打开你的数学思路

DA KAI NI DE SHU XUE SI LU

江苏科学技术出版社

打开你的数学思路

刘云章　潘恩高

江苏科学技术出版社

插图描绘　钱景渊

打开你的数学思路

刘云章　潘慰高

出版、发行：江苏科学技术出版社

经　　　销：江苏省新华书店

印　　　刷：国营练湖印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 6.5 字数139,000

1990 年 2 月第 1 版　1990 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—6,300 册

ISBN　7—5345—0853—3

O·02　　　　　定价：2.25 元

责任编辑　高楚明

出 版 说 明

数学、物理、化学是中等教育中重要的基础课程。

我们组织编写的这套《打开你的数学思路》、《打开你的物理思路》和《打开你的化学思路》，其目的在于引导中学生去追踪数学、物理、化学发展的足迹，激发他们对数理化的学习兴趣和主动的求知欲望，开阔他们的知识视野，提高他们的数理化的素养，培养他们探索真知的能力和顽强的毅力，帮助他们更好地学好数理化。

这套书均以现行中学教材为依据，选择基本概念，基本理论，基本定律、定理、公式等作为条目，对其酝酿、产生和发展进行追溯性阐述，史料翔实，简明扼要，通俗易懂。我们希望这套书对广大中学师生的教与学能有所帮助。

前　　言

中学数学里大量的概念、定理及公式是从哪里来的？向往着发明、创造的中学生总是欢喜追根溯源，优秀的数学教师应该讲清它们的来龙去脉。当代杰出的美国数学家、教育家G·波里亚曾说过，学习数学只有当“看到数学的产生、按照数学发展的历史顺序或亲自从事数学发现时，才能最好地理解数学。”所以他希望学生学习数学时看到的是数学建造过程中的施工架，而不是只看到简化了的现成品。我们撰写本书的目的，就是紧扣中学数学教学大纲，追根溯源，介绍有关的数学发展史，试图激发学生学习兴趣，提高数学素养；为中学数学教师搞好教学、科研提供合宜的资料。

考证历史是不容易的，数学史中有些问题至今尚无一致的说法。本书难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1988年6月

目　　录

代　　数

几　　何

三　　角

解　析　几　何

微　积　分

计　　算　　机

汉 语 拼 音 索 引

代　数

负数　如果两种量具有相反意义，则其中一种规定为正的，另一种规定为负的。带有正号的数叫做正数，带有负号的数叫做负数。

负数的应用以我国为最早，约在西汉(公元前2世纪)，就已经使用赤筹表示正数，用黑筹表示负数（或者用三角截面的算筹表示正数，用矩形的算筹表示负数)。后来又改为用正放的算筹表示正数，用斜置的算筹表示负数。《九章算术》中，已经用正负数表示相反意义的量。如以卖物的钱数（收入)为正，以买物的钱数(支出)为负；余数钱为正，不足钱为负；进入的粮谷（“益实”)为正，运出的粮谷（“损实”)为负等等。进而，给出了正负数概念的一般定义：“两算得失相反，要令正负以名之。”这是数学史上关于正负数的第一个广泛而概括的定义。

《九章算术》的方程一章中，在考查减法运算且当减数大于被减数时，采用负数来扩充减法的应用，并给出了世界上最早的正负数加减法法则，名为“正负术”。

到元朝朱世杰著《算学启蒙》(1299年)，又给出了正负数的乘除法法则。

负数也早为古希腊人所知。在印度，最早提到负数是公元7世纪的事，他们用上方加“.”的数码表示负数。

在15世纪和16世纪，大多数欧洲数学家还不承认负数是数，或者即使承认了，也并不同意它作为方程的根。意大

利数学家卡丹把方程的负根称为“虚有的”，法国数学家韦达在解方程时把负根舍弃，另一位法国数学家帕斯卡则认为从0减去4纯粹是胡说。还有一位法国数学家安东尼·阿纳卡德提出一种有趣的说法来反对承认负数，他说他怀疑$(-1):1=1:(-1)$，因为-1小于$+1$，那么较小的数与较大的数的比，怎么能等于较大的数与较小的数的比呢？这个问题引起了许多人的争论。

