21世纪高等院校计算机专业系列教材

离散数学

主 编 张三元
副主编 陈锦辉 金义明
主 审 金一庆

浙江科学技术出版社

21世纪高等院校计算机专业系列教材

离散数学

主　编　张三元

副主编　陈锦辉　金义明

主　审　金一庆

浙江科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张三元主编；陈锦辉，金义明副主编；金一庆主审. —杭州：浙江科学技术出版社，2002.1

21世纪高等院校计算机专业系列教材

ISBN 7-5341-1705-4

Ⅰ.离…　Ⅱ.①张…②陈…③金…④金…　Ⅲ.离散数学-高等学校-教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第084872号

丛书名	21世纪高等院校计算机专业系列教材
书　名	**离散数学**
主　编	张三元
副主编	陈锦辉　金义明
主　审	金一庆
出　版	浙江科学技术出版社
印　刷	杭州出版学校印刷厂
发　行	浙江省新华书店
制　作	浙江科学技术出版社计算机图书工作室
编辑部	0571-88994126
发行部	0571-88994123
电子信箱	hzzjkj@mail.hz.zj.cn
开　本	787×1092 1/16
印　张	15.25
字　数	370 000
版　次	2002年1月第1版
印　次	2002年1月第1次印刷
书　号	**ISBN 7-5341-1705-4/O·35**
定　价	**22.00元**
责任编辑	熊盛新　林嫒媛
封面设计	潘孝忠

序

社会已进入 21 世纪，中国已加入 WTO，信息产业虽然处在调整时期，但仍呈现出强劲的发展势头，不同层次的计算机技术仍然是供不应求。加之，中国的高等教育迅速从精英教育向大众化教育过渡，大学入学率大幅度提高，单一的人才培养模式受到前所未有的冲击。客观环境的变化对大学计算机教育提出了新的要求，不同层次的学校的培养模式呈现多样化的状态。人们普遍感到现行的计算机专业教材不能适应这种新形势和新要求。

面对计算机教育的发展，一些普通高等学校的计算机专家聚集在一起，研究了如何应对的问题。专家们一致认为非常有必要编写一套适合于一般的本科院校学生使用的计算机专业系列教材，这套教材应具有以下特点：

1. 反映计算机技术的新进展；
2. 突出技术性、实用性；
3. 适应教学改革形势，教材要便于自学，增加学生上机实践，增加学生参与的机会；
4. 适应普通高校的学生的实际情况，深入浅出、通俗易懂、文字通顺。

鉴于以上考虑，浙江大学、浙江工业大学、浙江师范大学、杭州电子工学院、杭州商学院、杭州师范学院、浙江林学院等院校组成了教材编写委员会，明确指导思想、教材特色和编写规范，落实了每本教材的主编、主审，确保整套教材的质量。

这套系列教材包括：《微机原理》、《编译原理》、《操作系统》、《数据库系统原理》、《离散数学》、《汇编语言》、《计算机网络》、《数据结构》、《计算机组成与结构》、《单片机原理》、《软件工程》和《接口技术》。上述各册书将于 2002 年 6 月底前出版，以满足有关高等学校的教学要求。在这套教材编写、出版过程中，编委会的工作得到了浙江科学技术出版社的大力支持，得到了有关高等院校领导和教师的通力合作，在此，对他们的敬业精神，对他们的辛勤劳动，表示衷心的谢意。

希望这套计算机专业系列教材能对计算机教育大众化提供新的支持，能成为广大学生喜爱的教材和参考用书。

由于时间有限，收集的资料和最新成果很难面面俱到，各册教材肯定还会存在不足和疏漏，恳请广大读者和师生提出批评建议。

前　言

在刚刚过去的20世纪里，人类在科学和技术领域取得了前所未有的辉煌成就，而计算机科学和技术无疑是这些成就中的璀璨明珠。在关于《人类过去2000年最伟大的发明》的世界范围内的网上抽样调查表示，计算机的发明得票率遥遥领先于其他的发明。由于计算机科技的迅猛发展，信息全球化的浪潮已经激荡到当今社会的各个角落，我们已经置身于以信息爆炸为特征的知识经济时代。当我们享受计算机和互联网给我们带来的便利和新奇的时候，我们这些选择计算机科学技术为职业和研究目标的人们，有必要关心和了解计算机赖以存在的理论基础。离散数学正是这样一门揭示了计算机科学许多内在本质的学科。

