普通高等教育"十五"国家级规划教材

线性代数

第二版

郝志峰　谢国瑞　汪国强　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材

线 性 代 数

（第二版）

郝志峰　谢国瑞　汪国强　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是大学本科(非数学)各专业线性代数课程的教材，内容包括线性代数方程组、矩阵、行列式、矩阵的秩和线性代数方程组的解、向量空间初步、矩阵特征值问题等共6章. 全书取材的深广度合适，注意联系应用，符合大学本科教学对本门课程的教学要求与实际需要. 本书的起点较低、材料丰富，内容展开的思路清晰，易读、好教，有利于读者掌握知识、发展思维与提高能力. 书末附有历届硕士研究生入学考试数学试卷中的线性代数试题.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郝志峰，谢国瑞，汪国强主编. —2版. 北京：高等教育出版社，2003.8
ISBN 7-04-011882-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①郝…②谢…③汪… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第046767号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	河北新华印刷一厂		
		版　　次	1999年6月第1版
开　　本	787×960　1/16		2003年8月第2版
印　　张	16.75	印　　次	2003年8月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	17.90元

策　　划　李艳馥

编　　辑　郑洪深

封面设计　张　楠

责任绘图　尹　莉

版式设计　史新薇

责任校对　殷　然

责任印制　孔　源

前　言

这本《线性代数(第二版)》是由原书[①]前5章改编而成,力求更好地符合课程教学需要,为大学本科(工科、经济类等)各专业的线性代数课程提供一本合适的教材.

线性代数是代数学中主要处理线性关系问题的一个分支,以向量空间及其线性变换,以及与此相联系的矩阵理论为中心内容.但对于非数学专业的大学生,线性代数大都是被作为应用数学的基础和重要组成部分来学习的.要求学生在学习线性代数课程之后做到,切实掌握最基础部分的线性代数方程组,理解并能运用矩阵、行列式、向量等数学语言,了解其在描述、简化、解决问题时所起的独特作用,并与其他数学课程的相互联系,共同构筑成终身学习的数学基础.根据这样的认识,我们编就了由目录所示6个章次组成的教材,基本上涵盖了各专业对本门课程的教学要求与实际需要.以最简单的线性问题,解线性代数方程组为线索贯穿全书,矩阵、向量等概念则在讨论中自然地出现,并形成互动地推向纵深的格局;行列式则作为工具,体现了在定义概念、表述理论、给出公式中的重要作用.这样的安排,目的是使学生读来能较为亲切,在课程的进展中因能清楚地意识到在不断提高认识的层次而得到鼓励.此外,本书还有以下一些特点,倘能善加利用,当可提高学习效果:

1. 全书起点较低　从熟知的解线性代数方程组的消元法开始.这样做,应能使所有学生在学习线性代数时从同一起跑线出发.事实上,第一章对许多学生来说可能都只是个简要的回顾.

2. 应用示例较多　线性代数中的概念较多,而且往往只是简单的定义,无从解释意义(与导数、积分等概念很不一样),书中辅以较多的应用示例及与相近数学课程联系的内容,力求使内容显得较为丰满,不觉干瘪枯燥.

3. 定理证明的结束有明显的标记号▌　线性代数有许多的定理,这些往往成为学生学习上的难点.但作为课程的要求,大都只是要求了解或掌握定理的内容而未必是其证明.对证明结束给出明显标志,可为读者带来方便,在初读时,对大多数的定理均可直接越过证明往下读,到有必要时再回过来看证明的细节.而掌握定理的内涵,主要应通过运用定理去证明推论、解决问题,这些当然是在初

---

① 原书是参考书目[5],由8章内容组成.该书曾获2001年上海市教学成果奖(二等奖),教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖.

学时就必须引起足够重视的.初读时越过大段的证明,不仅可避开一些不应有的难点,而且也有利于较好地掌握理论的全貌,有效地提高学习兴趣.

4. 系统使用 * 号标记和指出参考书目 学生在学习线性代数时,常会因发现在其他领域的应用或与其他数学课程的联系而受到鼓舞①.但学时有限、教材篇幅也有限,这里用带 * 号的节、段等表示此为应用性的材料或与相近数学课程有联系的材料,若因时间不够暂且搁下不读是无损于连贯性的.在一些场合,学生可能因感到教材内容应有所发展而心存疑窦,这时就用指出参考书目来引领学生迈出新的一步.