第一个承认方程的负数根的是印度数学家拜斯迦罗（12世纪）。他首先提出，一元二次方程$x^2-45x=250$的根是由$x=50$、$x=-5$给出的。不过拜斯迦罗对于负根的有效性也表示有些怀疑。直到17世纪，法国数学家笛卡儿引进坐标系后，负数获得了几何解释，才逐渐被人们公认，负数在方程中也获得了合理的地位。

无理数 无限不循环小数叫做无理数。

在毕达哥拉斯（古希腊数学家）时代，人们对有理数的认识还不是很清楚的，对于无理数的概念更是一无所知。毕达哥拉斯学派所说的数，原来是指整数，他们不把分数看成一种数，而仅看作两个整数之比。他们错误地认为，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。但是该学派的成员希伯索斯（古希腊人）根据勾股定理通过逻辑推理发现，边长为1的正方形的对角线长度既不是整数，也不是整数的比所能表示。这个发现被人们看成是“荒谬”和违反常识的事。它不仅严重触犯了毕氏学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的传统见解，使古希腊的数学家们感到惊奇不安。因为，对于只有整数和分数概念的他们来说，这意味着边长为1的正方形的对角线长度竟然不能用任何“数”表示出来！所以这一事件在数学史上称为第一次数学危机。

希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受，相传毕氏学派就因这一发现而把希伯索斯投入海中处死。

后人用反证法证明了这一发现是正确的，证明如下：

设边长为1的正方形的对角线长度可表示为$\frac{m}{n}$，其中m，n是既约的正整数。

则根据勾股定理可得

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2\ , \qquad 即\quad m^2=2n^2,$$

这表明m^2是一个偶数，因而m也是偶数(否则，若m为奇数，设$m=2k+1$，则$m^2=4k^2+4k+1$也是奇数，矛盾)。

设$m=2p$(p是整数)，则$(2p)^2=m^2=2n^2$，即$n^2=2p^2$是偶数，因而n也是偶数。

那么m，n都有公约数2，这与假设矛盾.

无理数后来被确认下来，是同开方运算有关的。对于非完全平方数，人们发现它们的平方根既不是有限小数也不是无限循环小数，而是一种无限不循环小数，并称这种新型的数为无理数。这一名称表现了人们对这种新数的困惑不解，但却不得不承认它是客观存在的。相比之下，整数和分数便被合称为有理数了。后来，把一切不是用开方法确定的其它无限不循环小数，如π，e，……等，也一律称为无理数。

第一次数学危机 见无理数。

有理数 见无理数。

虚数 记号i表示-1的一个平方根，叫做虚数单位，并规定：

1．它的平方等于-1，即$i^2=-1$；

2．实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原

有的加、乘等运算律仍然成立。

形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数，叫做复数，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时，叫做虚数，当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，叫做纯虚数。

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的。1484年，法国人舒开在《算术三篇》中，解二次方程

$$4+x^2=3x,$$

得根 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$，他声明这根是不可能的。

1545年，意大利数学家卡丹第一个认真地讨论虚数，并给出运算的方法。在《大术》中，他解这样的问题：两数的和是10，积是40，求这两数。

用现代的符号，可列成方程

$$x(10-x)=40, \qquad x^2-10x+40=0,$$

得到两个根 $5+\sqrt{-15}$，$5-\sqrt{-15}$。

卡丹觉得奇怪，负数怎样开平方？他称负数的平方根为“诡辩量”，并怀疑这种数的运算合法性。他说：“不管我的良心受到多大的责备，但是，的的确确 $5+\sqrt{-15}$ 乘 $5-\sqrt{-15}$ 刚好等于40！”

过了将近一百年，解析几何的创始人笛卡尔在《几何学》中第一次给这种“诡辩量”取了一个名字叫“虚数”（和“实数”相对）。他认为这种根不是实在的，而是虚的。

英国大科学家牛顿也並不认为虚数根是有意义的，这很可能是由于它们缺乏物理意义。

德国数学家莱布尼茨虽在形式运算中使用虚数，但並不理解虚数的性质。他说：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想的端兆，那个介于存在与不存在之

间的两栖怪物，那个我们称为虚的 -1 的平方根。”把虚数看作“两栖怪物”，添上神秘色彩。

直到18世纪，瑞士大数学家欧拉还是说这种数只存在于“幻想之中”。1777年，他在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 表示 $\sqrt{-1}$，但很少有人注意它，直到1801年，德国大数学家高斯系统地使用这个符号，以后渐渐通行于全世界。