离散数学像计算机科学本身一样是一门非常年轻的学科。在1980年前后，全世界所有大学里还没有一本像样的离散数学教材，尽管这20年来在美国数学学会、国际电力电子学会、国际计算机学会的大力推动下，它发展很快，其基本内容已经确定下来，但是它还不十分完善，一直随着计算机技术的发展，处在动态的变化之中。

离散数学的研究对象到底是什么呢？离散数学主要涉及这样的过程：它包含一系列离散的、单个的步骤。它关注每一个分开的步骤以及它们之间的前后次序。它与微积分有着本质的差别，因为微积分处理不断变化的连续过程。微积分是工业革命时代科学和技术的基础，而离散数学是计算机时代信息技术的基础。

近几年来，我国高等教育获得了迅猛的发展，其带来的一个非常明显的特征是大学教育开始从培育社会精英到培养高素质公民转变，高等教育的目标之一是向社会输送适应当今社会需求的专业技术人员。由此带来的不仅是办学规模的扩大，办学层次也日益增多。计算机技术及信息技术，无疑是各层次高等教育中的亮点，学习计算机和信息技术的学生迅猛增加，对计算机类教材的需求也急剧增长。正是为了满足这种不同层次的需求，我们在多年教学实践的基础上写成了这本书。

离散数学是计算机及信息学科专业的必修课，通过长期的教学实践，我们发现离散数学是一门既难教又难学的课程，它的基本内容是数学知识，但是它的许多应用是面向计算机学科，而且学习这门课的学生也几乎都来自学习计算机及信息电子专业的。尽管现在离散数学教材非常多，但教材内容及叙述方式没有太大的变化，与传统的数学课程非常类似。但是，近年来西方发达国家离散数学教材已经出现多样化的趋势，淡化离散数学的严密数学证明，而将最新的计算机发展成果结合到教材中去，这样的教材得到学生的普遍欢迎。有鉴于此，这本教材也希望在教学内容上有所突破，同时，在编写这本教材时，充分考虑到其读者群体是二级学院及成人本科层次，在内容选取的广度和深度上，使其与学院一二年级的学生知识水平相适应，同时又能满足计算机及信息专业后续课程学习的需要。

这本教材中包括以下5个部分：集合论，数理逻辑，计数，图论，布尔代数。在内容的叙述上，尽量减少抽象概念的罗列。对于比较抽象的重要概念，我们尽量通过图示和例子来解释和说明；对于比较复杂的公式和定理，我们尽量对它的前提和应用给出清楚的说明，而略去复

杂的证明过程；对于比较复杂的重要算法，给出了详细的算法描述及实现步骤。每个章节都有大量与内容相适应的例题，所选的例题由浅入深，并对一些典型例题给出了多种解法及思考分析过程。在每个章节的后面都配有综合例题，以检查读者对本章所学内容的融会贯通能力和综合分析运用能力。本书所选的习题量多且具有一定的代表性，并在书末给出了习题的答案。本书集合论、二元关系（第 1 章、第 2 章）由陈锦辉完成；图论（第 3 章、第 4 章）由金义明完成；数理逻辑（第 5 章）由王维维完成；计数（第 6 章）由张三元完成；代数系统（第 7 章）由陈锦辉与李光辉完成；曾抗生教授作为本书的学术指导，一直关心本书的写作，提出了许多建设性的意见。

金一庆教授首先审定了本书的内容提纲，确立了本书的基本内容。在本书初稿完成以后，金教授又进行了详细的审阅，提出了宝贵的建议，使本书增色不少，在此编者表示衷心的感谢。同时，编者还要感谢浙江科学技术出版社对本书的大力支持。

