高中数学会考水平测试与评析

GAOZHONG SHUXUE
HUIKAO SHUIPING
CESHI YU PINGXI

上海教育出版社

高中数学会考水平测试与评析

本书编写组

上海教育出版社

(沪)新登字107号

高中数学会考水平测试与评析
本书编写组
上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店发行　　江苏海安人民印刷厂印刷
开本787×1092　1/16　印张19　字数453,000
1993年2月第1版　1993年2月第1次印刷
印数1—8,800本
ISBN 7-5320-2902-6/G·2832　　定价：6.40元

前　言

为了使普通中学教育进一步适应改革、开放的新形势，国家教委在总结几年来考试改革实践的基础上，颁发了《关于〈关于试行普通高中会考制度的意见〉等两个意见的通知》，要求各省、市(直辖)、自治区积极、稳妥地普遍推广普通高中毕业会考制度. 这项考试制度改革的重大决策必将对普通中学的教学改革产生积极的影响. 实践表明：会考水平标准的编制以及会考与教学的关系等都是推行毕业会考制度所必须研究的课题. 我们编写《高中数学会考水平测试与评析》一书的目的，旨在向各地的考试研究人员、高中教师介绍我们对上海市 1988 年以来实施高中数学学科会考的实践与认识，对会考的内容、范围、目标与要求的理解，从一个侧面提供高中数学会考的研究资料.

本书分两大部分. 第一部分阐述了我们对编制高中数学水平测试的目标与试题的实践和认识，按现行教材的体系，分成十三单元，三十三节. 每一节又分“测试目标”、“水平测试”和“测试评析”三个栏目，为方便测试，把各节的水平测试卷集中编排在第二部分. 第二部分汇集了 1988～1991 年上海市普通高中会考数学试题，并进行分类评析，提出试题重点考查内容、水平要求以及在试卷中发现的常见错误，从一个侧面提供考试对于教学的反馈信息供读者参考和借鉴.

本书在编写过程中，注意以下几点：

1. “测试目标”，根据“上海市调整和使用委颁中学各科教学大纲的意见”和“1992 年上海市普通高级中学会考纲要”，对每一节的水平测试要求提出具体、明确、可测又可行的目标，以便于高中师生准确把握会考的内容、范围、目标和要求.

2. “水平测试”，是根据各节中“测试目标”提出的要求，按照会考应该达到的水平，在初步试验的基础上编制而成的，其中有 13 份单元水平测试卷(打*号者)和 2 份总结水平测试卷(打**者)供考查阶段或总体掌握水平时选用. 在编选每一份试卷时，力求做到要求恰当、层次清楚、重点突出并有适当的覆盖面，着眼于帮助学生全面而又扎实地打好基础. 除打*的测试卷外，每份试卷都分 A、B 两组，A 组满分 70 分，体现了高中数学的最基本要求，突出对基础知识、基本技能和基本方法的考查；B 组满分 30 分，体现了高中数学各部分内容之间的纵横联系，有一定的思维量，力求通过知识与技能的简单综合，提高学生的分析问题、解决问题的能力. 使用时可根据实际情况，选择其中部分测试卷，在规定的时间(一般为 45～60 分钟，打*者为 90 分钟)内测试，根据得分对自己的学习水平作出评价，以便及时反馈补正.

“测试评析”，对“水平测试”中涉及的基本概念，着重揭示概念之间的联系，指出容易混淆的地方. 对涉及的一些典型性较强的常见题型，着重解题思路的分析，对重要的常用方法和常见错误加以评析、归纳和小结，力求起到点拨思维的作用.

本书由周继光、姚善源、王伟华、胡泰泉、陈家驹等同志编写，由周继光同志统稿. 为使本书更贴近当前中学教学的实际，特邀卢湾区、闸北区部分近年任教高三数学课的金大正、林洞德、施家荣、李关煜、罗品林、曹乃全、章成斐、张晓蓉、石大杰、张启宇、龚柏泉、郑可蕊、喻玉衡、林大伟、李陕曾等同志提供部分水平测试题. 在本书的编写过程中，我们得到了上海

市教育考试中心潘永祥同志的大力支持和帮助，在此表示感谢.

我们希望使用本书的读者都有得益，但是限于水平，我们的意图未必都能实现. 又因为成书时间仓促，错误不当之处在所难免. 祈盼专家、同行及广大读者批评指正.

本书编写组

1992年3月

目　　录

1

2

1

一 集合与函数

§1 集　　合

[测试目标]

1．会用列举法和描述法表示一些简单的集合，会用区间表示实数集的特殊子集.

2．能正确选用适当的符号($\in$、$\notin$、$\subset$、$\subseteq$、$\supset$、$\supseteq$、$=$)表示元素与集合的关系或集合与集合的关系.

3．会直接应用集合的有关概念求一个集合的子集、真子集、补集以及两个简单集合的交集和并集.

[水平测试]

卷一(见本书第101页).

