

打开你的数学

思路

DA KAI NI DE SHU XUE SI LU

江苏
科学技术
出版社

打开你的数学思路

刘云章 潘慰高

江苏科学技术出版社

插图描绘 钱景渊

打开你的数学思路

刘云章 潘慰高

出版、发行：江苏科学技术出版社

经 销：江苏省新华书店

印 刷：国营练湖印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 6.5 字数 139,000

1990 年 2 月第 1 版 1990 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—6,300 册

ISBN 7-5345-0853-3

0·02

定价：2.25 元

责任编辑 高楚明

出版说明

数学、物理、化学是中等教育中重要的基础课程。

我们组织编写的这套《打开你的数学思路》、《打开你的物理思路》和《打开你的化学思路》，其目的在于引导中学生去追踪数学、物理、化学发展的足迹，激发他们对数理化的学习兴趣和主动的求知欲望，开阔他们的知识视野，提高他们的数理化的素养，培养他们探索真知的能力和顽强的毅力，帮助他们更好地学好数理化。

这套书均以现行中学教材为依据，选择基本概念，基本理论，基本定律、定理、公式等作为条目，对其酝酿、产生和发展进行追溯性阐述，史料翔实，简明扼要，通俗易懂。我们希望这套书对广大中学师生的教与学能有所帮助。

前 言

中学数学里大量的概念、定理及公式是从哪里来的？向往着发明、创造的中学生总是欢喜追根溯源，优秀的数学教师应该讲清它们的来龙去脉。当代杰出的美国数学家、教育家G·波里亚曾说过，学习数学只有当“看到数学的产生、按照数学发展的历史顺序或亲自从事数学发现时，才能最好地理解数学。”所以他希望学生学习数学时看到的是数学建造过程中的施工架，而不是只看到简化了的现成品。我们撰写本书的目的，就是紧扣中学数学教学大纲，追根溯源，介绍有关的数学发展史，试图激发学生学习兴趣，提高数学素养；为中学数学教师搞好教学、科研提供合宜的资料。

考证历史是不容易的，数学史中有些问题至今尚无一致的说法。本书难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作 者

1988年6月

目 录

代 数

负数	1	质数公式	14
无理数	2	哥德巴赫猜想	15
第一次数学危机	3	勾股数组	16
有理数	3	费马大定理	17
虚数	3	费马小定理	19
实数	5	《周易》	19
复数	5	算筹	20
向量	5	进位制	21
复平面	6	二进制记数法	22
复数的模	7	零号“0”	22
高斯平面	7	“算经十书”	24
欧拉公式	7	《九章算术》	24
四元数	9	代数	25
代数数与超越数	10	方程	26
刘维尔数	11	方程的根	27
质数与合数	11	方程符号	27
素数	12	“天元术”	28
麦森数	12	“四元术”	29
质数表	12	“良马追及”问题	30
爱拉托色尼筛法	13	“测井”问题	30
费马数	13	“盈不足术”	30

“容器”问题.....	32	矩阵.....	53
开方.....	32	对数.....	54
根号.....	33	纳皮尔对数.....	56
配方法.....	33	第一张对数表.....	56
二次方程求根公式.....	34	数 e	56
代数基本定理.....	36	自然对数.....	58
韦达定理.....	37	自然对数表.....	58
“直田长阔”问题.....	38	常用对数.....	59
三次方程求根公式.....	39	幂.....	60
卡丹公式.....	41	指数.....	61
四次方程求根公式.....	41	等差数列.....	63
五次方程的代数解问题.....	42	高阶等差数列.....	64
不定方程.....	44	等比数列.....	65
《孙子算经》.....	45	斐波那契数列.....	67
中国剩余定理.....	45	二项式定理.....	68
孙子剩余定理.....	47	杨辉三角形.....	68
“大衍求一术”.....	47	牛顿二项式定理.....	68
“百鸡”问题.....	47	数学归纳法.....	68
丢番都方程.....	48	排列、组合.....	70
平均值不等式.....	49	概率论.....	71
行列式.....	52	概率悖论.....	72
克莱姆法则.....	53	贝特朗奇悖论.....	74

几 何

《墨经》.....	75	非欧几何.....	80
《几何原本》.....	76	公理法.....	82
欧氏几何.....	78	几何.....	84
第五公设.....	78	勾股定理.....	86
平行公设.....	80	毕达哥拉斯定理.....	87