本书既可以作为计算机专业的本科和专科教材，也可以作为计算机水平考试的参考书；由于本书比较浅显易懂，例题、习题量多且具有一定的代表性，对欲参加自学考试的读者而言肯定受益匪浅。根据我们多年的教学经验，本书的教学可安排 60～80 学时。

本教材得到浙江大学城市学院教材建设基金与浙江大学成人教育学院教材建设基金资助。

由于我们的水平有限，书中的错误与不妥之处，恳望读者指正。

编 者

2001 年 12 月

目　录

第 1 章　集合论 …… 1
§1.1　集合的概念 …… 1
1.1.1　集合的表示 …… 1
1.1.2　集合与集合之间的关系 …… 2
§1.2　集合的运算与性质 …… 4
1.2.1　集合的基本运算 …… 4
1.2.2　集合的运算律 …… 7
§1.3　集合元素的计数 …… 9
1.3.1　容斥原理 …… 9
1.3.2　推广的容斥原理 …… 10
§1.4　集合的特征函数与范式 …… 13
1.4.1　集合的特征函数 …… 13
1.4.2　集合的编码 …… 15
1.4.3　集合的成员表与范式 …… 16
§1.5　集合的卡氏积 …… 18
综合例题 …… 20
习题一 …… 23
第 2 章　二元关系 …… 27
§2.1　二元关系 …… 27
2.1.1　二元关系的定义 …… 27
2.1.2　二元关系的表示 …… 29
§2.2　二元关系的运算与性质 …… 32
2.2.1　二元关系的定义域与值域 …… 32
2.2.2　二元关系的运算 …… 34
2.2.3　二元关系的性质 …… 38
§2.3　闭　包 …… 40
§2.4　等价关系 …… 43
§2.5　偏序关系 …… 47
§2.6　函　数 …… 51
综合例题 …… 53
习题二 …… 58
第 3 章　图的基本概念 …… 62
§3.1　图的定义和分类 …… 62
3.1.1　图的定义 …… 62

3.1.2 图的分类 63
3.1.3 结点的度数 64
3.1.4 子图与补图 65
3.1.5 图的同构 67
§3.2 路径、回路和连通性 68
3.2.1 路径与回路 68
3.2.2 可达性 69
3.2.3 连通性 70
§3.3 图的矩阵表示 72
3.3.1 邻接矩阵 72
3.3.2 可达性矩阵 73
§3.4 欧拉图 75
§3.5 哈密尔顿图 78
3.5.1 哈密尔顿回路与哈密尔顿路 78
3.5.2 “货郎担”问题 80
综合例题 81
习题三 84
第 4 章 一些特殊的图 88
§4.1 树 88
4.1.1 无向树及其性质 88
4.1.2 生成树 90
4.1.3 根树及其应用 92
§4.2 二部图 96
§4.3 平面图与欧拉公式 99
4.3.1 平面图的概念 99
4.3.2 欧拉公式 100
4.3.3 库拉托夫斯基(Kuratowski)定理 102
*4.3.4 图的着色 102
综合例题 104
习题四 106
第 5 章 数理逻辑初步 109
§5.1 前 言 109
5.1.1 什么是数理逻辑 109
5.1.2 数理逻辑的主要内容 109
5.1.3 与计算机科学的关系 109
5.1.4 本章主要内容 110
§5.2 命题与连接词 110
5.2.1 命题与连接词 110
5.2.2 用符号表示命题 111