[测试评析]

1．要分清集合的有关符号．例如“$\in$”与“$\subset$”，前者表示元素与集合的关系，后者则表示集合与集合的关系．解卷一第一题时，首先要分清两边分别是元素还是集合，再考虑填适当的符号．如第9题中，$i^2=-1$，是实数集R的一个元素，所以应该填“$\in$”．而第10题中，$\{i^2\}$却表示一个单元集合，所以应填“$\subset$”．在表示集合与集合关系时，“$\subset$”和“$\subseteq$”也很容易混淆．如第4题，要求考虑$A\cap B$与A的关系，在一般情况下有$A\cap B\subset A$，但由于题中并没有明确指出A、B是怎样的两个集合，不能忽略$A\cap B$的特殊情况，此时有$A\cap B=A$，所以应填“$\subseteq$”号．同样解第5～7题时也不能疏忽其中的特殊情况.

2．集合的表示方法，常用的有列举法和描述法两种，对实数集或它的一些特殊子集还常用符号或区间来表示．如卷一的第二题，以及函数的定义域或值域，都可以用区间表示．对用列举法表示的已知集合，求交集、并集和补集时，注意元素不要多写，也不要漏写，相同的元素不能重复写，且不要忘记用{　}表示集合．在用描述法表示集合时，不要忘记在大括号内应先写上这个集合的元素的一般形式．如不要把集合$\{x|x<2\}$写成$\{x<2\}$．如果在表示元素的公共属性的式子中含有参数，要说明这个参数的范围．如三角中表示与90°角终边相同的角的集合应写成$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+90°,\ k\in Z\}$，不能漏掉$k\in Z$.

3．要区分一个集合的子集和真子集．如果A是B的子集，那么表示为$A\subseteq B$，这里有可能$A=B$，如果A是B的真子集，应表示为$A\subset B$，那么必有$A\neq B$，即集合B中至少有一个元素不属于A．求一个集合的子集和真子集(如卷一第三题)要特别注意：任何一个集合是它本身的一个子集．如$\{1,2\}\subseteq\{1,2\}$．又空集必定是任何非空集合的真子集．如$\varnothing\subset\{0\}$．要确定一个集合的子集或真子集的个数，可以用枚举法．如卷七第11题，一个元素的子集有3个，二个元素的子集也有3个，再加上空集也是它的子集，所以它共有7个真子集．此外，还可以用排列组合的知识解．这个集合的真子集的个数是$C_3^0+C_3^1+C_3^2=2^3-1=7$.

4．“交集”是两个集合的公共元素组成的集合，“并集”是两个集合中所有的元素(其中相同的元素只算一个)组成的集合，“补集”是对“全集”而言的，全集中不属于 A 的元素都属于 $\overline{A}$．当已知集合都是用不等式来描述的数集，要求它们的交集、并集或补集时，可以利用数轴解，这样既方便，又不容易出错．这里要特别注意集合中区间的“开”和“闭”，以避免“边界值”的遗漏和增添．如卷一第 31 题中，$\overline{A}=\{x|x\leqslant0\}$，$\overline{B}=\{x|x^2>4\}$．

集合的“文氏图”有助于对集合相互关系的理解．如卷一第 22 题，用阴影部分表示 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 后，可以直观地看出阴影部分也表示 $A\cap B$ 的补集，即 $\overline{A\cap B}$．因此有 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$．由此可见，利用文氏图、数轴能使集合的交、并、补等关系得到直观、形象的显示而利于运算，从而简明地解决集合的关系问题．在解题中，要十分重视这种数形结合、以形助数的思想方法的应用．

最后应当指出，由于集合是一个基本概念，用集合的语言可以表述内容广泛的各种数学问题，因此我们还应该在透彻理解集合概念的基础上，结合数、方程、不等式以及三角、几何知识的复习，注意集合的应用．本书将在以后各单元中适当安排一些简单的综合应用题，供读者练习、思考．但是会考纲要规定：集合与其他知识的综合应用，要控制难度，因此在刚开始复习时，不必在集合的综合应用上花太多的时间．

§2 函数概念和性质

[测试目标]

1．会根据函数的解析式 $y=f(x)$ 求函数值 $f(a)$，并会用描点法画出常见函数的图象．

2．会列出一些简单的实际问题中的函数关系式．

3．会求简单函数的定义域，并能用观察法直接得出一些简单函数的值域．

4．会求出简单函数的反函数，说出互为反函数的函数的图象的关系，并会利用反函数求一些简单函数的值域．

5．会直接应用函数的奇偶性、单调性的定义得出有关的结论，会判断一些简单函数的奇偶性、单调性(在某规定区间上的增减性)，并会用定义加以证明．

6．会用奇函数和偶函数的图象的对称性描绘函数的图象．

[水平测试]

卷二(见本书第 103 页)、卷三(见本书第 107 页)．

[测试评析]

