小学数学应用题

图解速算

李亚男 李洪印 著

小学数学应用题图解速算

李亚男　李洪印　著

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑：徐玉兰

小学数学应用题图解速算

李亚男　李洪印　著

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷四厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/32　印张　4　字数80 000

1992年11月第1版

1992年11月第1次印刷

印数：1—10 100

ISBN 7-5308-1191-6/G·281　　定价：1.80　元

编 者 的 话

小学数学应用题在小学教学中占有重要的地位，是学生学习、教师教学上的难题。之所以难，是因为按应用题的内容分类多达20多种，并且每种类型都有它固有的特点、解题的规律、运算的公式。这就给学习和教学带来很大的困难。

本书是按解应用题的四则运算（加、减、乘、除）的方法分为两类。加、减（互为逆运算）为一类；乘、除（互为逆运算）为另一类。

属于用加、减运算方法来解的应用题，可借用直线做图的方法，从图上找出已知量和未知量间的运算关系，列出算式，解出结果；属于用乘、除运算方法来解的应用题，可借助矩形面积做图的方法，从图上找出已知量和未知量间的运算关系，列出算式，解出结果；属于用连乘或连除运算方法来解的应用题，可借助长方体做图的方法，从图上找出已知量和未知量间的运算关系，列出算式，解出结果。这样不用背公式，既直观又简单。

用直线做图解应用题的方法，不少书中都有叙述，这里不再重述。用长方体做图解应用题的方法，可连续借用矩形面积做图的方法来完成。

因此本书就矩形面积解应用题方法进行表述。

为开阔思路，培养解题能力，选用了一题多解的方法。

本书可供小学教师做为教学参考，也可供小学高年级学

生学习和学生家长辅导子女学习时使用。

由于水平有限，书中难免有许多缺点和错误，恳请读者批评指正。

作　者

1992年3月于天津

目　　录

一、图解法原理

图解应用题可使问题的内容具体化、形象化。更重要的是图解可以帮助我们理解题意；可以帮助我们明确数量间的关系；可以帮助我们很快地找出解题的方法。

用加、减运算方法来解的应用题，可借用直线做图的方法来解。这类应用题包括：和倍问题、差倍问题、和差问题、盈亏问题、年龄问题、公约数与公倍数问题、数字问题等；用乘、除运算方法来解的应用题，可借助矩形面积做图的方法来解。这类问题包括：平均问题、归一问题、工程问题、行程问题、流水问题、鸡兔问题、还原问题、植树问题、分配问题、杂题等部分。

用乘、除运算方法来解的应用题，在运算过程中，有乘数、被乘数和积（除数、商和被除数）。这样可以把乘数（除数）做为矩形面积的一条边长，把被乘数（商数）做为矩形面积的另外一条边长，而积（被除数）在其数量上就等于这个矩形的面积。

用乘、除运算方法来解的应用题，题目中的积往往都是不变的，只是改变其中的乘数（除数）或被乘数（商数），让求被乘数（商数）或乘数（除数）。换句话说，用矩形面积来解的应用题，题目中的面积是不变的，只是改变其中的一个边长，让求另一个边长的变化。这样就可以根据矩形面积不变的特点，从矩形面积上找出数量间的运算关系，从而使问题得以解决。

例如，矩形ABCD和矩形AB′C′D′两面积相等，只是相应的边长不等，现将两图重叠比较，如（图1）。

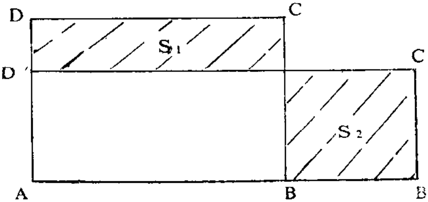

图1

由于两矩形面积相等，因此，可以得出 $S_1=S_2$ 的明显结论。就是借助这个结论便可找出变量间的运算关系。

在解这类乘、除运算方法的应用题中，有以下几种情况：

1．S_2的面积可从已知条件中求出，AB的长度为已知，求D′D的长度。从图中可明显得出：

$$D'D=\frac{S_1}{AB}=\frac{S_2}{AB}\qquad(S_1=S_2)$$

2．S_1的面积可从已知条件中求出，AD′的长度为已知，求BB′。从图中明显可知，$BB'=\frac{S_2}{B'C'}=\frac{S_2}{AD'}=\frac{S_1}{AD'}$