5.2.3　复合命题与逻辑连接词 …… 111
§5.3　命题公式与翻译 …… 114
5.3.1　合式公式(wff) …… 115
5.3.2　命题的形式化(翻译) …… 115
§5.4　命题公式的解释及逻辑等值式 …… 116
5.4.1　命题公式的解释 …… 116
5.4.2　逻辑等值式 …… 118
§5.5　重言蕴涵与逻辑推理 …… 120
5.5.1　重言蕴涵 …… 120
5.5.2　简单的逻辑形式推理 …… 122
§5.6　命题逻辑的范式及其应用 …… 123
5.6.1　主析取范式 …… 123
5.6.2　主合取范式 …… 125
5.6.3　主析取范式与主合取范式的关系 …… 127
§5.7　谓词与量词 …… 128
§5.8　谓词公式 …… 129
5.8.1　谓词公式的符号化 …… 129
5.8.2　谓词公式的合式公式 …… 132
5.8.3　谓词公式的解释 …… 134
§5.9　数学演绎 …… 135
5.9.1　几个概念 …… 135
5.9.2　数学演绎 …… 136
§5.10　归结证明 …… 139
综合例题 …… 139
习题五 …… 143
第6章　计　数 …… 146
§6.1　基本计数原理 …… 146
6.1.1　加法原理 …… 146
6.1.2　乘法原理 …… 147
§6.2　鸽巢原理 …… 149
§6.3　排列与组合 …… 151
6.3.1　排　列 …… 151
6.3.2　组　合 …… 151
6.3.3　重复排列 …… 152
6.3.4　重复组合问题 …… 153
§6.4　递推关系 …… 154
6.4.1　齐次线性递推关系 …… 155
6.4.2　非齐次线性递推关系 …… 157
综合例题 …… 158

习题六 …… 162
第 7 章 代数系统和群论 …… 164
§7.1 代数系统 …… 164
7.1.1 二元运算及性质 …… 164
7.1.2 二元运算的性质 …… 166
7.1.3 代数系统的零元、单位元和逆元 …… 167
§7.2 群 …… 169
7.2.1 半群和幺半群 …… 169
7.2.2 群 …… 170
7.2.3 子 群 …… 173
7.2.4 置换群 …… 175
§7.3 群的同态与同构 …… 176
§7.4 环与域 …… 179
§7.5 格与布尔代数 …… 182
7.5.1 格与格代数 …… 182
7.5.2 布尔代数 …… 184
综合例题 …… 187
习题七 …… 191
习题解答 …… 194
习题一解答 …… 194
习题二解答 …… 201
习题三解答 …… 208
习题四解答 …… 212
习题五解答 …… 217
习题六解答 …… 222
习题七解答 …… 225

第 1 章　集合论

集合论起源于 16 世纪末期对“数”的研究，目的是为微积分学寻求坚实的理论基础。19 世纪，康托(Contor)提出了基数，序数概念以及连续统假设等，为集合论奠定了基础。在经历了第 3 次数学危机后，集合论迅速发展成为一门独立的学科，成为现代各个数学分支的共同基础，同时还渗透到各个科学技术领域。而计算机技术的发展则使得集合论在应用领域获得了它应有的尊严。对于从事计算机科学工作的人来说，集合论是必备的基础知识。例如：开关理论、有限状态机、形式语言等都离不开子集、幂集、集合的分类等概念，集合成员表和范式在逻辑设计、定理证明中都有重要的应用。

本章主要介绍集合的概念、集合的运算与性质、集合的范式和集合元素的计算以及卡氏积。

§1.1　集合的概念

1.1.1　集合的表示

集合是不能精确定义的基本的数学概念。一般认为，集合是指一些具有共同属性的、可以确定和分辨的事物所构成的整体。对于给定的集合和事物，应该可以判断这个事物是否在这个集合之中。如果此事物在某一集合中，就称此事物“属于”该集合，记作“$\in$”；否则称此事物“不属于”该集合，记作“$\notin$”。如果一事物属于某一集合，则此事物就称为该集合的元素。例如：

全体自然数的集合；

数轴上所有点的集合；

26 个英文字母的集合；

全体中国人的集合；

浙江大学图书馆藏书的集合；

……

集合通常用大写英文字母来表示。例如：

设 A＝{全体自然数}，则：$1\in A$，$3\in A$，$6\in A$，$-4\notin A$。

通常集合的表示有两种方法：

(1) 枚举法(列举法)：把集合中的元素一一列举出来。

例如：

$$B=\{a,\ b,\ c,\ d\},\qquad C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}。$$