月形定理.....	87	梅涅劳斯定理.....	115
黄金分割.....	89	塞瓦定理.....	116
黄金数.....	91	九点圆.....	119
中外比.....	91	欧拉圆.....	120
圆周率.....	91	欧拉线.....	120
微率.....	92	西摩松线.....	121
割圆术.....	95	蝴蝶定理.....	122
祖率.....	95	中线定理.....	124
π 值的计算方法.....	96	巴布斯定理.....	125
规矩.....	98	阿波罗尼斯问题.....	125
尺规作图.....	100	阿波罗尼斯定理.....	127
立方倍积.....	101	牟合方盖.....	127
三等分一角.....	102	祖暅原理.....	128
化圆为方.....	104	欧拉定理.....	129
尺规割圆.....	106	四色问题.....	131
正七边形问题.....	107	七桥问题.....	132
正十七边形问题.....	108	一笔画.....	133
海伦-秦九韶公式.....	110	拓扑变换.....	135
三斜求积术.....	112	橡皮变形.....	137
海伦三角形.....	112	拓扑学.....	137
托勒玫定理.....	113	伽利略问题.....	137

三 角

三角学.....	139	第一个三角函数表.....	146
《周髀算经》.....	141	“分”、“秒”.....	148
勾股测量术.....	142	正弦表.....	148
重差术.....	143	正弦.....	149
《海岛算经》.....	144	正切表、余切表.....	149
1度的角.....	145	正切、余切.....	150

弧度制.....	150	三角函数符号.....	153
三角函数.....	151		

解 析 几 何

解析几何学.....	153	象限、卦限.....	160
《平面和立体的轨迹引论》...	154	极坐标.....	160
变量.....	155	圆锥曲线.....	161
函数.....	157	抛物线.....	162
坐标.....	159	椭圆.....	162
直角坐标系.....	160	双曲线.....	162
横坐标.....	160	二次曲线.....	162
纵坐标.....	160	圆锥曲线的直径.....	164

微 积 分

《庄子》.....	165	定积分.....	178
追龟说.....	166	微积分基本公式.....	181
数列极限.....	167	牛顿-莱布尼茨公 式	182
微积分.....	168	不定积分.....	182
切线.....	170	原函数.....	183
导数	172	第二次数学危机.....	184
微分.....	173	无穷小悖论.....	184
微分法.....	175	无限集.....	184
拉格朗日中值定理.....	175	第三次数学危机.....	186
穷竭法	177	集合论悖论.....	187

计 算 机

机械计算机.....	188	电子计算机.....	190
图灵机.....	188	计算机科学.....	192

汉 语 拼 音 索 引

代 数

负数 如果两种量具有相反意义，则其中一种规定为正的，另一种规定为负的。带有正号的数叫做正数，带有负号的数叫做负数。

负数的应用以我国为最早，约在西汉(公元前2世纪)，就已经使用赤筹表示正数，用黑筹表示负数(或者用三角截面的算筹表示正数，用矩形的算筹表示负数)。后来又改为用正放的算筹表示正数，用斜置的算筹表示负数。《九章算术》中，已经用正负数表示相反意义的量。如以卖物的钱数(收入)为正，以买物的钱数(支出)为负；余数钱为正，不足钱为负；进入的粮谷(“益实”)为正，运出的粮谷(“损实”)为负等等。进而，给出了正负数概念的一般定义：“两算得失相反，要令正负以名之。”这是数学史上关于正负数的第一个广泛而概括的定义。

《九章算术》的方程一章中，在考查减法运算且当减数大于被减数时，采用负数来扩充减法的应用，并给出了世界上最早的正负数加减法法则，名为“正负术”。

到元朝朱世杰著《算学启蒙》(1299年)，又给出了正负数的乘除法法则。

负数也早为古希腊人所知。在印度，最早提到负数是公元7世纪的事，他们用上方加“.”的数码表示负数。

在15世纪和16世纪，大多数欧洲数学家还不承认负数是数，或者即使承认了，也并不同意它作为方程的根。意大利

利数学家卡丹把方程的负根称为“虚有的”，法国数学家韦达在解方程时把负根舍弃，另一位法国数学家帕斯卡则认为从0减去4纯粹是胡说。还有一位法国数学家安东尼·阿纳卡德提出一种有趣的说法来反对承认负数，他说他怀疑 $(-1):1=1:(-1)$ ，因为 -1 小于 $+1$ ，那么较小的数与较大的数的比，怎么能等于较大的数与较小的数的比呢？这个问题引起了许多人的争论。