5. 附有历届硕士研究生入学考试的线性代数试题 让学生在初次学习课程时就接触这些试题有助于学生测试自己的水平,以正确定位.而按年份先后录入试题,不仅给出了考研要求的具体体现,而且从中还可探索试题演变的信息.

最后,我们要对教育部高教司的领导和专家组的专家给予我们以编写这本国家级规划教材的荣誉和信任表示由衷的感谢,也要对高等教育出版社及理工分社的各位领导的支持表示感谢.在本书的成书过程中,曾获得全国教育科学“十五”规划重点课题(高水平大学数学教育特点的研究与实践,课题编号为 DIA010305)、全国高等学校教学研究会研究课题(国家教学基地优秀教学成果的总结与推广,课题编号为 C227)、2001—2002 年度广东省哲学社会科学规划立项课题(建构和推进广东省大学数学创新教育体系的研究与探索,课题编号为 H28)、教育部“新世纪网络课程建设工程”项目(大学数学系列课程,项目编号为 14410011)和华南理工大学研究生教育与学科建设课题(高水平理工大学研究生培养的数学素质要求与培养模式的研究与实践,课题编号为 121 - N71650)等项目研究的资助,并得到华南理工大学、学校教务处、华南理工大学国家工科基础课程数学教学基地的支持,在此也一并致谢.

参加本书编写的有郝志峰、谢国瑞、汪国强、刘丽萍、陈洁蓓等.囿于编者们的水平和见闻,书中难免留存错、漏或欠妥之处,敬请专家、读者批评指正.

编者

2003 年 2 月

① 编者曾经历,有学生在学习数学物理方程中斯图姆 - 刘徽尔(Sturm - Liouville)理论时,因发现那里与本书习题 6 - 17 的 **A** 具类似的性质(特征向量规范、正交、生成全空间),而导致解决问题的方法几乎就是解 6 - 17 的线性代数方程组方法的推广而兴趣倍增.

目　　录

第 1 章　线性代数方程组(消元法) ………… (1)
1.1　解线性代数方程组的消元法 ………… (1)
1.1.1　二元线性代数方程组(1)　1.1.2　高斯 - 若尔当消元法(3)
1.2*　应用举例 ………… (9)
习题 1 ………… (15)
第 2 章　矩阵 ………… (18)
2.1　基本概念 ………… (18)
2.1.1　矩阵概念(18)　2.1.2　一些特殊的矩阵(19)
2.1.3*　矩阵问题的例(21)
2.2　基本运算 ………… (23)
2.2.1　定义(23)　2.2.2　运算规则(29)
2.2.3　矩阵应用的例(34)
2.3　逆矩阵 ………… (36)
2.3.1　可逆矩阵(37)　2.3.2　正交矩阵(40)
2.4　矩阵的分块　子矩阵 ………… (42)
2.4.1　分块运算(42)　2.4.2　矩阵的按列分块(44)
2.4.3　子矩阵(47)
2.5　初等变换与初等矩阵 ………… (48)
2.5.1　定义与性质(48)　2.5.2　矩阵的等价标准形分解(51)
2.5.3　再论可逆矩阵(53)　2.5.4　$n \times n$ 线性代数方程组的惟一解(57)
2.6*　应用(投入产出分析) ………… (60)
习题 2 ………… (63)
第 3 章　行列式 ………… (67)
3.1　行列式的概念和性质 ………… (67)
3.1.1　概念(67)　3.1.2　性质(70)
3.2　行列式值的计算 ………… (78)
3.3　若干应用 ………… (86)
3.3.1　转置伴随阵　逆阵公式(86)　3.3.2　克拉默法则(90)
3.3.3*　概述(93)
习题 3 ………… (95)