$(S_1=S_2)$

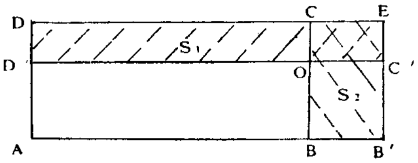

图2

3．如（图2），因为矩形ABCD面积和矩形AB′C′D′面积相等，所以，S_1的面积（矩形D′C′ED的面积）和S_2的面积（矩形BB′EC的面积）也相等。因为矩形ABCD面积与矩形AB′C′D′面积相等，所以，矩形面积D′OCD面积与矩形BB′C′O面积相等。因此，矩形D′OCD面积加上矩形

$OC'EC$面积的和与矩形$BB'C'O$面积加上矩形$OC'EC$面积的和也相等。即，矩形$D'C'ED$ 面 积 与 矩 形$BB'EC$面积相等。也就是$S_1 = S_2$。

在后边的解题中，关于$S_1 = S_2$的道理不再重述。

在题目中S_2的面积一般都可以求出，AB'的长度一般为已知，让求DD'的长度。从（图2）中可知：

$$DD' = \frac{S_1}{AB'} = \frac{S_2}{AB'}$$

4．题目中S_1的面积从已知条件中可以求出，AD的长度为已知，让求BB'的长度。从（图2）中可知：

$$BB' = \frac{S_2}{AD} = \frac{S_1}{AD}$$

总之，对于运用乘除运算方法来解的应用题，由于题目中的积（矩形面积）不变的特点，再借助$S_1 = S_2$的关系，便可很简单地找出求解此类应用题的运算方法。

用矩形面积做图求解应用题的方法，是用两个矩形面积重叠进行比较，这样利用直角坐标来表示更为简单。例如，行程问题，可将水平轴定为时间t轴，竖直轴定为速度v轴，两轴垂直交点为原点O。如（图3）。

v_1的数值就是从原点O到v_1点的长度的数值。t_1的数值就是从原点O到t_1点的长度的数值。这样表示更为方便。

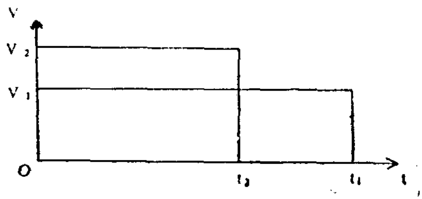

图3

另外，矩形图形仅仅是示意图。

解应用题使用的面积方法，它的作用不仅在于使解题简单化，也不仅在于它是一种解题方法，而主要的是它使问题能有一个解决的方法。这个特点在复杂问题的解决上表现的尤为突出。

二、解题实例

（一）平均问题

平均问题就是求平均数，对于若干大小不等的数，运用移大补小的方法，或者利用取长补短的方法，把这些大小不等的数拉平，使之变成相等的数。求平均数的关键，其中的被除数一定是总数，除数一定是总个数。

1．幼儿园将现有的苹果平分给三个小朋友，每人分得8个。后又来了一个小朋友，若使每个小朋友都分得相等的苹果，原来的三个小朋友每人需拿出几个苹果？

【解1】 若求三个小朋友每人拿出的苹果数，必须先求出四个小朋友每人平均分得的苹果数。

总苹果数：$8\times3=24$（个）

四个小朋友每人平均分得的苹果数：

$24\div4=6$（个）

原来三个小朋友每人应拿出的苹果数：

$8-6=2$（个）

综合式子：$8-8\times3\div4=2$（个）

答：原来三个小朋友每人拿出2个苹果。

【解2】 原由三个小朋友平分的苹果总数，现变为由四个小朋友来平分。因此，四个小朋友每人平均分得的苹果数应是三个小朋友每人平均分得苹果数的四分之三。所以，

原来三个小朋友每人应拿出的苹果数是三个小朋友每人平均分得苹果数的$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$倍。　即：

$$8\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=8\times\frac{1}{4}=2\ （个）$$

