经济管理数学基础

孙毅　赵建华　王国铭　韩燕　主编

微积分（下册）

清华大学出版社

经济管理数学基础

孙毅　赵建华　王国铭　韩燕　主编

微积分（下册）

清华大学出版社
北京

内容简介

本书分上、下册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分和定积分及其应用. 下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程.

与本书(上、下册)配套的有习题课教材、电子教案. 该套教材吸取了现行教学改革中一些成功的举措, 总结了作者在教学科研方面的研究成果, 注重数学在经济管理领域中的应用, 选用大量有关的例题与习题; 具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进、结合实际等特点. 可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)/孙毅等主编. —北京: 清华大学出版社, 2006.2
(经济管理数学基础)
ISBN 7-302-12212-1
Ⅰ.微…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 011987 号

出 版 者: 清华大学出版社　　**地　　址**: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**: 100084
社 总 机: 010-62770175　　**客户服务**: 010-62776969
责任编辑: 佟丽霞
印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　　本: 170×230　**印张**: 17　**字数**: 324 千字
版　　次: 2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-302-12212-1/O·518
印　　数: 1~4000
定　　价: 22.00 元

总　　序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中, 数学理论与应用得到了极大的发展, 使得数学所研究的两个重要内容, 即“数量关系”和“空间形式”具有了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时, 作为一门工具, 在几乎所有的学科中大展身手, 产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中, 随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系, 这种数量关系概括地表述为一种数学结构, 这种结构通常称为数学模型, 建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类: 第一类为确定性模型, 即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性, 对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建模的基本数学工具. 第二类为随机性模型, 即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建模的基本数学方法. 第三类为模糊性模型, 即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建模的基本数学手段.

高等学校经济管理类各专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等 3 门课程, 它们都是必修的重要基础理论课. 通过这些课程的学习, 学生可以掌握一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程与差分方程、向量代数与空间解析几何、线性代数、概率论与数理统计等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能, 为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中, 通过数学知识与其经济应用的有机结合, 可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力, 并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

《经济管理数学基础》系列教材是吉林大学“十五”规划教材, 包括《微积分》(上、下)、《线性代数》、《概率论与数理统计》, 以及与其配套的习题课教材和电子教案, 其内容涵盖了教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”. 该系列教材吸取了国内外同类教材的精华,特别是借鉴了近几年我国一批“面向 21 世纪课程”教材和国家“十五”

规划教材，同时也凝结了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验. 编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，同时也注意到与后续课程的衔接. 本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，为学生展现科学发现的基本原理，突出数学应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文社科类各专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. 每章后面配备了习题，其中(A)题是体现教学基本要求的习题，(B)题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题参考答案，供读者参考.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

本系列教材体现了公共数学教学的一种改革模式，我们希望起到抛砖引玉的作用，恳请读者不吝赐教，以不断提高本系列教材的质量，促进教学改革的深入发展.

《经济管理数学基础》系列教材编委会

2005 年 8 月

前　言

本书是依据经济类、管理类、人文类各专业对微积分课程的教学要求而编写的. 在本书的编写过程中, 按循序渐进的原则, 深入浅出. 从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发, 从直观的几何现象出发, 引出微积分的基本概念,如极限、导数及积分等. 再从理论上进行论证, 得到一些有用的方法和结果, 然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题. 这样从特殊到一般, 再从一般到特殊, 从具体到抽象, 再从抽象到具体, 将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来, 为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础.

在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整, 适当淡化运算上的一些技巧, 降低了一元函数的极限与连续的理论要求, 从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在保证教学要求的同时, 让教师比较容易组织教学, 学生比较容易理解接受, 并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高. 书中将数学素质培养有机地融合于知识讲解中, 突出数学思想的介绍, 突出数学方法的应用. 本书拓广了经济应用实例的范围, 让学生更多地见识应用数学的知识、数学方法解决经济管理类问题的实例, 增加他们的应用意识和能力.