第一个承认方程的负数根的是印度数学家拜斯迦罗(12世纪)。他首先提出，一元二次方程 $x^2-45x=250$ 的根是由 $x=50$ 、 $x=-5$ 给出的。不过拜斯迦罗对于负根的有效性也表示有些怀疑。直到17世纪，法国数学家笛卡儿引进坐标系后，负数获得了几何解释，才逐渐被人们公认，负数在方程中也获得了合理的地位。

无理数 无限不循环小数叫做无理数。

在毕达哥拉斯(古希腊数学家)时代，人们对有理数的认识还不是很清楚的，对于无理数的概念更是一无所知。毕达哥拉斯学派所说的数，原来是指整数，他们不把分数看成一种数，而仅看作两个整数之比。他们错误地认为，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。但是该学派的成员希伯索斯(古希腊人)根据勾股定理通过逻辑推理发现，边长为1的正方形的对角线长度既不是整数，也不是整数的比所能表示。这个发现被人们看成是“荒谬”和违反常识的事。它不仅严重触犯了毕氏学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的传统见解，使古希腊的数学家们感到惊奇不安。因为，对于只有整数和分数概念的他们来说，这意味着边长为1的正方形的对角线长度竟然不能用任何“数”表示出来！所以这一事件在数学史上称为第一次数学危机。

希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受，相传毕氏学派就因这一发现而把希伯索斯投入海中处死。

后人用反证法证明了这一发现是正确的，证明如下：

设边长为 1 的正方形的对角线长度可表示为 $\frac{m}{n}$ ，其中 m, n 是既约的正整数。

则根据勾股定理可得

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \text{即 } m^2 = 2n^2,$$

这表明 m^2 是一个偶数，因而 m 也是偶数（否则，若 m 为奇数，设 $m=2k+1$ ，则 $m^2=4k^2+4k+1$ 也是奇数，矛盾）。

设 $m=2p$ (p 是整数)，则 $(2p)^2=m^2=2n^2$ ，即 $n^2=2p^2$ 是偶数，因而 n 也是偶数。

那么 m, n 都有公约数 2，这与假设矛盾。

无理数后来被确认下来，是同开方运算有关的。对于非完全平方数，人们发现它们的平方根既不是有限小数也不是无限循环小数，而是一种无限不循环小数，并称这种新型的数为无理数。这一名称表现了人们对这种新数的困惑不解，但却不得不承认它是客观存在的。相比之下，整数和分数便被合称为有理数了。后来，把一切不是用开方法确定的其它无限不循环小数，如 $\pi, e, \dots$ 等，也一律称为无理数。

第一次数学危机 见无理数。

有理数 见无理数。

虚数 记号 i 表示 -1 的一个平方根，叫做虚数单位，并规定：

1. 它的平方等于 -1 ，即 $i^2 = -1$ ；

2. 实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原

有的加、乘等运算律仍然成立。

形如 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数，叫做复数，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b \neq 0$ 时，叫做虚数，当 $a=0$ ， $b \neq 0$ 时，叫做纯虚数。

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的。1484年，法国人舒开在《算术三篇》中，解二次方程

$$4+x^2=3x,$$

得根 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 4}$ ，他声明这根是不可能的。

1545年，意大利数学家卡丹第一个认真地讨论虚数，并给出运算的方法。在《大术》中，他解这样的问题：两数的和是10，积是40，求这两数。

用现代的符号，可列成方程

$$x(10-x)=40, \quad x^2-10x+40=0,$$

得到两个根 $5+\sqrt{-15}$ ， $5-\sqrt{-15}$ 。

卡丹觉得奇怪，负数怎样开平方？他称负数的平方根为“诡辩量”，并怀疑这种数的运算合法性。他说：“不管我的良心受到多大的责备，但是，的确 $5+\sqrt{-15}$ 乘 $5-\sqrt{-15}$ 刚好等于40！”

过了将近一百年，解析几何的创始人笛卡尔在《几何学》中第一次给这种“诡辩量”取了一个名字叫“虚数”（和“实数”相对）。他认为这种根不是实在的，而是虚的。

英国大科学家牛顿也并不认为虚数根是有意义的，这很可能是由于它们缺乏物理意义。

德国数学家莱布尼茨虽在形式运算中使用虚数，但并不理解虚数的性质。他说：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想的端兆，那个介于存在与不存在之

间的两栖怪物，那个我们称为虚的 -1 的平方根。”把虚数看作“两栖怪物”，添上神秘色彩。

直到18世纪，瑞士大数学家欧拉还是说这种数只存在于“幻想之中”。1777年，他在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 表示 $\sqrt{-1}$ ，但很少有人注意它，直到1801年，德国大数学家高斯系统地使用这个符号，以后渐渐通行于全世界。