【解3】　本题实际上是将三行相等的苹果，每行8个，然后进行移动，求每行移动几个苹果使其变成相等的四行。因由三行向第四行移动并使其全相等。因此，每行移动的数应占移动后每行所剩余数的$\frac{1}{3}$，那么每行移动的数，应占每行原来数的$\frac{1}{4}$。所以，每个小朋友应拿出的数，也就是每行移动的数：

$$8\times\frac{1}{4}=2\ （个）$$

【解4】　用矩形面积方法求解。

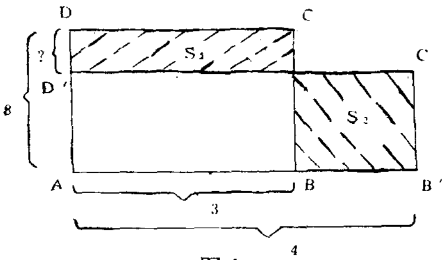

图4

由于两种情况，苹果总数是不变的，所以，两种情况下的矩形面积是相等的。如（图4）。水平边长代表小朋友数，竖直边长代表每个小朋友平分的苹果数。

从（图4）可知，本题要求的是DD′的长度。但是S_1和S_2的面积都不能从已知条件中求出，此题还不能解。为此，

将图做如下变动如（图5）。

（图5）中S_1的面积比图4增加了矩形$OC'EC$的面积，S_2的面积比图4也增加了矩形$OC'EC$的面积。因此，$S_1=S_2$。而S_2的面积等于$B'E\times BB'=8\times(4-3)=8$（个）。$D'D$的数值正是每个小朋友应拿出的苹果数，即：

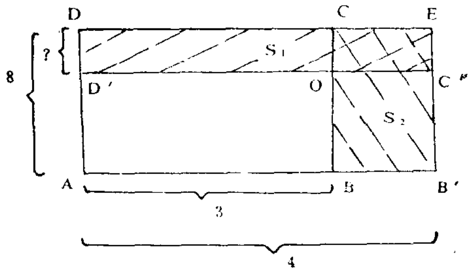

图5

$$D'D=\frac{S_1}{AB'}=\frac{S_2}{AB'}=\frac{8}{4}=2\ （个）$$

综合式子：$8\times(4-3)\div4=2$（个）

2．火车翻越某山，上山用6小时，每小时行30千米，下山用3小时，每小时行60千米。这段路火车平均每小时行多少千米？

【解1】 用总千米数除以总小时数。

$(30\times6+60\times3)\div(6+3)=(180+180)\div9$
$=40$（千米）

答：火车在这段路上平均每小时行40千米。

【解2】 用移多补少的方法计算：

下山每小时比上山每小时多行$60-30=30$（千米）。下山3小时比上山3小时多行$30\times3=90$（千米）。将这90千米平均补到$6+3=9$小时上，每小时应补$90\div9=10$千米。所以，平均速度为$30+10=40$（千米／小时）。

综合式子：30＋（60－30）×3÷（6÷3）＝30＋90÷9＝40（千米）

【解3】 用矩形面积方法解：

因火车上下山所行的路程是一样的。现将火车上山和下山不同的速度做矩形图，用平均速度做矩形图，并将两图重叠比较如（图6）。

从（图6）中可知 $S_1=S_2$ 但 S_1 和 S_2 的面积都不能从已知条件中求出。如（图7）。

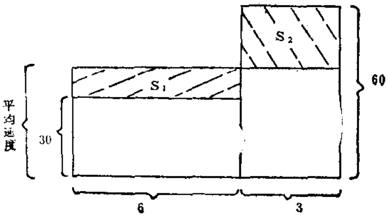

图6

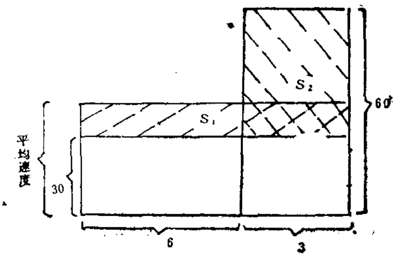

图7

从（图7）中很清楚知道 $S_1=S_2$ 而 $S_2=(60-30)\times3=90$（千米）

S_1 面积的竖直边长为：

$$\frac{S_1}{6+3}=\frac{S_2}{9}=\frac{90}{9}=10\text{（千米）}$$

那么平均速度为：10＋30＝40（千米／小时）

综合式子：30＋（60－30）×3÷（6＋3）＝40（千米/小时）

3．汽车往返于甲乙两地之间，上行速度为30千米/小时，下行速度为60千米/小时，求往返平均速度？（1977年山西省高考试题）。

【解1】 这种题非常容易按简单平均问题而误解为：

$(30+60)\div 2=45$（千米/小时）

其实，对于同样的路程，由于速度不同，所用的时间也不同。求平均速度，应该用总时间去除总路程才对。

这里总路程为甲乙两地间距离的 2 倍，为了计算方便，不妨设它为 2 a。依匀速运动公式，应有：

$$2a\div\left(\frac{a}{30}+\frac{a}{60}\right)=2a\div a\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)$$