1．求函数值．函数的对应法则一般都是用自变量的一个解析式给出的．求自变量取某值时对应的函数值，本质上就是求自变量取某值时解析式的值．如卷二第 4 题求 $g(8)$ 值，只要把 $x=8$ 代入 $\sqrt{x}-\sqrt{x+10}$ 中即可求得．这里要正确理解函数记号 $f(x)$、$g(x)$，对于函数 $f(x)$，$f(a)$ 表示 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值．在卷二第 4 题中，$g(a)=\sqrt{a}-\sqrt{a+10}$，实质上是在函数式 $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+10}$ 中把括号中字母 x 换成字母 a，随之把右边的解析式中 x 也同样换成 a，懂得了这一点，对于 $f(x+1)$ 之类的记号也就不难理解了．$f(x+1)$ 表示用 $x+1$ 代替 $f(x)$ 的解析式中的 x 所得到的式子．

2．求定义域．对用解析式表示的函数来说，就是求使解析式有意义的自变量的取值范

围．如卷二第6题根据分式的分母不能为零，第7题根据偶次根式中被开方数是非负数，第9题根据对数中真数大于零即可求得函数的定义域，这些我们在初中已经掌握．在求解析式比较复杂的函数的定义域时，可以根据各种简单函数对自变量 x 的限制分别列出不等式（注意：对实际问题，还要考虑问题的实际意义列出不等式），然后解不等式组求出定义域．如卷二22题，应列出三个不等式：$x\geqslant 0$、$\sqrt{x}-3\neq 0$、$10-x>0$ 组成不等式组，即可求得定义域是 $0\leqslant x<10$ 且 $x\neq 9$．注意：不要写成 $x\neq 9$ 且 $0\leqslant x<10$．

3．求函数的值域．常用方法有：

(1) 观察法．即利用平方数、绝对值及偶次根式的非负性等可以直接得出一些简单函数的值域．如卷二第13题利用 $x^2\geqslant 0$ 得出 $x^2+2\geqslant 2$，求得值域是 $[2,+\infty)$，第14题利用 $\sqrt{x}\geqslant 0$ 得出 $-\sqrt{x}\leqslant 0$，求得值域是 $(-\infty,0]$，第16题利用 $|x|\geqslant 0$ 得出 $-|x|\leqslant 0$，$4-|x|\leqslant 4$，求得值域是 $(-\infty,4]$，第15题利用若分子不等于0，则分式的值不等于0，得出值域是 $\{y|y\neq 0\}$（也可写成 $y\neq 0$）．

(2) 利用反函数求函数的值域，即由原函数的值域与它的反函数的定义域相同的关系求一些简单函数的值域．如卷三第16题，先求出 $y=\dfrac{2x}{x+2}$ $(x\neq -2)$ 的反函数是 $y=\dfrac{2x}{2-x}$，它的定义域是 $x\neq 2$，因此原函数的值域是 $y\neq 2$．此外，还有用配方法求二次函数的值域，利用不等式的性质或基本不等式求函数值域等方法，本书将在有关单元逐一介绍．

4．求函数的反函数．根据反函数的定义，只要把原函数中的 x 用 y 的解析式表示，然后把 x 换成 y，y 换成 x，即可求得它的反函数．如卷三第13题，用上面方法求出它的反函数的解析式 $y=(x-1)^2$ 后，还必须说明定义域是 $x\geqslant 1$（因为原函数 $y=x^{\frac{1}{2}}+1$ 的值域是 $y\geqslant 1$），这一点很容易疏忽．应当注意：有的函数的反函数就是它本身．如卷三第12题就是一例．有的函数不存在反函数，如卷七第7题，如果不指明 x 的变化区间，在函数 $y=\sqrt{49-x^2}$ 的值域 $[0,7]$ 中，任意取 y 的一个数值，x 都有两个不同的值和它对应，不符合函数定义中的单值对应的规定，所以在整个定义域 $[-7,7]$ 上，这个函数不存在反函数．而本题中指明了 x 的取值范围是 $-7\leqslant x<0$，在区间 $[-7,0)$ 上，x 和 y 是单值对应，存在反函数．于是可以用上面的方法求得它的反函数是 $y=-\sqrt{49-x^2}$ $(0\leqslant x<7)$．

5．画函数的图象．基本的方法是描点法．如果我们能熟记一些常见函数的图象或利用函数的奇偶性及互为反函数的图象之间的关系，将有助于我们较快地画出函数图象的简图．如卷二第17题 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x<0)$ 是一支双曲线．卷三第8题中，$y=f^{-1}(x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称；第9题中，y 轴左、右两边的图象关于 y 轴对称；第10题中，y 轴左、右两边的图象关于原点对称．画函数的图象时，要特别注意定义域对它的影响．因此，在实际问题中，列出函数关系式后，还应当同时指出它的定义域．如卷二第19题，列出函数关系式 $s=180-60t$，应同时指出它的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 3$．两个函数当且仅当其定义域和对应法则都相同时，才是相同的函数，它们的图象才完全相同．如卷二第20题，只有(C)满足上述两个条件，其余三个虽然对应法则相同，但定义域不同．这一点在画函数的图象时要特别引起注意．如函数 $y=-2x+1(x<0)$ 的图象不是直线，而是直线的一部分．对于解析式中含绝对值符号的函数，如卷二的第25题，可以通过讨论，去掉绝对值符号，化成分

段函数$\begin{cases}y=1 \quad (x\geqslant 0),\\ y=-2x+1 \quad (x<0),\end{cases}$再分段画出它的图象.

