) 2 个.

(D) 无穷多个.

(3) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ()

- (A) 必有一个等于零. (B) 都小于 n .
(C) 一个小于 n , 一个等于 n . (D) 都等于 n .

(4) 设有向量组

$\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -2, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的极大线性无关组是 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$. (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$.

(5) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则 ()

- (A) 事件 A 和 B 互不相容. (B) 事件 A 和 B 互相对立.
(C) 事件 A 和 B 互不独立. (D) 事件 A 和 B 相互独立.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

四、(本题满分 5 分)

已知 $f(x, y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

六、(本题满分 8 分)

某养殖场饲养两种鱼, 若甲种鱼放养 x (万尾), 乙种鱼放养 y (万尾), 收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3 - \alpha x - \beta y)x \text{ 和 } (4 - \beta x - 2\alpha y)y \quad (\alpha > \beta > 0),$$

求使产鱼总量最大的放养数.

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线, 求

- (1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0) ;
(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S .

八、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 有导数, 且 $f(0) = 0, F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$. 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = \frac{1}{2} f'(0).$$

九、(本题满分 8 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足的条件.

十一、(本题满分 7 分)

假设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

现在对 X 进行 n 次独立重复观测, 以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数. 试求随机变量 V_n 的概率分布.

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动线加工的某种零件的内径 X (毫米) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 内径小于 10 或大于 12 的为不合格品, 其余为合格品. 销售每件合格品获利, 销售每件不合格品亏损. 已知销售利润 T (单位: 元) 与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & \text{若 } X < 10; \\ 20, & \text{若 } 10 \leq X \leq 12; \\ -5, & \text{若 } X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时, 销售一个零件的平均利润最大?

1994 年数学四试题解析

一、填空题

1. $\ln 3$.

考点提示 定积分的计算.

思路点拨 注意利用奇、偶函数在对称区间上的积分的性质.

【解】

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2} dx &= \int_{-2}^2 \frac{x}{2+x^2} dx + \int_{-2}^2 \frac{|x|}{2+x^2} dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 \frac{x}{2+x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2+x^2} d(2+x^2) = \ln(2+x^2) \Big|_0^2 = \ln 3.\end{aligned}$$

2. 1.

考点提示 函数的极限.

思路点拨 应用导数的定义.

【解】 先将分式颠倒:

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - x)}{x} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} \\ &= -2f'(x_0) + f'(x_0) = -f'(x_0),\end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x}} = -\frac{1}{f'(x_0)} = 1.$$

为应用 $f'(x_0)$ 的定义
引进辅助项

3. $-\frac{ye^{xy} + \sin x}{xe^{xy} + 2y}$.

考点提示 隐函数的导数.

思路点拨 利用一元隐函数的求导法.

【解】 视 $y = y(x)$, 在所给方程两端对 x 求导, 得 $e^{xy}(y + xy') + 2yy' = -\sin x$, 解得

$$y' = -\frac{ye^{xy} + \sin x}{xe^{xy} + 2y}.$$

技巧评点 也可利用公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

考点提示 逆矩阵.

思路点拨 可以利用初等行变换(解法 I),也可利用分块矩阵的求逆公式(解法 II).

【解】 解法 I

$$\begin{aligned} (AE) &= \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

解法 II

由分块矩阵的求逆公式 $\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$, 得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $\frac{2}{3}$.

考点链接 条件概率.

思路点拨 利用条件概率的定义.

【解】 设 A, B, C 分别表示任取一件产品是一、二、三等品的事件, 则 A, B, C 互不相容, 且 $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3, P(C) = 0.1, \bar{C} = A \cup B$. 所求概率为

$$P(A | \bar{C}) = P(A | A \cup B) = \frac{P\{A(A \cup B)\}}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3}.$$

二、选择题

1. 选(B).

考点链接 曲线的渐近线.

思路点拨 分别求铅直渐近线及非铅直渐近线.

【解】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = \infty$, 故有铅直渐近线 $x = 0$. 又因

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = 0,$$