(2) 描述法：用文字语言或表达式来陈述集合中元素的性质，以确定某一事物是否属于该集合。即：$A=\{x \mid P(x)\}$。P(x)表示 x 所要满足的条件。

例如：

$$A=\{x \mid x^2+2x-3=0，x\ 是实数\}；$$

$B=\{n \mid n$是自然数$\}$；

$C=\{c \mid 1 \leqslant c \leqslant 14$，且$c$是奇数$\}$等。

关于集合中元素的几点说明：

(1) 集合中的元素是互异的；

例如：{a，b，c}，{a，a，b，c，c}，{a，b，b，b，c，c}表示同一个集合。

(2) 集合中的元素是无序的；

例如：{1，2，3}，{2，1，3}，{3，1，2}表示同一个集合。

(3) 集合中的元素是确定的；

即可以判断其是否属于某一集合。

(4) 集合中的元素不一定是同一类的；

例如：{1，A，COMPUTER，浙江}。

(5) 集合中的元素也可以是集合；

例如：设$A=\{1, \{1, 2\}\}$，则$1 \in A$，$\{1, 2\} \in A$，而$2 \notin A$。

对于常见的集合本书作如下的约定：

N={全体自然数(包括0)}={0，1，2，3，…}；

N^+={n是自然数且n>0}={1，2，3…}；

Z={全体整数}={…，−2，−1，0，1，2，…}；

Z^+={全体正整数}={1，2，3…}；

R={全体实数}；

Q={全体有理数}；

C={全体复数}。

如果某一集合没有任何元素，则称此集合为空集。记作Φ。

例如：$A=\{x \mid x^2+1=0$，x为实数$\}$，因为没有一个实数满足$x^2+1=0$，所以$A=\Phi$。

1.1.2 集合与集合之间的关系

定义 1.1 如果集合A的元素也是集合B的元素，则称集合A是集合B的子集。记作：$A \subseteq B$。即：

$A \subseteq B$当且仅当对任意$x \in A$有$x \in B$。也称A包含于B或B包含A。

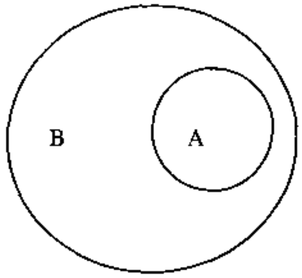
如果集合A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集。记作$A \subset B$。

如果集合A不是集合B的子集，则记作：$A \not\subseteq B$。

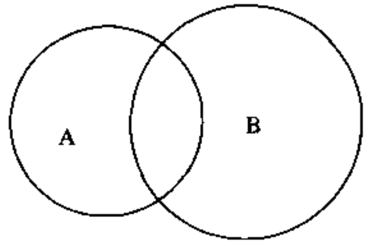
例如：$A=\{1, 2, 3+\}$，$B=\{2, 3\}$，$C=\{3, 4, 5\}$，则：$B \subseteq A$，$B \subset A$，$C \not\subseteq A$。

根据定义，对任何集合A都有$A \subseteq A$，$\Phi \subseteq A$。即：任一集合都是它自身的子集，空集是任何集合的子集。这两个子集称为平凡子集。

集合与集合之间的关系可以用文氏(Veen)图来描述，如图1.1所示。



$A \subseteq B$



$A \not\subseteq B$

图 1.1

例 1.1　根据前面的约定，有 $N \subseteq Z$，$Z^+ \subseteq Z$，$Z \subseteq Q$，$R \subseteq C$ 等。