6．判断函数的奇偶性,应先讨论其定义域是否对称．定义域关于原点对称是一个函数成为奇函数或偶函数的必要条件．如卷三第5题，容易忽略它的定义域是$[-2, 2)$而误认为它是偶函数．利用定义判断函数的奇偶性,关键是确定$f(-x)$与$f(x)$的关系．如卷三第21题，$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})$不等于$f(x)$，再考虑是否等于$-f(x)$，即$f(-x)+f(x)$是否等于0[当$f(x)$不等于0时，也可以考虑$\frac{f(-x)}{f(x)}$是否等于$-1$]，这里由对数性质可知$f(-x)+f(x)=0$，从而证得$f(x)$是奇函数．此外，还可以利用图象的对称性来判断函数的奇偶性，图象关于原点对称的函数是奇函数，图象关于y轴对称的函数是偶函数．

7．利用定义判断函数的单调性，关键是确定$f(x_2)-f(x_1)$的符号[当$f(x)$恒大于或恒小于0时，也可以确定$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$的符号]．具体的步骤是：先在给定的区间内任取x的两个值x_1、x_2，并设$x_1<x_2$，再作差$f(x_2)-f(x_1)$，判断其正负．如果$f(x_2)-f(x_1)>0$，那么$f(x)$在给定的区间上是增函数；如果$f(x_2)-f(x_1)<0$，那么$f(x)$在给定的区间上是减函数．如卷三第22题，可在$(-\infty, 0)$内取$x_2<x_1<0$，证明$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}>0$，只需将左边变形为$\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，就容易根据不等式的性质证得结论．所以在判断函数增减性时，可以对差式$f(x_2)-f(x_1)$进行一些变形(如配方、因式分解等)，使它成为容易比较$f(x_2)$与$f(x_1)$大小的形式．判断函数的增减性，有时也可以把所给函数化为常见函数或它们的和或积，再利用常见函数的单调性进行判断．

§3　幂函数、指数函数和对数函数

[测试目标]

1．会用“待定系数法”求二次函数的解析式．

2．会用“配方法”确定二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象的顶点坐标、对称轴，从而求出二次函数的最大值或最小值和二次函数的值域．

3．会由二次函数的解析式画出它的图象（或简图），并能从图象上观察二次函数的性质．

4．能分别说出幂函数$y=x^a$，指数函数$y=a^x$和对数函数$y=\log_a x$的定义域、值域以及常数a的取值范围．

5．会由幂函数、指数函数、对数函数的解析式分别画出它们的图象（或简图），并能从图象上观察这些函数的性质．

[水平测试]

卷四(见本书第109页)、卷五(见本书第111页)．

[测试评析]

1．在二次函数的解析式$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$中，系数a、b、c决定了二次函数的图象和性质．

(1) 二次函数的图象的开口方向由系数a决定：当$a>0$时，开口向上；当$a<0$时，开

口向下.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 y 轴一定有交点 $(0, c)$, 与 x 轴是否有交点, 由 $\Delta=b^2-4ac$ 的值确定. 如果有交点, $\Delta\geqslant 0$, 其交点的横坐标是相应的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 如果没有交点, 必有 $\Delta<0$, 此时如果 $a>0$, 抛物线开口向上, 图象全部在 x 轴上方, 函数值都是正的; 如果 $a<0$, 抛物线开口向下, 图象全部在 x 轴下方, 函数值都是负的. 如卷四第 11 题, 根据题意可由不等式 $\Delta=m^2-4m<0$ 求出 m 的取值范围是 $0<m<4$.

2. 求二次函数的图象的顶点坐标和对称轴, 一般用配方法把 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式$\left(这里 m=-\dfrac{b}{2a},\ k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$即可求得顶点坐标是 $(-m, k)$, 对称轴是直线 $x+m=0$ (即 $x=-m$). 如卷四第 5、6 题, 配方得 $y=3(x-1)^2-2$, 从而求得顶点坐标是 $(1, -2)$, 对称轴是直线 $x-1=0$ (即 $x=1$).

求出二次函数的顶点坐标和对称轴, 只须配方就可以迎刃而解. 由此可见, 配方法对研究二次函数具有重要作用, 一定要熟练掌握, 不要以为可直接代入$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$求得顶点坐标, 而忽视配方法的作用.