本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程. 共分 6 章, 第 1、2 章由赵建华编写, 第 3 章由韩燕编写, 第 4、5 章由孙毅编写. 第 6 章由王国铭编写, 全书由李辉来统稿. 青年教师孙鹏、朱本喜、杨柳、毛书欣完成了本书排版制图的全部工作. 清华大学韩云瑞教授审阅了全书.

由于水平有限, 书中的错误和不妥之处恳请广大读者批评指正, 以期不断完善.

作　者

2005 年 10 月

目　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来, 把空间上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

本章内容包括：向量代数、平面和直线、曲面和曲线等.

1.1　向量及其运算

1.1.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O, 以 O 为原点作三条有相同的长度单位并且两两垂直的数轴, 依次记作 x 轴、y 轴和 z 轴, 统称为**坐标轴**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, z 轴则在铅直线上. 它们的正方向符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的拇指的指向为 z 轴的正向 (图 1.1). 这样就建立了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为该坐标系的**原点**.

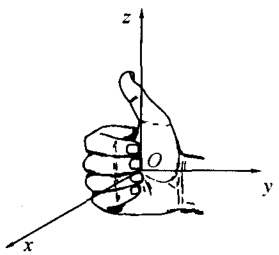

图　1.1

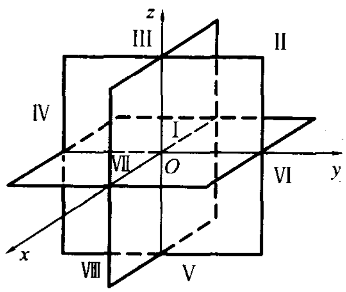

图　1.2

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 平面, 另外两个坐标面称为 Oyz 面和 Ozx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限. 其中在 Oxy 面上方并且在 Oyz 面前方、Ozx 面右方的那个卦限称为第 I 卦限, 在 Oxy 面上方按逆时针方向依次为 I 、II 、III、IV卦限, 在 Oxy 面下方与 I 、II 、III、IV卦限相对的依次是V 、VI、VII、VIII卦限 (图 1.2).

设 M 是空间一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴并与这三个坐标轴分别交于点 P, Q 和 R(图 1.3). 设点 P, Q 和 R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x, y 和 z, 这样, 空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来, 对给定的有序数组 x, y, z, 在三个坐标轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R, 再过点 P, Q, R 作平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x, y, z 所惟一确定的点. 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系, 称 x, y, z 为点 M 的**坐标**, 依次称 x, y, z 为点 M 的**横坐标**, **纵坐标**和**竖坐标**, 并把点 M 记作 $M(x,y,z)$.

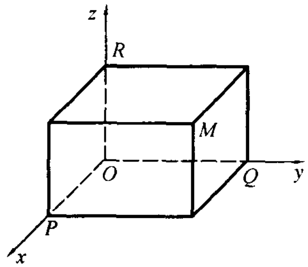

图　1.3

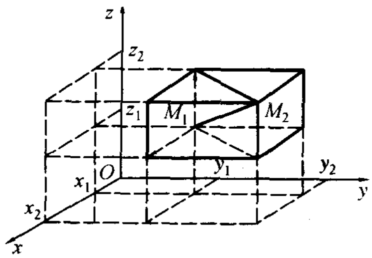

图　1.4

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 1.4), 各棱的长度分别为

$$|x_2 - x_1|, \ |y_2 - y_1|, \ |z_2 - z_1|.$$

根据勾股定理, 对角线 M_1M_2 的长度, 即空间两点 M_1, M_2 的距离为

$$d(M_1, M_2) = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d(O, M) = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1.1　*在 z 轴上求一点 M, 使该点与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.*

解　因为所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0,0,z)$, 由题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7 - z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2}.$$

两边平方, 解得 $z = \dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

1.1.2 向量的概念

在研究实际问题时, 我们通常遇到两种不同类型的量, 一类是只有大小的量, 例如时间、温度、质量、体积等, 这种量称为**数量**或标量; 另一类是既有大小又有方向的量, 例如力、速度、加速度等, 这种量称为**向量**或矢量.

向量通常用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{i}$ 等, 也可以用上方加箭头的字母来表示, 如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{i}$ 等. 数学上往往用一个有方向的线段来表示向量, 如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个向量, 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分.