第 4 章 矩阵的秩和线性代数方程组的解 ………………………… (97)
4.1 矩阵的秩 ……………………………………………… (97)
4.1.1 概念(97) 4.1.2 计算(99)
4.2 线性代数方程组的解 ……………………………………… (103)
4.2.1 齐次方程组(103) 4.2.2 非齐次方程组(107)
习题 4 ……………………………………………………… (115)
第 5 章 向量空间初步 ……………………………………… (117)
5.1 基本概念 ……………………………………………… (117)
5.2 向量组的线性相关性 ……………………………………… (121)
5.2.1 概念(121)、5.2.2 性质(125) 5.2.3 向量组的秩(131)
5.2.4 矩阵的行秩和列秩(133)
5.3 向量空间的基和维 ……………………………………… (137)
5.3.1 基和维(137) 5.3.2 再论线性代数方程组的解(142)
5.4 向量的内积 ……………………………………………… (148)
5.4.1 复习(148) 5.4.2 内积 再论正交阵(149)
5.4.3* 四个基本子空间(154)
习题 5 ……………………………………………………… (156)
第 6 章 矩阵特征值问题 ……………………………………… (158)
6.1 特征值与特征向量 ……………………………………… (158)
6.2 矩阵对角化 ……………………………………………… (163)
6.2.1 相似矩阵和矩阵的对角化问题(163) 6.2.2* 应用示例(168)
6.3 实对称矩阵 二次型 ……………………………………… (176)
6.3.1 实对称矩阵的相似标准形分解(176) 6.3.2 二次型(185)
6.3.3 化二次型成标准形(187)
6.4 二次型的分类 正定矩阵 ………………………………… (200)
6.4.1 正定矩阵(200) 6.4.2* 函数最优化(206)
6.4.3* 广义特征值问题 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{Bx}$(207)
习题 6 ……………………………………………………… (210)
习题答案 ………………………………………………………… (214)
参考书目 ………………………………………………………… (235)
附录 历届硕士研究生入学考试数学试卷中的线性代数试题 ……… (236)

第 1 章　线性代数方程组(消元法)

历史上,线性代数的第一个问题是关于解线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

的问题.我们就从用消元法解最简单的二元线性代数方程开始讨论这一应用十分广泛的课题,并从而看出研究矩阵的必然性.

1.1　解线性代数方程组的消元法

1.1.1　二元线性代数方程组

在平面直角坐标中,二元线性方程的图像(坐标能满足方程的点集)是条直线.例如,方程

$$2x + y = 8 \text{ 即 } y = 8 - 2x$$

在将它的两个解$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$在坐标平面上用点表示后,联线即得此方程的图像(图 1-1).事实上,此直线上任一点的坐标正是该方程的一个解,反之,以方程的任一解作为坐标,也正是这直线上的一个点.这样从几何上也看出一个二元线性方程有无限多解的事实.

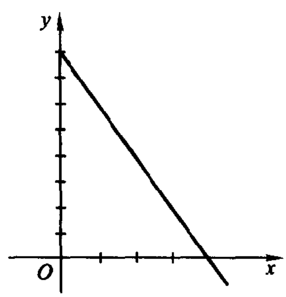


图 1-1

在实际问题中常要对同时出现的若干个线性方程作为一个整体来考虑,需求出满足所有方程的未知数,这就是解线性代数方程组.例如,将

$$x + y = 3 \tag{1-2}$$

$$2x - 3y = -4 \tag{1-3}$$

两个方程作为整体来讨论,就成一**线性方程组**(system of linear equations).(1-2)是方程组的第 1 个方程,而(1-3)是第 2 个方程.对于线性方程组,其重要的求解方法是消元法,即通过对方程组作**同解变形**(或称**等价运算**或**变形**)使

各个方程变成分别各含一个未知数(也称变量),并能求出其值,从而得到整个方程"组"的解,这个解当然地应该也是由数组表示的.

方程组的**等价变形**有以下三类:

1. 交换组内任两个方程的次序(或编号);
2. 任一方程乘一非零常数;
3. 任一方程经数量倍(即在两端乘同一常数)后加到另一方程去.

例 1 试用方程组等价变形法,解方程组

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1-2) \\ 2x - 3y = -4 & (1-3) \end{cases}$$

解 作第 3 类变形,将(1-2)乘(-2)后加到(1-3)去,得到

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1-2) \\ -5y = -10 & (1-3') \end{cases}$$

这是与原方程组同解的.在(1-3′)两端乘$\left(-\frac{1}{5}\right)$,得

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1-2) \\ y = 2 & (1-3'') \end{cases}$$

再作第 3 类变形,将(1-3″)乘(-1)后加到(1-2)去,得

$$\begin{cases} x = 1 & (1-2') \\ y = 2 & (1-3'') \end{cases}$$

这显然与原给方程组也同解,但目前已到了明显表出解的境地,故方程组的解是 2 维数组$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

线性代数方程组的解有三种可能的情形:具有确定的解;无解;或者有无限多个解.