3. 二次函数的最大值(或最小值) 等于顶点的纵坐标 $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 但它究竟是二次函数的最大值还是最小值, 需由系数 a 来确定: 当 $a>0$ 时是最小值; 当 $a<0$ 时是最大值. (想一想: 为什么?) 如卷四第 7 题, 配方得 $y=-3(x+1)^2+4$, 由 $a=-3<0$ 可知当 $x=-1$ 时, 函数有最大值 4. 求出了二次函数的最大值(或最小值), 二次函数的值域也就容易解决了. 如卷四第 8 题, 求得值域是 $y\leqslant 4$ (可与第 7 题比较). 这里要注意: 以上结论都是在 x 为一切实数的情况下取得的, 如果定义域是某一闭区间, 情况就不同了. 当 $-m$ 属于这个闭区间时, 上述结论依然正确. 如卷四第 20 题, 配方得 $y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$. 因为 $\dfrac{1}{2}\in[0, 2]$, 所以二次函数 $y=2x^2-2x+1$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上仍有最小值 $\dfrac{1}{2}$, 但在端点 $x=2$ 处函数还有最大值 5. 如果 $-m$ 不属于这个闭区间时, 那么二次函数在这个闭区间内的最大值和最小值只可能在闭区间的两个端点处取得. (想一想: 如果把卷四第 20 题改为 $y=2x^2+2x+1$, 结论如何?)

4. 求二次函数的递增区间和递减区间. 我们知道, 二次函数的图象的上升与下降的转折点是它的顶点, 所以在对称轴两旁(即 $x<-m$ 或 $x>-m$), 二次函数的增、减情况恰好相反, 这一结论可以从它的图象上直观得到. 如卷四第 9 题, 由于 $a=-1<0$, 图象开口向下, 我们看到, 在对称轴左侧图象是上升的, 所以当 $x_1<x_2<1$ 时, 有 $f(x_1)<f(x_2)$.

5. 如何由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象? 由于函数图象在平移时, 图象上每一点的平移情况都与整个图象的平移情况相同, 因此要回答这个问题, 只要观察特殊点(如顶点)的平移情况. 如卷四第 15 题, 抛物线 $y=3(x+2)^2+1$ 的顶点是 $(-2, 1)$, 而由抛物线 $y=3x^2$ 的顶点 $(0, 0)$ 平移到点 $(-2, 1)$ 需向左平移 2 个单位, 向上平移 1 个单位, 图象的平移情况与顶点的平移情况相同, 所以应该选 (C).

在解题中, 我们看到了图象的直观作用, 函数图象好比是函数的"照片", 函数的性质都会在它的图象上直观地显示出来. 所以对一些常见函数如能熟记它们的图象, 对研究函数的性质, 解决某些问题(如比较大小、判断奇偶性等)都能带来很大的方便.

6. 根据条件求二次函数的解析式. 二次函数的一般式是 $y=ax^2+bx+c$, 它的配方式是 $y=a(x+m)^2+k$, 乘积式是 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ (x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根). 求二次函数的解析式, 一般用待定系数法. 首先要根据不同的条件, 选取适当形式的解析式. 如果已知函数上三点(不包括顶点), 应选一般式. 如卷四第 17 题, 可把三个已知点的坐标, 分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中, 得到一个三元一次方程组, 从而求得 a、b、c. 如果已知顶点坐标, 对称轴或最大(最小)值, 则选配方式 $y=a(x+m)^2+k$ 比较方便. 如卷四第 18 题, 由已知可得顶点坐标是 $(1, 5)$, 所以可直接设所求的解析式是 $y=a(x-1)^2+5$, 再根据另一条件求得 $a=-4$, 由 $y=-4(x-1)^2+5=-4x^2+8x+1$ 求出 $b=8$, $c=1$; 如果已知图象与 x 轴的两个交点或图象经过点 $(\alpha, 0)$、$(\beta, 0)$, 则选乘积式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 比较方便. 如第 19 题, 由于 $a=-1$ 可直接得到解析式是 $y=-(x-1)(x-5)$, 即 $y=-x^2+6x-5$. 画二次函数图象的简图, 至少应取三点, 其中必须有顶点, 因此还得配方求出顶点坐标, 再画出简图(图略).

7. 应用二次函数解决实际问题或综合题, 往往涉及方程、不等式以及三角、几何等知识, 鉴于会考对二次函数的综合应用有所要求, 我们在卷七安排了第 26、27 两题. 第 26 题要用到平面几何和立体几何知识. 设内接圆柱底面半径是 R cm, 高为 h cm, 由相似关系得 $\frac{h}{20}=\frac{8-R}{8}$, 则 $h=20-\frac{5}{2}R$, 圆柱表面积 $S=2\pi Rh=2\pi R\left(20-\frac{5}{2}R\right)$ 是 R 的二次函数, 可以求得 $R=4$ cm, $h=10$ cm 时有最大侧面积 $80\pi\text{cm}^2$. 第 27 题要用到方程、不等式等知识. 设交点 A、B 的坐标分别是 (x_1, y_1)、(x_2, y_2), 则 x_1、x_2 是方程 $x^2+k=2x^2-3x+k^2$ 的两个实数根, 根据题意必有 $\Delta=9-4(k^2-k)\geqslant 0$, 可解得 k 的取值范围, 再利用两点间距离公式, 得 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 由 $y_1=x_1^2+k$, $y_2=x_2^2+k$, 可知 $y_2-y_1=x_2^2-x_1^2$, 因此

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2[1+(x_2+x_1)^2]}.$$

再由韦达定理知 $x_2+x_1=3$, $x_1x_2=k^2-k$, $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=9-4(k^2-k)$, 所以 $|AB|=\sqrt{10(9-4k^2+4k)}$, 根号内是 k 的二次函数, 可利用二次函数求得 $k=\frac{1}{2}$ 时, $|AB|$ 有最大值 10. 本书以后各章还将选择有关的综合题, 以逐步提高综合应用能力.