例 1.2　设 A 是一个非空集合，B＝{A，{A}}，由于 A 和{A}都是 B 的元素，则：

$$A \in B,\ \{A\} \in B;$$

因此，$\{A\} \subseteq B$，$\{\{A\}\} \subseteq B$，但 A 并不是 B 的子集。

由本例可知，一个事物既可以是某一集合的元素，又可以是此集合的子集。

定义 1.2　如果集合 A 与集合 B 有相同的元素，则称 A 与 B 相等。记作 A＝B。

由此很容易得到：A＝B 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。这一结论也称作外延性原理，该原理常用作定理的证明。

例 1.3　设 A＝{1，2，3}，B＝{x | x 是正整数且 $x^2 \leqslant 12$}，则：A＝B。

例 1.4　设 C＝{COMPUTER，CAD，BASIC}，D＝{CAD，BASIC，COMPUTER}，则：C＝D。

例 1.5　试证：空集是惟一的。

证明：假设存在空集 Φ_1，Φ_2，由于空集是任何集合的子集，则 $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$，$\Phi_2 \subseteq \Phi_1$。

因此 $\Phi_1 = \Phi_2$，即空集是惟一的。

例 1.6　用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x \mid x \in N$ 且 $|x-3| \leqslant 4\}$；

(2) $B=\{(x, y) \mid x \in N, y \in N$ 且 $x+y \leqslant 3\}$。

解：(1) 因为 $-1 \leqslant x \leqslant 7$，而 $x \in N$，因此 A＝{0，1，2，3，4，5，6，7}；

(2) B＝{(0，0)，(0，1)，(0，2)，(0，3)，(1，0)，(2，0)，(3，0)，(1，1)，(1，2)，(2，1)}。

例 1.7　设 A＝{1，2，3}，试求 A 的全部子集。

解：将 A 的子集按元素的多少进行分类：

0 个元素，即空集，有 C_3^0 个：Φ。

1 个元素，有 C_3^1 个：{1}，{2}，{3}。

2 个元素，有 C_3^2 个：{1，2}，{2，3}，{3，1}。

3 个元素，有 C_3^3 个：{1，2，3}。

因此，集合 A 的子集构成的集合为：

{Φ，{1}，{2}，{3}，{1，2}，{2，3}，{3，1}，{1，2，3}}。

定义 1.3　设 A 为一集合，由 A 的所有子集所构成的集合称作 A 的幂集，记作 P(A)或 2^A。

即：

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}。$$

由例 6 可知：

一般地，由 n 个元素组成的集合 A，它的含 m 个元素的子集有C_n^m个(m≤n)，因此集合 A 中含不同数目元素的子集总数为：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

所以，n 元集合 A 的子集共有 2^n 个。

例 1.8 计算下列集合：

(1) P{Φ}；

(2) P({Φ})；

(3) P({Φ，{Φ}})；

解：(1) P(Φ)={Φ}；

(2) P({Φ})={Φ，{Φ}}；

(3) P({Φ，{Φ}})={Φ，{Φ}，{{Φ}}，{Φ，{Φ}}}。

解本题时很容易出错，可以先确定对什么集合求幂集，该集合中有多少个元素，从而确定幂集中含有多少个元素，以避免差错。

人们在研究某一问题的时候，往往要确定研究对象的范围，因而便有了全集的概念。

定义 1.4 在研究某一问题时，如果所讨论的集合都是某一集合的子集，则称此集合为全集。记作 U(或 E)。

例如：要调查中国在校大学生的英语水平，则全国在校大学生的全体便构成了全集 U，而浙江省在校大学生的全体 A 便是 U 的子集，同样某一所大学在校大学生的全体也是 U 的子集。如果讨论的范围发生了变化，仅仅调查浙江省在校大学生的英语水平，则 A 便是全集。因此，全集是一个相对的概念，随着研究问题的不同而变化。又如在讨论解析几何问题的时候，可以把数轴上的点作为全集，也可以把整个平面上的点或整个空间中的点作为全集。一般情况下，全集的选取视问题的方便而定。

