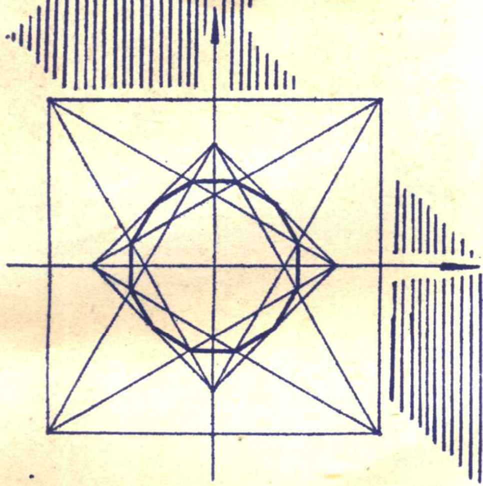
数学竞赛试题汇编



江苏省常州师范　編印

1978·11·

《数学竞赛试题汇编》

目　　录

1　国内部分

2　国外部分

1. 国 内 部 分

一、1956年上海市数学竞赛试题及解答

〔复赛〕

1.(a)设n为正整数，证明$13^{2n}-1$是168的倍数。

解：∵a^n-1能被$a-1$整除 又∵$13^{2n}-1=(13^2)^n-1$，$13^2-1=168$而$(13^2)^n-1$能被13^2-1整除，故$13^{2n}-1$能被168整除

∴ $13^{2n}-1$是168的倍数。

(b)问：具有那种性质的自然数n，能使$1+2+\cdots\cdots+n$整除

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots n$?

解：由等差数列求和公式得$1+2+3+\cdots\cdots+n$

$$=\frac{n(1+n)}{2}, \text{而} 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots n=n!.$$

$\dfrac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}$是否整数，可以从下列情况讨论：

(1) 当n是奇数 即$n=2k+1$时(k为正整数)则

$$\frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1+n}{2}\right)}=\frac{(2k)!}{(k+1)}$$

∴ $2k\geqslant k+1$故$k+1$必可整除$(2k)!$ 如$k=0$，即$n=1$，只要假定$0!=1$，亦不例外。

(2)当n是偶数，即$n=2k$时（k为正整数），分两种情况讨论：

①当$n=2k$，$1+n=2k+1$，而$2k+1$为合数时。

设 $2k+1=a\cdot b$，$a\neq b$，则a，b必为奇数，均不大于 $\frac{2k+1}{3}$。

$$\text{么}\quad \frac{n!}{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{2(n-1)!}{1+n}=\frac{2(2k-1)!}{2k+1}=\frac{2(2k-1)}{a\cdot b}$$

$$=\frac{2[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(2k-4)(2k-3)(2k-2)(2k-1)]}{a\cdot b}$$

$$=2\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2k-3)(2k-1)}{a}\right]\cdot$$

$$2\left[\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(k-2)(k-1)}{b}\right]$$

但$2k-1\geqslant\frac{2k+1}{3}$和$k-1\geqslant\frac{2k+1}{3}$（$k\geqslant 4$）

∵$k<4$就不适合所设的条件。在$1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2k-3)(2k-1)$中，必能找到一个与$a$相同的奇数；同理，在$1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(k-2)(k-1)$中，也能找到一个与$b$相同的奇数。故在原式中，$\frac{2(2k-1)}{a\cdot b}$必为整数。

同理当$a=b$，或a、b再可分解时，所得的结论一样。

②当$n=2k$而$1+n=2k+1$，而$2k+1$为质数时。

因$n+1$大于$(n-1)!$中任一个数，因此$2(n-1)!$不可能被$1+n$整除。

∴本题结论：n为一个自然数，当$n+1$不是质数时（但是2除外），则$1+2+3+\cdots\cdots+n$能整除$1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$。