8. 要注意幂函数、指数函数和对数函数的相同点和不同点. 如幂函数和指数函数的解析式都是幂的形式, 所不同的是在幂函数 $y=x^n$ 中, 指数 n 是常数, 而在指数函数 $y=a^x$ 中, 底数 a 是常数. 指数函数在整个定义域上是单调函数, 而幂函数在整个定义域上不一定是单调函数, 但在 $(0, +\infty)$ 上, 幂函数一定是单调函数($n>0$, 是增函数; $n<0$, 是减函数). 又如同底的指数函数和对数函数互为反函数, 且具有相同的单调性, 当 $a>1$ 时, $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 都是递增函数; 当 $0<a<1$ 时, 二者都是递减函数. 指数函数和对数函数既不是奇函数, 也不是偶函数, 但幂函数既可能是奇函数(如 n 是奇数, $y=x^n$ 是奇函数), 也可能是偶函数(如 n 是偶数, $y=x^n$ 是偶函数), 等等.

9. 画出幂函数, 指数函数, 对数函数图象的简图, 对研究它们的性质, 解决某些问题会带来很大的方便.

画指数函数或对数函数图象的简图时, 只要抓住它们分别通过特殊点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$, 然后利用增减性就能很快地画出简图. 如 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 图象经过点 $(0, 1)$, 且图象是下降的(图 1-1). 又如 $y=\log_2 x$, 图象经过点 $(1, 0)$, 且图象是上升的(图 1-2).

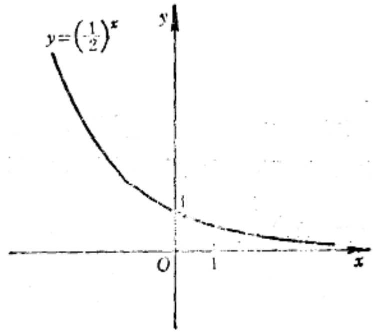

图 1-1

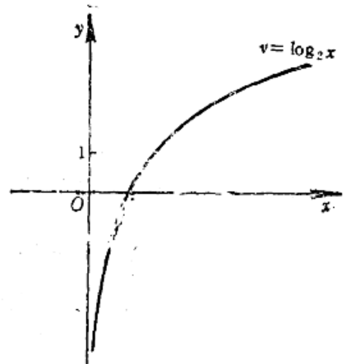

图 1-2

画幂函数 $y=x^n(n\in Z)$ 的简图时，除了抓住图象是否经过特殊点(0, 0)或(1, 1)外，还要注意函数的定义域、奇偶性和单调性，也可以根据指数 n 的不同情况与具体的幂函数类比，如分别用幂函数 $y=x^3$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$(图 1-3)来类比指数 n 是正奇数、正偶数、负奇数、负偶数的幂函数，就容易画出幂函数 $y=x^n(n\in Z)$ 的简图.

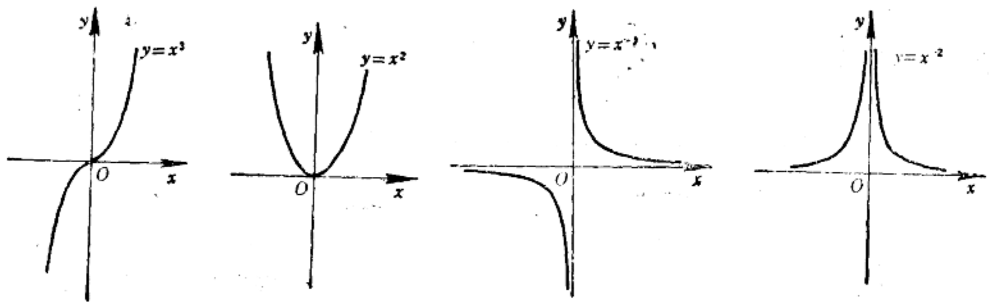

图 1-3

当 n 是分数时，也可以用具体的幂函数，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$等进行类比画出简图. 总之，有了函数图象的简图，便于我们研究它的性质；反之，掌握了函数的性质，也便于判断其图象的大致形状. 如卷五第 18 题，函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域是 R，所以它的图象不可能是(B)或(C)，并且它又是偶函数，所以它的图象只可能是(A).

10. 利用函数的图象和性质比较两个值大小是幂函数、指数函数、对数函数的重要应用之一.