§1.2 集合的运算与性质

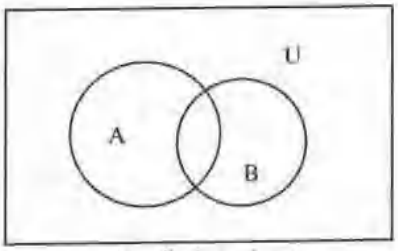
1.2.1 集合的基本运算

集合的运算，就是以给定的集合为对象，按照确定的规则产生新的集合。常见的集合运算有：并“∪”，交“∩”，相对补(差)“－”，绝对补(补)“‾”和对称差“⊕”等运算。这些运算及其运算法则，对以后内容(数理逻辑等)的学习将起很重要的作用。

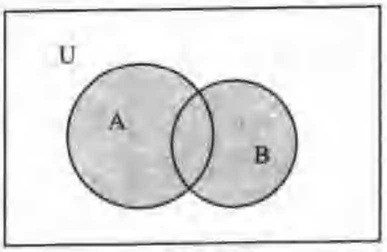
定义 1.5 设 A，B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合叫做 A 和 B 的并集。记作 A∪B。即：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A 或 x\in B\}。$$

集合 A 与 B 的并集可以通过文氏(Veen)图形象地描述。图 1.2(a)表示集合 A 和 B，图 1.2(b)的阴影部分表示 A∪B。



(a) 集合 A 与 B



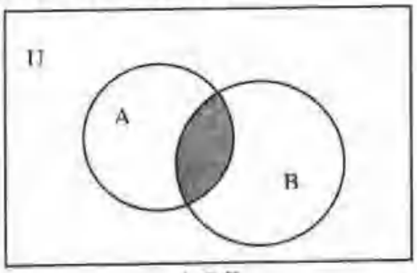
(b) $A\cup B$

图 1.2

定义 1.6　设 A，B 是两个集合，由属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合叫做 A 和 B 的交集。记作 $A\cap B$。即：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

集合 A 与 B 的交集可以通过文氏(Veen)图形象地描述，如图 1.3 所示。



$A\cap B$

图 1.3

如果集合 A，B 没有共同的元素，即它们的交集是空集($A\cap B=\Phi$)，则称 A 与 B 是不相交的。

例 1.9　设 A，B 是两个集合，$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, d, e, f, g\}$，

求：$A\cup B$，$A\cap B$。

解：元素 b，d，e 是集合 A，B 所共有的，因此：

$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$；

$A\cap B=\{b, d, e\}$。

类似地，我们可以得到多个集合的并与交：

定义 1.7　设 A_1，A_2，…，A_n 是全集 U 的 n 个子集，则：

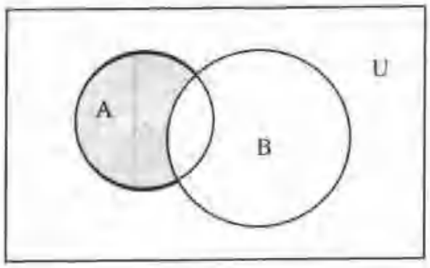
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2\cdots\text{或 } x\in A_n\}。$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x \mid x\in A_1 \text{ 且 } x\in A_2\cdots\text{且 } x\in A_n\}。$$

定义 1.8　设 A、B 是两个集合，由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的差集(或称为 B 关于 A 的相对补集)。记作 $A-B$。即：

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}。$$

集合 A、B 的差集的文氏(Veen)图，如图 1.4 所示。



A－B

图 1.4

定义 1.9 设 A、B 是两个集合，由属于 A 或 B，但不同时属于 A、B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的对称差。记作 $A \oplus B$。即：