2. 解不等式$10^{2lgx}+4x-log_2 32>0$

解：∵$10^{2lgx}=10^{lgx^2}=x^2$，及$log_2 32=5$

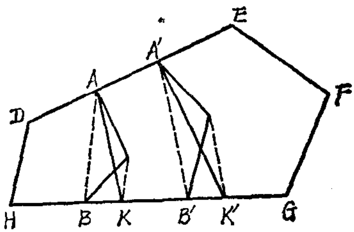
∴ $x^2+4x-5>0$，得$x>1$或$x<-5$。

∵$x<-5$时，lgx无意义。∴本题的解为$x>1$。

3. 两块水田之间有一条曲折的水沟（如图），今要把水沟的两岸变成直线而每块水田的面积不变，

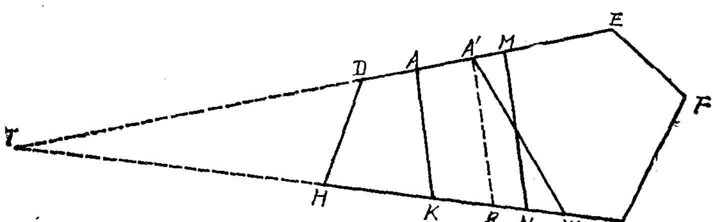
(a)如A，A'两点不变，则水沟应如何配置？

(b)如A点不变，而要求水沟两岸平行，则水沟又应如何配置？各说明其方法。



解：(a)它的要求是把多边形变成边数少2的等积多边形，且A，A'两点不变。作法：联AB，作$CK /\!/ AB$，联AK，仿此作出$A'K'$。

(b)它的要求可从(a)所得的四边形$AA'K'K$变成一等积的梯形$AKNM$使$NM /\!/ AK$。



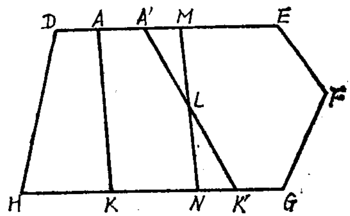
分析：令MN为所求作的线

(1)如DA'不平行于HK'，则延长$A'D$及$K'H$使相交于T，作$A'R /\!/ AK$，$\triangle TA'R \backsim \triangle TMN$，$\therefore \triangle TA'R$的面积：$\triangle TMN$的面积$= TR^2 : TN^2$ 但$\triangle TMN = \triangle TA'K'$，$\therefore \triangle TA'R$的面积：$\triangle TA'K'$的面积$= TR^2 : TN^2$，又$\triangle TA'R$与$\triangle TA'K'$若分别以$TR$与$TK'$为底时，则为等高的三角形，$\therefore \triangle TA'R$的面积：$\triangle TA'K'$的面积$= TR : TK'$

因此得$TR^2 : TN^2 = TR : TK^2$　　$\therefore TN = \sqrt{TR \cdot TK'}$

作法：延长$A'D$与$K'H$相交于T，作$A'R /\!/ AK$，交TK'于R，作TR及TK'的比例中项，并在TK'上截TN等于这个比例中项，作$NM /\!/ RA'$，则NM即为所求水沟的一边。

(2)如$DA' /\!/ HK'$，则只须求$A'K'$的中点L，过L作AK的平行线MN，则$\triangle LMA' \cong \triangle LNK'$ $\therefore MN$即所求水沟的一边。



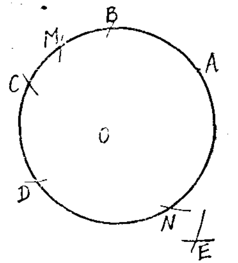
4.设有六位数$1abcde$乘以3后，变为$abcde1$，求这数。

解：令五位数$abcde$为x，则$1abcde = 100000 + x$，$abcde1 = 10x + 1$，得方程$(100000 + x) \cdot 3 = 10x + 1$，$\therefore 7x = 299999$，$x = 42857$。$\therefore$这六位数为142857。

5.作一圆周，要求只用圆规（不许用直尺），把这圆周四等分。

解：令圆心为O，半径为R，在圆周上任取一点A为圆心，以R为半径连续作弧可以得B，C，D等点，则$AB = R$，$AC = \sqrt{3}R$，$AD = 2R$，（因AC是圆内接等边三角形的一边，