(1) 在比较两个幂的大小时，是利用幂函数性质还是利用指数函数的性质，常有混淆. 如果两个幂的底数相同而指数不同时，那么可利用指数函数 $y=a^x$ 的单调性(要注意底数 a 是大于 1 还是小于 1 的正数)来比较大小；如果指数相同而底数不同时，那么可利用幂函数 $y=x^n$ 的单调性(要注意区分 x、n 是正数还是负数)来比较大小. 如卷五第 7 题，指数相同，利用幂函数 $y=x^{-2.5}$ 在 $x>0$ 上是递减函数，得 $0.7^{-2.5}>0.8^{-2.5}$. 卷五第 8 题，底数相同，利用指数函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是递减函数，得 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.7}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.8}$.

(2) 在比较两个对数大小时，如果底数相同真数不同，那么可以直接利用对数函数的单调性(要注意底数 a 是大于 1 还是小于 1 的正数)来比较大小. 如卷五第 9 题，利用 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

是递减函数，得 $\log_{\frac{1}{3}}0.7>\log_{\frac{1}{3}}0.8$. 如果真数相同底数不同，那么先利用换底公式化为底数相同而真数不同的对数，再比较其大小. 如卷五第 10 题可转化为比较 $\frac{1}{\log_2 0.7}$ 与 $\frac{1}{\log_2 0.8}$ 的大小问题，因为 $\log_2 0.7<\log_2 0.8<0$，所以 $\log_{0.7}2>\log_{0.8}2$.

(3) 比较两个幂或两个对数的大小时，如果底数和指数或底数和真数都不相同. 可先分别与 0 比，区分出正、负数，如果都是正数，再分别与 1 比，区分出大于 1，还是小于 1，然后再比较大小. 如卷五第 19 题，$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<0$，$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}<1$，而 $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}>1$，所以应选(B). 又如卷五第 21 题，由 $a>1$，得 $\log_{0.5}a<0$，$\log_{0.6}a<0$ 而 $\log_{1.1}a>0$，因此只需比较 $\log_{0.5}a$ 与 $\log_{0.6}a$ 的大小. 因为 $\log_a 0.5<\log_a 0.6$，推得 $\log_{0.5}a>\log_{0.6}a$，所以应选(D). 如果这个办法仍不奏效，可利用第三数作媒介. 如卷七第 24 题，可用 $\log_a(b+1)$ 作媒介，它与 $\log_a(a+1)$ 的底数相同而与 $\log_b(b+1)$ 的真数相同，然后再比较大小. 像这类比较复杂的问题，还可以应用不等式的性质进行比较，我们将在“不等式”中作介绍.

§4 指数方程和对数方程

[测试目标]

1. 会应用换底公式进行计算和化简.

2. 会解课本中基本类型的指数方程和对数方程.

[水平测试]

卷六(见本书第 113 页).

[测试评析]

1. 指数式和对数式的转换，换底公式及其变式在解指数方程和对数方程时经常用到，必须熟练掌握. 如卷六第 1 题，可设 $\log_{a^2}a^3=x$，根据对数定义转换成指数式 $(a^2)^x=a^3$，由 $a^{2x}=a^3$ 求得 $x=\frac{3}{2}$. 也可以直接应用换底公式得 $\log_{a^2}a^3=\frac{\lg a^3}{\lg a^2}=\frac{3}{2}$. 此题可推广到一般 $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$. 它在对数的恒等变形中十分有用. 又如第 3 题，如果把 $\lg 5=m$ 直接代入 $5^{\frac{1}{m}}$，不容易求得结果，应用换底公式求得 $\frac{1}{m}=\log_5 10$，再代入即得 $5^{\frac{1}{m}}=10$.

2. 解指数方程和对数方程的指导思想是把它们化成代数方程求解. 常见的题型与解法有以下几种：

(1) $a^{f(x)}=b$ 型的指数方程和 $\log_a f(x)=b$ 型的对数方程，可利用对数的定义把它们分别成或 $f(x)=\log_a b$ 和 $f(x)=a^b$ 再求解. 如卷六第 7 题，方程 $4^{2x-1}=5$ 可化为 $2x-1=\log_4 5$；第 10 题，方程 $\log_2(x^2-x-4)=3$ 可化为 $x^2-x-4=8$.

(2) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 型的指数方程和 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 型的对数方程，其共同点是底数相同，可分别应用同底数的幂相等，指数必相等或同底的对数相等，真数必相等，把它们化成 $f(x)=g(x)$ 再求解，如卷六第 8 题和第 11 题. 但解这类方程时必须注意对数式中的底数和真数的取值范围，最后应当进行检验. 如第 11 题，两边去掉对数符号后得 $x^2-x-3=2x+1$，求出的两个根 4 和 -1 中，$x=-1$ 使 $2x+1<0$，是增根，应该舍去. 有时方程左边或右边是两个同底的对数的和差形式，可先用对数的运算性质把它化成 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 型

的方程再求解．如卷六第 15 题，方程 $\lg x+\lg(x+15)=2$ 可以化为 $\lg[x(x+15)]=2$.