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 但 } x \notin A \cap B\}。$$

如图 1.5 所示。

根据对称差的定义及图 1.5 容易推知：

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)。$$

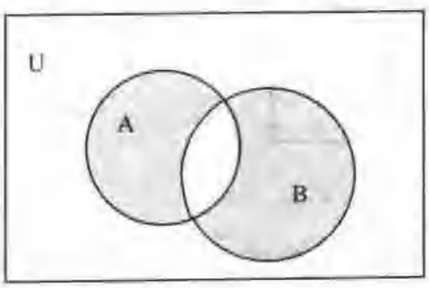


图 1.5

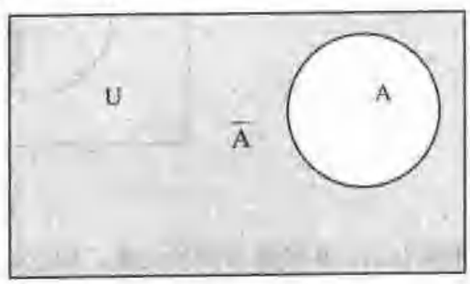


图 1.6

定义 1.10 设 A 是全集 U 的一个子集，由属于 U 但不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的补集。记作 $\overline{A}$(或 A'、C_U^A 即集合 A 关于全集 U 的补集)。即：

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}。$$

集合 A 的补集 $\overline{A}$ 的文氏(Veen)图，如上图 1.6 所示。

例 1.10 设 A，B 是两个集合，$A=\{1，2，3\}$，$B=\{2，3，4，5\}$。

求：A－B，B－A。

解：$A-B=\{1\}$；

$B-A=\{4，5\}$。

由此可知，A－B 与 B－A 并不一定相等。

读者可以思考：两者在什么情况下相等？

例 1.11 设全集 $U=N^+$，A、B、C 都是 U 的子集，$A=\{$小于 8 的素数$\}$，$B=\{i \mid i \leqslant 20$ 且 i 能被 3 整除$\}$，$C=\{2^i \mid 1 \leqslant i \leqslant 5\}$。

求：(1) $A \cup B \cup C$，(2) $A \cap B \cap C$，(3) $B-(A \cup C)$，(4) $(A \oplus B) \oplus C$ 和 $A \oplus (B \oplus C)$。

解：因为 $A=\{2，3，5，7\}$；

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$；

$C=\{2, 4, 8, 16, 32\}$。

则：(1) $A\cup B\cup C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 32\}$；

(2) $A\cap B\cap C=\Phi$；

(3) $B-(A\cup C)=\{6, 9, 12, 15, 18\}$；

(4) $A\oplus B=\{2, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18\}$，

$B\oplus C=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 32\}$。

因此：$(A\oplus B)\oplus C=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 32\}$，

$A\oplus(B\oplus C)=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 32\}$。

由此可知，$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

此结果具有一般性，即对称差满足结合律。

注：一个正整数除了能被 1 及自身整除外，不能被其他的数整除，则称此数为素数(或质数)，否则称为合数。1 既不是素数，又不是合数。

1.2.2　集合的运算律

前面定义了集合的 5 种常见的运算，它们实际上是定义在全集的幂集上的一元和二元运算(详见后面的代数系统一章)，因此集合运算也和其他的代数运算一样，都遵循一定的运算律。集合的运算与后面学的逻辑运算及布尔(Boolean)代数有很多类似的地方，希望读者能熟练掌握下面的运算律，这对于后续课程的学习有很大的帮助。下表 1-1 列出集合运算的主要运算律，其中 A，B，C 是任意的 3 个集合。

表 1-1　集合的运算律

幂等律	$A\cup A=A$，$A\cap A=A$	同一律	$A\cup\Phi=A$，$A\cap\Phi=A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$， $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$， $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。	分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap B)$， $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。
交换律	$A\cup B=B\cup A$， $A\cap B=B\cap A$， $A\oplus B=B\oplus A$。	吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$， $A\cup(A\cap B)=A$。
排中律	$A\cup\overline{A}=U$。	矛盾律	$A\cap\overline{A}=\Phi$。
零一律	$A\cup U=U$， $A\cap\Phi=\Phi$。	对合律	$\overline{\overline{A}}=A$，
德・摩根律 (D－Morgan)	(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$， (2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$， (3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$， (4) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$， (5) $\overline{\Phi}=U$， (6) $\overline{U}=\Phi$。		