虚数的出现，为无理数解脱了困境。因为尽管无理数与有理数相比，似乎不那么“理直气壮”，但在虚数面前，它毕竟同有理数一样，是实实在在的数了，因此人们把无理数同有理数合称为实数，以示和虚数的区别。实数同虚数合称为复数，复数这个名词是高斯给出的。高斯一边感到这种数有点虚无缥缈，但一边又觉得它颇有用处。因为，如果不承认这种数，代数方程有的无解，有的有一个解，有的有两个解……五花八门，毫无规律；如果承认了它，代数方程都有解，而且 n 次方程不多不少恰好有 n 个解。

实数 见虚数。

复数 见虚数。

向量 既有绝对值大小又有方向的量叫做向量。

向量概念源出于一些物理量。有些量可以用一个数值确定，例如质量、温度、密度、面积和体积等等。这一类量叫数量。还有一些量，只知道它们的数值大小是不够的，要完全表示它们，必须同时说明它们的方向，例如力、速度、加速度等等就是属于这一类。1788年法国数学家拉格朗日的《分析力学》发表。在这书中，他把这些物理量数学化，即用数学的方法来表示这些量。例如，他用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 f ，并沿坐标轴把 f 分解为三个分力

f_x, f_y, f_z . 这些分力作为坐标轴上的有向线段, 可以简单地用数来表示. 这样, 在力学中关于力、速度及加速度的所有方程, 可以转变为联系它们的分量的、关于 x, y, z 的三个方程. 拉格朗日没有用“向量”这一名词.

拉格朗日之后, 随着电学的发展, 在数学和物理学中更广泛地研究了这种有向线段的一般理论. 到了19世纪, 德国数学家格拉斯曼引入有向线段的记号, 並称之为向量.

向量理论由于在力学、物理和技术中的重要性, 而构成了解析几何学中的一个重要组成部分——向量代数. 这一名称是为了区别于用分析方法研究向量的理论——向量分析, 后者是由美国数学家吉布斯于1881—1884年建立的.

复平面 用以表示复数的直角坐标平面叫做复平面.

17世纪时, 英国数学家瓦里士已经意识到在直线上不能找到虚数的几何表示. 1797年, 挪威的测量学家维塞尔向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示, 特别应用于平面与球面多边形的测定》, 首先提出把复数 $a+bi$ 用坐标平面上的点 (a, b) 来表示, 使全体复数与平面上的点建立了一一对应关系, 形成了复平面概念. 但当时没有受到人们的重视. 1806年, 日内瓦的阿工在巴黎发表的论文《虚量, 它的几何解释》, 也谈到了复数的几何表示法. 他用“模”这个名词来表示向量 $a+bi$ 的长度, 模这术语就源出于此.

伟大的德国数学家高斯是近代数学的奠基人之一, 在历史上影响之大, 可以和阿基米得、牛顿、欧拉并列. 他在1799年已经知道复数的几何表示, 在1799年、1815年、1816年他对代数基本定理作出的三个证明中, 都假定了复数和直角坐标平面上的点一一对应, 但直到1831年他才对复平面作出详细的说明, 使人们接受了复平面的思想. 此后, 有些人

便把复平面称为高斯平面。

利用复数的几何表示法，复数又可以用坐标平面上的向量来表示。两个复数相加可以按照向量加法的平行四边形法则来进行，一个复数乘以 i (或 $-i$) 相当于表示此复数的向量逆(或顺)时针旋转 90° 。这就使得物理上的许多向量：力、速度、加速度等等，都可以借助于复数来进行计算，使复数成为物理学和其它自然科学的重要工具。

复数的模 见复平面。

高斯平面 见复平面。

欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (θ 为实数)

欧拉(1707—1783年)是全世界历史上最伟大的数学家之一，他一生中发表了 700 多篇论文和著作。至今几乎每一个数学部门，都可以看到欧拉的名字。从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法，到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数论的欧拉公式等等。

关于复数理论的最系统的叙述，是由欧拉给出的。他在 1748 年给出了著名的欧拉公式，其中 e 是自然对数的底数。

欧拉是利用复变函数理论发现该公式的，下面是一个初等的证明方法。

考虑极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\theta}{n}i)^n$ ，

其中 θ 为任意固定实数， n 为正整数。

用两种方法计算：

法一：若 $\theta \neq 0$ ，令 $\frac{n}{\theta i} = x$ ，可得