而AD是直径）本题的关键是求得$\sqrt{2}R$的长，如果以$\sqrt{3}R$和R分别作为直角三角形的斜边及一直角边，则本题即可解。

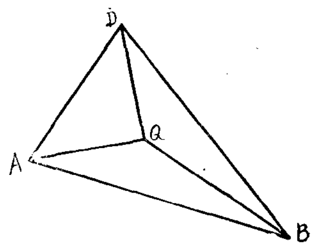


但因不能作出直角、所以需要改变办法，作$2R$为底、$\sqrt{3}R$为腰的等腰三角形；O为底边AD的中点是已知的，则EO为等腰$\triangle ADE$的底边上的高。

$$\therefore \quad EO=\sqrt{3R^2-R^2}=\sqrt{2}R.$$

作法：取圆周上任意点A为圆心，R为半径连续截圆周得B、C、D三点，以A及D分别为圆心，以AC的长（$\sqrt{3}R$）为半径作两弧相交于E，以A为圆心，EO为半径作圆弧交圆周于M及N，则A、M、D、N把圆周四等分。

6.空中有一气球，在它的正西方A点，测得它的仰角为45°，同时在它的正南偏东45°的B点，测得它的仰角为67°30′，A、B两点间的距离为266公尺，这两测点均离地1公尺。问当测量时这气球离地多少公尺？



解：$\angle AQB=135°$，令$DQ=X$，因$\angle DAQ=45°$，则$AQ=X$。

又$BQ=x\,ctg67°30'=x\,tg\,22\frac{1}{2}°$

在$\triangle ABQ$中根据余弦定理得：$AB^2=AQ^2+BQ_2-2AQ\cdot$

$BQ \cdot Cos135°$

即 $266^2 = x^2 + x^2 tg^2 22\frac{1}{2}° + 2x^2 tg22\frac{1}{2}° \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

解之得，$x^2 = 266^2 \cdot \frac{1+cos45°}{3}$，

即 $x = 266\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{6}} \approx 201$(公尺)

因测点离地1公尺，故$201+1=202$（公尺），答：气球离地约202公尺。

〔决　　赛〕

1.从1到100的自然数中，每次取两个数，要它们的和大于100，有多少种取法？

解：把1到100分为1到50和51到100两部分。

当n是1、2、3、……、50时、则取法各为1、2、3、……、50种。

当n是51、52，……100时，则取法各为50，51，……、99种。

但两种取法是重复的所以必须以2除之。

共有取法 $\frac{1}{2}\Big[(1+2+3+\cdots\cdots+50)+(50+51+52\cdots\cdots$

$$+99)\Big] = 2500(种)$$

2.设a_1，a_2，a_3，……a_{n+1}成等差数列，求证

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

又设a_1，a_2，a_3……，a_{n+1}成等比数列，求证

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots\cdots+\sqrt{a_na_{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt[2n]{a_1a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_{n+1}}}(a_1-a_{n+1})。$$

证明：(1)令公差为d，则$a_1-a_2=-d, a_2-a_3=-d,\cdots\cdots$ $a_n-a_{n+1}=-d$，将以上式子两边各相加得a_1-a_{n+1} $=-nd$。

$$\therefore\quad -d=\frac{a_1-a_{n+1}}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{n+1}}}{-d}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{n+1}}}{\dfrac{a_1-a_{n+1}}{n}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}。$$

(2) 令公比为q，则$\dfrac{a_2}{a_1}=q$，$\dfrac{a_3}{a_2}=q$，……，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，

将以上式子两边各相乘得$\dfrac{a_{n+1}}{a_1}=q^n$，　$\therefore q=\sqrt[n]{\dfrac{a_{n+1}}{a_1}}$

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots\cdots+\sqrt{a_na_{n+1}}=\sqrt{a_1^2q}+\sqrt{a_2^2q}+$$
$$\cdots\cdots+\sqrt{a_n^2q}=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\sqrt{q}$$

$$=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\sqrt[m]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}=\frac{a_1\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_1}\right)}{1-\sqrt[n]{\dfrac{a_{n+1}}{a_1}}}\sqrt[m]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}$$

$$=\frac{(a_1-a_{n+1})}{\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_{n+1}}}\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[m]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}$$

$$=\frac{2\sqrt[n]{a_1a_{n+1}}}{\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_{n+1}}}(a_1-a_{n+1})。$$

3．设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$的系数都是整数，并且有一个奇数$\alpha$及一个偶数$\beta$，使得$f(\alpha)$及$f(\beta)$都是奇数，求证方程$f(x)=0$没有整数根。

证明：(1)因β是偶数，则$f(\beta)=a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\beta+a_n=\beta(a_0\beta^{n-1}+a_1\beta^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1})+a_n$。