(3) $f(a^x)$型的指数方程和$f(\log_a x)$型的对数方程，可用换元法求解，设 a^x 或 $\log_a x$ 为 u，把原方程化为关于 u 的代数方程，解出 u 后再求 x．如卷六第 14 题，可设 $3^x=u$，由于 $9^x=(3^x)^2$，原方程可化为 $u^2+3u-4=0$；又如第 20 题，可设 $\lg x=u$，由于 $\lg 2x=\lg 2+\lg x$，原方程可以化为 $u^2+\lg 2\cdot u-\lg 5=0$；如果注意到 $\lg 2+\lg 5=1$，把这个方程再化为 $u^2+(1-\lg 5)u-\lg 5=0$ 就很容易求得它的两个解．

(4) 底数不同或底数中含有未知数的指数方程和对数方程，可在方程两边取同底的对数或者应用对数的定义、性质、换底公式将方程变形成上述基本类型后再求解．如卷六第 12 题，在 $x^{2\lg x}=100$ 的两边取常用对数得到方程 $2\lg x\cdot\lg x=2$ 即$(\lg x)^2=1$；第 19 题把方程 $\log_4(5-x)=\log_2(x+3)-1$ 化成 $\log_4(5-x)=\log_4(x+3)^2-1$ 就容易求解．应当注意，在解方程的过程中，两边取对数或同时去掉对数符号得到的方程与原方程一般不是同解方程．所以必须进行检验．

二 不 等 式

§1 不等式的证明

[测试目标]

1. 会以"$a-b>0\Leftrightarrow a>b$、$a-b<0\Leftrightarrow a<b$"为基础，推导不等式的性质.

2. 会直接应用不等式的性质，在给定条件下，判断两个代数式的大小或证明简单的不等式命题.

3. 会用比较法，分析法，综合法证明某些较简单的不等式，或比较两个式子的大小.

4. 会利用基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a、b\in R)$，$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc(a、b、c\in R^+)$证明某些较简单的不等式.

5. 会应用两个或三个正数的算术平均数不小于几何平均数的定理求函数的最大值或最小值，并会解决某些简单的应用问题.

[水平测试]

卷八(见本书第 119 页)、卷九(见本书第 121 页).

[测试评析]

1. 不等式的证明，最终归结为是否真正理解不等式的基本性质，关键在于是否掌握这些基本性质成立的条件. 如由 $a>b$ 得出 $ac>bc$ 必须有 $c>0$ 的条件，如果 $c<0$，那么 $ac<bc$；如果 $c=0$，那么 $ac=bc$. 由此推论两个两边都是正数的同向不等式相乘，所得的不等式才与原不等式同向. 如卷八第 1 题，(A)、(B)、(C)中的 c 可能等于零，这些不等式都不一定成立，因此只有(D)是正确的(事实上，不论 c 是什么数，2^c 总是正数). 又如第 3 题，条件中没有 $a、b、c、d$ 是正数的条件，所以不可能是(A)、(B)，而由题设条件并不保证 $a-c$ 与 $b-d$ 同号，所以，也只有(D)是正确的(事实上，由题设条件可知 $a-b$，$c-d$ 都是正数). 解有关不等式的选择题，除了像上面那样用筛选法外，还可以用特殊值法. 如卷八第 5 题，可以根据给定条件 $a>b$，取 $a=2$，$b=-3$ 代入选择支容易得出应选(B). 一般地，如果 $a>b$，n 是奇数，那么 $a^n>b^n$. (想一想：为什么?)而当 n 是偶数时，只有在 $a>b>0$ 的条件下才有 $a^n>b^n$. 由此可得：$|a|>|b|$(n 是偶数)$\Rightarrow a^n>b^n$. 再进一步思考，可得$|a|>|b|\Leftrightarrow a^n>b^n$($n$ 是偶数). 懂得了这一点，第 5 题还可以这样想：(A)、(C)、(D)中三个不等式是等价的，这就是说，其中一个成立，必有三个都成立，所以只能选(B)，否则与单项选择的要求不符.

2. 用函数的单调性可以比较两个值的大小，利用不等式知识比较两个值的大小更是普遍采用的方法. 在不等式的证明中，比较法是最基本的方法，通常我们应用比差法与比值法.

比差法的依据是"$A-B>0\Leftrightarrow A>B$". 为了确定 $A-B$ 的符号，经常把 $A-B$ 所得到的式子变形为一个常数或几个因式的乘积或几个代数式的平方和形式. 如卷八第 9 题，当 $x\neq 1$ 时，$A-B=1-x+x^2-x=(1-x)^2>0$，所以 $1-x+x^2>x$. 第 10 题，当 $x\in R$ 时，$A-B=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$. (你会不会用二次函数知识进行判断?)又如第 16 题，$A-B=a^2+b^2-2a+2b+2=(a-1)^2+(b+1)^2$，有人认为$(a-1)^2+(b+1)^2$ 一定是正数，其实不