向量的大小叫作向量的**模**, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量叫作**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$, 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量叫作**单位向量**.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这说明, 如果两个向量的大小与方向是相同的, 那么不论它们的起点是否相同, 我们就认为它们是同一向量, 这样理解的向量称为**自由向量**, 本书只讨论自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或者反方向, 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**, 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的, 故可认为零向量与任何向量都平行.

在直角坐标系中, 以坐标原点 O 为起点, 以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于点 O 的**向径**, 常用 $\boldsymbol{r}$ 表示, 即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应着一个向径 $\overrightarrow{OM}$, 反过来, 每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 M 相对应.

1.1.3 向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$, 以 MA, MB 为邻边的平行四边形 $MACB$ 的对角线为 MC(图 1.5), 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

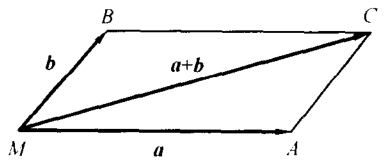

图 1.5

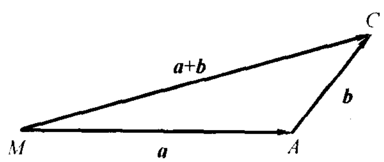

图 1.6

这个定义向量加法的规则称为向量加法的**平行四边形法则**. 这个法则没有对两个平行向量的加法加以定义, 为此我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法定义:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 M, 作 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$, 再以 A 为起点, 作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 连接 MC, 则向量 $\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.6).

这个规则称为向量加法的**三角形法则**.

向量的加法满足如下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量与数的乘法

对任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$, 定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向; 当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向; 当 $\lambda=0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量与数的乘法运算又称为向量的**数乘**.

几何直观上, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量, 只是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 λ 倍 (图 1.7).

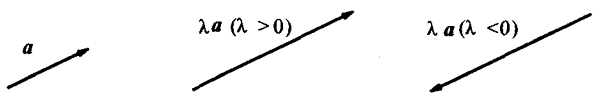

图　1.7

向量的数乘满足如下运算规律：

(1) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(2) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是任意向量, λ 和 μ 是任意实数.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, 用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 由向量的数乘定义, 有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \text{ 或 } \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

定理 1.1.1　*设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.*

证明　必要性　设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$, 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则取 $\lambda=0$, 有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时 $\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{e}_a$, 取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有

$$\lambda\boldsymbol{a}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{b}.$$

同样的, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时, 取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 由数乘的定义知 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$. □

利用向量的加法和数乘, 可以定义向量的减法.

对于向量 $\boldsymbol{b}$, 称 $(-1)\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的**负向量**, 记作 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**规定为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合, 则从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1.8).

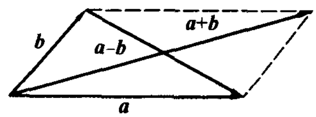

图 1.8

向量的加法和向量的数乘统称为向量的**线性运算**.

例 1.1.2 证明三角形两边中点的连线 (中位线) 平行于第三边, 其长度等于第三边长度的一半 (图 1.9).

证明 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AD=DB$, $AE=EC$, 由向量的线性运算法则, 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD},\\ \overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\ &=2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}\\ &=2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\\ &=2\overrightarrow{DE},\end{aligned}$$

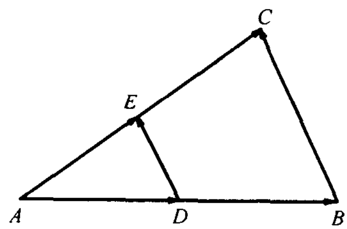

图 1.9

因此 $\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{BC}$, 且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. □

1.1.4 向量的坐标

1. 向量的坐标

为了建立向量与数的联系, 我们把向量放在直角坐标系中加以讨论, 定义向量的坐标, 从而把向量与有序数组对应起来.

在空间直角坐标系中, 记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是与 x 轴、y 轴、z 轴同方向的单位向量, 称为 $Oxyz$ 坐标系下的**基本单位向量**.