例 2 试用方程组等价变形,解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 & (1-3) \\ -4x + 6y = 2 & (1-4) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形,将(1-3)乘 2 后加到(1-4)去,得

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 & (1-3) \\ 0x + 0y = -6 & (1-4') \end{cases}$$

如果方程组有解则必成立

$$0 = -6 \qquad (1-4')$$

而这是不可能的,故知方程组无解.

例 3 试用方程组等价变形,解方程组

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 & (1-3) \\ -4x + 6y = 8 & (1-5) \end{cases}$$

解 作第 3 类等价变形，将(1-3)乘 2 后加到(1-5)去，得等价方程组

$$\begin{cases}2x-3y=-4 & (1-3)\\ 0x-0y=0 & (1-5')\end{cases}$$

这时的方程(1-5′)是个平凡等式 0=0，于是未知数 x、y 所应适合条件的信息，从方程组变成等价的实质上只是单个方程

$$2x-3y=-4 \qquad (1-3)$$

而这又等价于

$$y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x$$

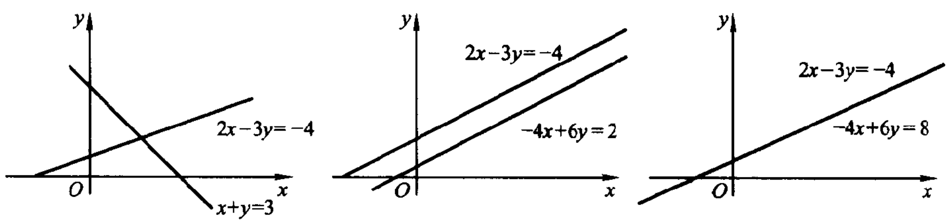
这样，题给方程组有无限多个解，解集是$\left\{\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}\middle| k\in\mathbf{R}\right\}$或迳表成解为

$$\begin{cases}x=k\\ y=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{cases}\quad k \text{ 是任意实数},$$

写作

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}, k \text{ 是任意实数}.$$

如图 1-2(a)、(b)、(c)分别显示例 1、2、3 三个二元线性方程组解的三种状况之几何意义：



(a) 一对相交直线有惟一公共点 (b) 一对平行直线无公共点 (c) 一对重合直线每一点都是公共点

图 1-2

练习 1 解下列方程组，并给出几何解释：

(1) $\begin{cases}x+y=9\\ x-y=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x+3y=13\\ 5x-2y=4\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-y=2\\ -6x+2y=1\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x+3y=4\\ -4x-6y=-8\end{cases}$

1.1.2 高斯-若尔当消元法

将未知数个数相等的多个线性方程看成一个整体，称为**线性方程组**. 若一个

方程组含有 m 个方程、n 个未知数,常简称为 $m\times n$ **方程组**.$m\times n$ 方程组的解应是 n 维数组,将解数组各个分量依序代未知数时能使 m 个方程全部成立.

回顾上一段,用三类等价运算解 2×2 方程组的过程,那里是依照这样的目标进行的:通过三类等价运算,先用第 1 个方程,将方程组第 1 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 1 个方程中成 1,其他方程中全为 0;再用第 2 个方程将第 2 个未知数在各个方程中的系数变成只在第 2 个方程中成 1,其他方程中全为 0,如此等等.由于整个过程只是通过方程组等价运算变各个方程的系数,为简化计,可省写未知数,用列表形式凸现其系数的变化过程.可将例 1 的计算重现于下:表 1 给出的例 1 的原方程组,r_1 是第 1 行(row)是方程(1-2)的系数,r_2 是第 2 行是方程(1-3)的系数,而常数列(column)由方程右端的常数组成.

表 1

	x	y	常数列
r_1	1	1	3
r_2	2	-3	-4

经等价运算 $r_1\times(-2)+r_2$,得

表 2

r_1	1	1	3
r_2'	0	-5	-10

经运算 $r_2'\times\left(-\frac{1}{5}\right)$,得

表 3

r_1	1	1	3
r_2''	0	1	2

经运算 $r_2''\times(-1)+r_1$,得

表 4

r_1'	1	0	1
r_2''	0	1	2

第 1 个未知数 x 列的位置成$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,第 2 个未知数 y 列的位置成$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,因原方程组与表 4 代表的方程组

$$x=1$$
$$y=2$$

同解,故这就是方程组的解,或者说,此时常数列位置成为方程组的解$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

这样求方程组解的方法称为**消元法**(elimination)或一般称为**高斯**[①]-**若尔当**[②](Gauss-Jordan)**消元法**.