虚数的出现，为无理数解脱了困境。因为尽管无理数与有理数相比，似乎不那么“理直气壮”，但在虚数面前，它毕竟同有理数一样，是实实在在的数了，因此人们把无理数同有理数合称为实数，以示和虚数的区别。实数同虚数合称为复数，复数这个名词是高斯给出的。高斯一边感到这种数有点虚无缥缈，但一边又觉得它颇有用处。因为，如果不承认这种数，代数方程有的无解，有的有一个解，有的有两个解……五花八门，毫无规律；如果承认了它，代数方程都有解，而且 n 次方程不多不少恰好有 n 个解。

实数 见虚数。

复数 见虚数。

向量 既有绝对值大小又有方向的量叫做向量。

向量概念源出于一些物理量。有些量可以用一个数值确定，例如质量、温度、密度、面积和体积等等。这一类量叫数量。还有一些量，只知道它们的数值大小是不够的，要完全表示它们，必须同时说明它们的方向，例如力、速度、加速度等等就是属于这一类。1788年法国数学家拉格朗日的《分析力学》发表。在这书中，他把这些物理量数学化，即用数学的方法来表示这些量。例如，他用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 f，并沿坐标轴把 f 分解为三个分力

f_x、f_y、f_z. 这些分力作为坐标轴上的有向线段，可以简单地用数来表示。这样，在力学中关于力、速度及加速度的所有方程，可以转变为联系它们的分量的、关于x、y、z的三个方程。拉格朗日没有用"向量"这一名词。

拉格朗日之后，随着电学的发展，在数学和物理学中更广泛地研究了这种有向线段的一般理论。到了19世纪，德国数学家格拉斯曼引入有向线段的记号，並称之为向量。

向量理论由于在力学、物理和技术中的重要性，而构成了解析几何学中的一个重要组成部分——向量代数。这一名称是为了区别于用分析方法研究向量的理论——向量分析，后者是由美国数学家吉布斯于1881—1884年建立的。

复平面 用以表示复数的直角坐标平面叫做复平面。

17世纪时，英国数学家瓦里士已经意识到在直线上不能找到虚数的几何表示。1797年，挪威的测量学家维塞尔向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》，首先提出把复数$a+bi$用坐标平面上的点(a,b)来表示，使全体复数与平面上的点建立了一一对应关系，形成了复平面概念。但当时没有受到人们的重视。1806年，日内瓦的阿工在巴黎发表的论文《虚量，它的几何解释》，也谈到了复数的几何表示法。他用"模"这个名词来表示向量$a+bi$的长度，模这术语就源出于此。

伟大的德国数学家高斯是近代数学的奠基人之一，在历史上影响之大，可以和阿基米得、牛顿、欧拉并列。他在1799年已经知道复数的几何表示，在1799年、1815年、1816年他对代数基本定理作出的三个证明中，都假定了复数和直角坐标平面上的点一一对应，但直到1831年他才对复平面作出详细的说明，使人们接受了复平面的思想。此后，有些人

便把复平面称为高斯平面。

利用复数的几何表示法，复数又可以用坐标平面上的向量来表示。两个复数相加可以按照向量加法的平行四边形法则来进行，一个复数乘以i(或$-i$)相当于表示此复数的向量逆(或顺)时针旋转$90°$。这就使得物理上的许多向量：力、速度、加速度等等，都可以借助于复数来进行计算，使复数成为物理学和其它自然科学的重要工具。

复数的模 见复平面。

高斯平面 见复平面。

欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$($\theta$为实数)

欧拉(1707—1783年)是全世界历史上最伟大的数学家之一，他一生中发表了700多篇论文和著作。至今几乎每一个数学部门，都可以看到欧拉的名字。从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法，到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数论的欧拉公式等等。

关于复数理论的最系统的叙述，是由欧拉给出的。他在1748年给出了著名的欧拉公式，其中e是自然对数的底数。

欧拉是利用复变函数理论发现该公式的，下面是一个初等的证明方法。

考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\theta}{n}i\right)^n$，

其中θ为任意固定实数，n为正整数。

用两种方法计算：

法一：若$\theta\neq0$，令$\dfrac{n}{\theta i}=x$，可得