由于a_0，a_1，a_2，$\cdots\cdots$都是整数，β为偶数，故知第一个加数必为偶数，但$f(\beta)$是奇数，故a_n一定是奇数。

若β'为一偶数，则$f(\beta')=$偶数$+a_n=$偶数$+$奇数$\neq 0$、

∴方程$f(x)=0$，决无偶数根。

(2)因α是奇数，则α^k（k为正整数）也是奇数，而$a_k\alpha^k$是奇数或是偶数，完全由a_k是奇数或偶数而定。

则$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha)+$奇数。

但$f(\alpha)$是奇数故$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha$一定是偶数亦即$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}$必为偶数。

若α'为一奇数，则$f(\alpha')=(a_0\alpha'^n+a_1\alpha'^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha')+a_n=$偶数$+$奇数$\neq 0$，∴方程$f(x)=0$决无奇数根。

综上所述，方程$f(x)=0$没有整数根。

4．设$\triangle ABC$为任意三角形，求证：

(1) $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$

(2) $cosA+cosB+cosC>1$

证明：（1）∵ $(tg\frac{A}{2}-tg\frac{B}{2})^2\geqslant 0$。

$\therefore tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}\geqslant 2tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$， $tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 2tg\frac{B}{2}$ $\cdot tg\frac{C}{2}$， $tg^2\frac{C}{2}+tg^2\frac{A}{2}\geqslant$ $tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$不等式两边各相加，得 $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant tg\frac{A}{2}\ tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}$ $\cdot tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$

又∵ $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\ tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}\ tg\frac{A}{2}=1$，

$\therefore tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$。

（2）由和差化积法很容易证明，

$$cosA+cosB+cosC=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

∵ $\sin\frac{A}{2}$， $\sin\frac{B}{2}$， $\sin\frac{C}{2}$均为正值，

∴ $cosA+cosB+cosC>1$。

5．在已知圆内求作内接等腰三角形，使这等腰三角形的底与其底上的高的和为极大。

已知：圆O，半径为r。求作：于圆O内作内接等腰三角形，使其底和底上的高的和为极大。

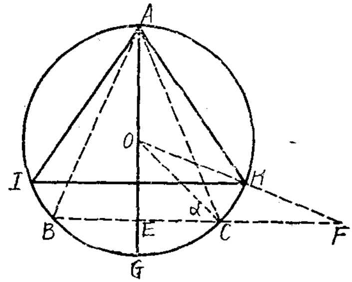
分析：令圆内接等腰$\triangle ABC$高是AE，则AE过圆心O。

令$\angle OCE=\alpha$，则$OE=\gamma sin\alpha$，

$EC=\gamma\cdot cos\ \alpha$.

$BC+AE=2\gamma\cos\alpha+(\gamma+\gamma sin\ \alpha)$

$=\gamma+\sqrt{5}\gamma(\frac{1}{\sqrt{5}}\ sin\ \alpha+\frac{2}{\sqrt{5}}cos\ \ \alpha)$



$=\gamma+\sqrt{5}\gamma(sin\,\alpha\,cos\,\phi+cos\,\alpha\,sin\phi)$

$=\gamma+\sqrt{5}\gamma\,sin(\alpha+\phi)\qquad(\phi=arctg2)$

当$\alpha+\phi=90°$，即$\alpha=90°-\phi$时，$Sin(\alpha+\phi)=1$为最大。即底和底边上的高有极大值$\gamma(1+\sqrt{5})$

这时$tg\ \alpha=tg\ (90^0-\phi)=ctg\ \phi=\frac{1}{2}$

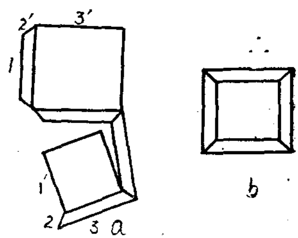
作法：在直径AOG上取任意长OE，作$EF\perp OE$，且令$EF=2OE$。联OF交圆于H，联AH，并在圆上截取AI，使$AI=AH$，联IH，则$\triangle AIH$为所求的三角形。（证明从略）