$$=2\div\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)=2\div\frac{1}{20}=40\text{（千米/小时）}$$

由此可见，所求的往返平均速度与路程无关，本题可直接列成：

$2\div\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)=2\div\frac{1}{20}=40$（千米/小时）。这也是把甲乙两地的路程看成整体 1 的原因。

【解2】 用面积方法求解。

不管用什么速度行驶，甲乙两地的路程是不变的。以平均速度做一矩形，以上下行的速度做一矩形，并进行比较如（图8）。

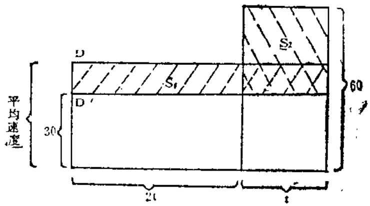

图8

因上下行的路程相同，又下行速度是上行速度的$60\div30=2$倍，故上行时间是下行时间的 2 倍。设为 2 t。

从（图8）可知，若求出D′D便可求出平均速度。

因$S_1=S_2$

$$D'D = \frac{S_1}{2t+t} = \frac{S_2}{3t}$$

$$= \frac{(60-30)\ t}{3t} = \frac{30}{3} = 10(千米/小时)$$

平均速度为：$30+10=40$（千米/小时）

综合式子：$30+\frac{(60-30)t}{2t+t}=30+10=40$（千米/小时）

4．有两块棉田，平均亩产量是185公斤，已知一块是5亩，平均亩产是203公斤，另一块棉田的亩产量是170公斤，问这块田是几亩？

【解1】 分析每块棉田平均亩产量203公斤、170公斤与总平均亩产量185公斤产生差距的原因：

第一块棉田5亩的平均亩产量比总平均亩产量多：
$203-185=18$（公斤）。5亩多：

$(203-185)\times 5=90$（公斤）

第二块棉田的亩产量比总平均亩产量少：$185-170=15$（公斤）

这说明第二块棉田的亩数：

$90\div 15=6$（亩）

全式：$(203-185)\times 5\div(185-170)=6$（亩）

答：第二块棉田的亩数是6亩。

【解2】 用面积方法求解。

因棉田的总产量是不变的。现以总平均亩产量做矩形，以两块棉田的不同亩产量做另一矩形，并将两矩形比较如

（图９）。

从图９清楚地得知 $S_1 = S_2$ 所求第二块棉田的亩数正是 S_2 面积的水平边长。

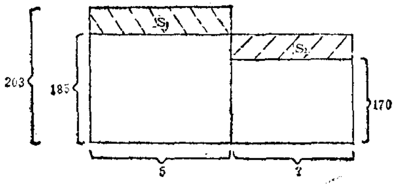

图９

$S_1 =$（203－185）×５＝90（公斤）

S_2面积的竖直边长为：185－170＝15（公斤）

所以，第二块棉田的亩数为：

$S_2 \div 15 = S_1 \div 15 = 90 \div 15 = 6$（亩）

全式：（203－185）×５÷（185－170）＝６（亩）

（二）归一问题

归一问题的求解，往往归结到先求出一份量上，这种解法称为归一法。

５．红星农场用拖拉机耕地，原计划每天耕300亩，５天完成；实际提前半天完成，每天多耕多少亩？（1978年六合县竞赛题）。

【解１】 若求每天多耕的亩数，应先把每天实耕亩数求出来。即：

$$300 \times 5 \div \left(5 - \frac{1}{2}\right) = 333\frac{1}{3}\text{（亩／天）}$$

每天多耕的亩数：

$$333\frac{1}{3} - 300 = 33\frac{1}{3}\text{（亩／天）}$$