例 4 用高斯-若尔当消元法解 3×3 方程

$$\begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ 3x+2y+2z=9 \\ 2x-3y-3z=6 \end{cases}$$

解 按上列步骤,列表运算如下:

		x	y	z		
表 1	r_1	①	-2	2	-1	
	r_2	3	2	2	9	$\times(-3)$
	r_3	2	-3	-3	6	$\times(-2)$
表 2		1	-2	2	-1	
		0	8	-4	12	
		0	1	-7	8	
表 3		1	-2	2	-1	
		0	①	-7	8	
		0	8	-4	12	$\times(-8)$
表 4		①	-2	2	-1	
		0	①	-7	8	
		0	0	52	-52	$\times\left(\frac{1}{52}\right)$

① Gauss,Carl Friedrich 是德国 18、19 世纪之交(1777 年 4 月 30 日生于德国不伦瑞克,1855 年 2 月 23 日卒于格丁根)最伟大的数学家、天文学家和物理学家,是近代数学的奠基人之一.在历史上被誉为和阿基米德、牛顿并列,同享盛名.高斯自小就表现出非凡的数学思维能力,是老师和长辈们心目中的“神童”,并终因其卓越成就而被世界数学家称为“数学王子”.

当然,高斯被认为是最伟大的数学家之一,决非由于这个简单的消元法,但有意思的是,正因为这个消元法而使高斯的名字最常被人们提到.

② Jordan ,Camille 法国著名数学家,1838 年 1 月 5 日生于法国里昂的一个名门望族,17 岁以优异成绩考入巴黎综合工科学校,1861 年发表博士论文于《综合工科学校杂志》,他在 1881 年被选为法兰西科学院院士,1895 年又被选聘为彼得堡科学院院士.1921 年 1 月 21 日逝世于巴黎.

表 5

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

$\times(7)$　$\times(-2)$

表 6

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

$\times(2)$

表 7

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

这就得到方程组的解是$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

从计算过程看出,在表 1 中是利用带圈的数字 1 将第 1 列即 x 所在列变成$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$的,在表 3 中,是利用带圈数字 1 将其下的 8 变成 0,从而第 2 列成$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,称表 4 中三个带圈数字(位置)是第 1、2、3 次消元的**主元(位置)**,而表 2 中进行的将第 2、3 行交换位置相当于不愿把数字 8 作第 2 次消元的主元,而要用数字 1 作为主元,故做交换两行位置这件事相当于**选**主元. 而选主元的目的可以是为了便于运算的进行(像本例就是),或是为了提高运算的精度,也可能是迫不得已而为之.

例 5　试用高斯-若尔当消元法(常简称 **$G-J$ 消元法**)解方程组

$$\begin{cases} -3x+7y+2z=3 \\ 2x+4y-3z=-1 \\ x-3y+7z=2 \end{cases}$$

解　将上例的表解过程写成更紧凑的简化形式,有

	x	y	z		等价运算	记　号
	-3	7	2	3		
	2	4	-3	-1		r_{13}
	1	-3	7	2		

续表

x	y	z		等价运算	记号
①	-3	7	2	$\times(-2)$ $\times(3)$	$r_{12}(-2)$
2	4	-3	-1		
-3	7	2	3		$r_{13}(3)$
1	-3	7	2	$\times(3)$	$r_2\left(\frac{1}{10}\right)$
0	⑩	-17	-5	$\times\left(\frac{1}{10}\right)$ $\times(2)$	$r_{21}(3)$
0	-2	23	9		$r_{23}(2)$
1	0	$\frac{19}{10}$	$\frac{1}{2}$		$r_3\left(\frac{10}{196}\right)$
0	1	$-\frac{17}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\times\left(-\frac{19}{10}\right)$	$r_{32}\left(\frac{17}{10}\right)$
0	0	$\frac{196}{10}$	8	$\times\left(\frac{10}{196}\right)$ $\times\left(\frac{17}{10}\right)$	$r_{31}\left(-\frac{19}{10}\right)$
1	0	0	$-\frac{27}{98}$		
0	1	0	$\frac{19}{98}$		
0	0	1	$\frac{20}{49}$		

故方程组的解是 3 维数组,横写成行是$\left(-\frac{27}{98},\frac{19}{98},\frac{20}{49}\right)$.即解为

$$x=-\frac{27}{98},y=\frac{19}{98},z=\frac{20}{49}$$

在表中已对方程组所作的等价运算用了今后通用的简记法:

1. 对第 1 类运算记成如 r_{13},表示将组内的第 1、第 3 个方程(即表的第 1、第 3 行)交换位置.