6.下图是一个立体的展开图，那就是说，适当拼合起来就成一个立体。

问(1)那些线段在拼合时分别与线段1,2,3相重合？请在它们上面用同样数码注出。

(2)这是什么图形？为什么？

解：(1)拼合时1′与1重合，2′与2重合，3′与3重合，（如图）(2)这是一个正四棱台（图b）



因这个多面体共有六个面，上下两底都是正方形、而四个侧面则都是等腰梯形，且互相全等。

二、1956年北京市数学竞赛试题及解答

第 一 试 试 题 和 解 答

1. 证明$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对任何正整数$n$都是整数，并且用 3 除时余 2 。

证明： $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

对任何整数n，$\frac{n(n+1)}{2}$为整数，故原式为整数。(1)式末端又可以写作$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1$，而$2n$，$2n+1$，$2n+2$中至少有一个是3的倍数，又3与 8 互质，所以$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$是能被 3 整除的整数。于是原式等于 3 的整数倍减去 1 ，因而用 3 除它时必余 2 。

2. 设方程$x^2-px+q=0$的两根为γ和s，且它们都不等于 0 。求以$\gamma^2+\frac{1}{S^2}$和$S^2+\frac{1}{\gamma^2}$为根的方程（不必解出原方程）。

解： 所求方程应为$\left[x-(\gamma^2+\frac{1}{S^2})\right]\left[x-(S^2+\frac{1}{\gamma^2})\right]=0$

即 $x^2-(r^2+S^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{S^2})x+(r^2S^2+2+\frac{1}{r^2S^2})=0$ ……(1) 但是r、S是$x^2-px+q=0$的两根，由根与系数的关系，知道$r+S=P$，$r\cdot S=q$，所以

$$r^2+S^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{S^2}=\frac{(r^2S^2+1)(r^2+S^2)}{r^2S^2}$$

$$=\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2},\quad r^2S^2+2+\frac{1}{r^2S^2}$$

$$=q^2+2+\frac{1}{q^2}=(q+\frac{1}{q})^2.$$

将以上结果代入(1)，得方程

$$x^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}x+(q+\frac{1}{q})^2=0。$$

3.试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证： $\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x=2\sin\frac{1}{2}x\cos nx,$

$$\sin(n-\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{3}{2})x=2\sin\frac{1}{2}x\cos(n-1)x,$$

……………………………………………………………

$$\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{1}{2}x\cos x$$

$$\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}),$$

将上面所有等式的两边分别相加，则得

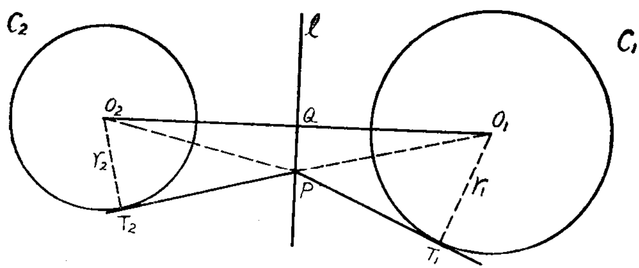
$$\sin(n+\frac{1}{2})x=2\sin\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots$$

$+\cos nx)$,

所以$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$,

4.设C_1、C_2是给定的两个圆，又C_1、C_2不相交，并且一个在另一个的外部。由一点P作C_1、C_2的切线PT_1、PT_2，设$PT_1=PT_2$，求P点的轨迹。

解：设C_1，C_2的圆心分别为O_1、O_2，作$PQ\perp O_1O_2$（或其延长线）交O_1O_2于Q，



则 $O_1P^2=PT_1^2+O_1T_1^2=PT_1^2+r_1^2$,

$O_2P^2=PT_2^2+O_2T_2^2=PT_2^2+r_2^2$,

两式相减，得：

$$O_1P^2-O_2P^2=PT_1^2+r_1^2-PT_2^2-r_2^2=r_1^2-r_2^2.$$

然而 $O_1P^2-O_2P^2=(O_1Q^2+QP^2)-(O_2Q^2+QP^2)$

$=O_1Q^2-O_2Q^2$,

所以 $O_1Q^2-O_2Q^2=r_1^2-r_2^2$.

或者 $(O_1Q+O_2Q)(O_1Q-O_2Q)=r_1^2-r_2^2$.

若两圆互不包含，则Q在O_1、O_2之间，而