2. 对第 2 类运算记成如 $r_2\left(\frac{1}{10}\right)$,表示将第 2 个方程(即表的第 2 行)乘常数$\frac{1}{10}$.

3. 对第 3 类运算记成如 $r_{12}(-2)$,表示将组内第 1 个方程乘常数(-2)后加到组内第 2 个方程去(这样,改变了组内的第 2 个方程的形式,第 1 个方程没有改变).

例 6 试用 $G-J$ 消元法解方程组

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-3y-z=7 \\ 5x-8y-z=20 \end{cases}$$

解 列表计算如下:

x	y	z		
①	−2	1	3	$r_{12}(-2)$
2	−3	−1	7	
5	−8	−1	20	$r_{13}(-5)$
1	−2	1	3	$r_{21}(2)$
0	①	−3	1	
0	2	−6	5	$r_{23}(-2)$
1	0	−5	5	
0	1	−3	1	
0	0	0	3	

到这里,已知题给方程组与方程组

$$\begin{cases} x-5z=5 \\ y-3z=1 \\ 0\qquad =3 \end{cases}$$

等价,此方程组因含有“0 = 3”这样永远不能成立的方程而无解.故题给方程组无解.常称无解的方程组为**矛盾方程组**或**不相容方程组**.

例 7 试用 $G-J$ 消元法解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y-3z=-6 \\ -x-\ y+2z=4 \\ x+2y+\ z=2 \end{cases}$$

解 列表计算如下:

x	y	z		
3	4	−3	−6	
−1	−1	2	4	r_{13}
1	2	1	2	
①	2	1	2	$r_{12}(1)$
−1	−1	2	4	
3	4	−3	−6	$r_{13}(-3)$
1	2	1	2	$r_{21}(-2)$
0	①	3	6	$r_{23}(2)$
0	−2	−6	−12	
1	0	−5	−10	
0	1	3	6	
0	0	0	0	

至此要进行第 3 次消元时，主元位置上是 0，而且无法通过交换方程来改选主元，因为这是方程组里最后一个方程的位置，若将前面方程往下挪，则将破坏前二次消元的成果，这是不允许的. 所以只能结束消元运算，说明原方程组与方程组

$$\begin{cases} x - 5z = -10 \\ y + 3z = 6 \end{cases}$$

同解，这个方程组明显有无限多个解. 事实上，分别地解出 x，y，有

$$x = -10 + 5z$$
$$y = 6 - 3z$$

而 z 是可任意取值的，于是，可将这个方程组的无限多个解表成

$$\begin{cases} x = -10 + 5k \\ y = 6 \quad\ \ - 3k \\ z = \qquad\quad\ k \end{cases} k \text{ 为任意数，或} \left\{ \begin{bmatrix} -10+5k \\ 6-3k \\ k \end{bmatrix} \middle| k \in \mathbf{R} \right\}$$

或迳表作 $\begin{bmatrix} -10+5k \\ 6-3k \\ k \end{bmatrix}$，其中 k 可取任意数. 令 k 取不同的值就可得到这个方程组的不同的具体解.

通过以上各例可看出，与 2×2 方程组一样，对一般的 $m \times n$ 线性方程组，其解的情况也有三种：有惟一确定的解，有无限多个解，或者无解，三者必居其一. 我们将在第 4 章再一次说明成立这个结论. 今后，对前面两种情形，即有解的方程组称为**相容方程组**，而称无解的方程组为**不相容方程组**或**矛盾方程组**.

练习 2 用 $G-J$ 消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = -2 \\ -2x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2s + t - u = 2 \\ 3s - 2t + u = 7 \\ s - 3t - 2u = -7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 4x + 4y + 7z = 33 \\ 2x + 5y + 12z = 48 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y + z + w = 0 \\ 3x + 3z - 4w = 7 \\ x + y + z + 2w = 6 \\ 2x + 3y + z + 3w = 6 \end{cases}$

1.2* 应用举例

例 8 (费用分摊问题)设一个公司有 3 个生产部门 P_1，P_2，P_3 及 4 个管理部门 M_1，M_2，M_3，M_4. 公司规定，每个管理部门的费用由生产部门及其他管理部门分摊，分摊的比例由管理服务量确定，如下表所示：