



面向 21 世纪 课 程 教 材  
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

# 概率论与数理统计

## 第二版

龙永红 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础

主编 范培华 胡显佑

# 概率论与数理统计

第二版

龙永红 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容简介

本书第一版是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪的高等院校经济学学科门类和管理学学科门类的数学基础课教材之一。第二版是在高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”支持下对第一版的修订。

全书以经济与管理类学生易于接受的方式介绍了随机事件与概率、随机变量的分布与数字特征、随机向量、参数估计与假设检验、方差分析以及回归分析等概率论与数理统计的基本内容。与以往教材相比,其主要特点在于:强调概念和内容的直观引入及知识间的联系;强调随机性思维的培养和应用能力的培养;强调有关概念、方法与经济管理学科的联系,并适应现代经济、金融与管理学发展的需要。

书中每章配有 A、B 两组习题和参考答案,其中 B 组习题是为满足读者的较高要求而配备的。本书可作为经济管理类本科教材,也适合于考研学生备考之用。

## 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/龙永红主编.—2 版.—北京:  
高等教育出版社,2004.4  
(高等学校经济管理学科数学基础/范培华,胡显佑  
主编)

ISBN 7-04-013787-9

I. 概... II. 龙... III. ①概率论—高等学校—  
教材②数理统计—高等学校—教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 003224 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京外文印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2001 年 5 月第 1 版
印 张	18 5		2004 年 4 月第 2 版
字 数	350 000	印 次	2004 年 8 月第 2 次印刷
		定 价	19.60 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 第二版前言

这套教材从第一版发行至今,已被多所高等院校选为经济管理类专业的数学基础课程的教材。不少同仁来信表示鼓励,指出教材中值得探讨的问题,并对如何修改提出了宝贵的意见。在此我们对关心和支持这套教材的广大同仁表示衷心的感谢。

2002年12月高等教育出版社启动了“高等教育百门精品课程教材建设计划”,这套教材的建设被纳入计划之中。在该项目的支持下,我们对这套教材的第一版进行了修订。修订工作主要包括以下几个方面的内容:

1. 订正了原教材中的疏漏以及排版印刷方面的错误;
2. 调整了一部分例题和习题,使其与相应的内容之间搭配得更加合理;
3. 调整了一些命题的条件或结论,使其阐释得更加精确;
4. 《概率论与数理统计》中数理统计部分做了较大的调整和修改,以适合经济管理类专业的需要。

参加这套教材修订工作的主要为原编写人员。此外,需要说明的是,《概率论与数理统计》中数理统计部分由中国人民大学刘刚同志、北京大学陈奇志同志修改。

根据我国高等教育从精英教育向大众化教育转变以及现代教育技术手段在教学中广泛运用的现状,我们对这套教材进行了立体化教学设计,各主教材分别配备了典型例题分析与习题(与主教材同期推出),配套的电子教案也将于近期出版。希望能更好地满足高校教师课堂教学和学生自主学习的需要,对提高教学质量起到辅助作用。

在修订过程中,我们广泛地搜集了读者对原教材的意见和建议。希望通过此次修订,这套教材能在第一版的基础上更加完善。欢迎大家继续批评和指正。

编者

2003年9月

# 修订说明

本书第一版作为教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,其主要特点在于:强调概念和内容的直观引入及知识间的联系以加强学生对概率论与数理统计的理论和方法的理解;强调随机性思维方式和经济管理专业学生应用概率统计的能力的培养,避免成为数学系教材的简写本;强调有关概念、方法与经济管理学科的联系,并适应现代经济、金融与管理学发展的需要。第一版自出版以来受到广泛的关注,为使其特点更加突出、内容与体系更加完善,在高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”的支持下,我们对第一版实施了本次修订。

本次修订由中国人民大学数学系龙永红教授提出整体方案,并负责第 1~3 章的修订;成世学教授负责第 4 章的修订;刘刚老师负责原书第 5~7 章(修订后的第 5、6 章)的修订;北京大学光华管理学院陈奇志博士负责原书第 8 章(修订后的第 7 章)的修订;取消原书第 9 章的内容。全书由龙永红教授统纂定稿。具体修订内容如下:

1. 概率论部分(第 1~3 章)主要订正原书中的一些疏漏和印刷错误,调整了个别习题。

2. 将第 4 章不作教学要求的内容(主要是一些常用统计量密度函数的推导)列入附录中,使教学要求更加突出,同时对部分习题作了调整。

3. 考虑到参数估计与假设检验间的联系,将原书第 5、6 章合并为新版的第 5 章,将双正态总体的置信区间在正文中删去,只在附录的一览表中列出。

4. 对参数估计部分的例题和习题作了较大的调整,对假设检验部分进行了改写,使内容更加简练,重点更加突出。

5. 对方差分析和回归分析的内容重新作了处理,略去了一些繁琐的推导细节,增加统计软件 SPSS 的输出结果实例,突出思想、方法和应用。此外,增加了一些经济学实例。

6. 考虑到教学学时的限制,取消了原书中主成分分析与典型相关分析的内容。

本次修订吸取了部分使用本教材第一版教学的教师的意见,我们在此表示衷心的感谢,也期待广大读者进一步提出批评和建议。

龙永红

2003 年 10 月 1 日

# 第一版前言

1996年原国家教委开始组织实施“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，其中子项目经济学门类数学基础课研究和管理学门类数学基础课研究分别由中国人民大学和北京大学承担。考虑到这两大学科门类数学基础课程的共同点，教育部又将这两个子项目整合为“经济管理学类专业数学基础课程设置与教学内容改革研究”，集中力量合作研究，并成立了以魏权龄教授和范培华教授为项目主持人的课题组。两年多来，课题组对国内外高等院校同类专业数学基础课程的现状进行了调查研究，编写了教学大纲，组织了多次有关课程体系、课程内容的研讨会。其中，于1997年7月在长春召开的中国数量经济学会年会上，全国40余所院校的教师就经济管理类专业的数学基础课、数量经济分析课程的体系、课程设置、内容等进行了深入的讨论；1998年4月，教育部在京召开了管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革的研讨会上，初步确定了数学基础课应包括微积分、线性代数和概率统计三门课程，共16学分。其中“微积分”8学分，“线性代数”3学分，“概率统计”5学分。

在调查研究和充分讨论的基础上，课题组拟定了《经济管理学科数学基础教学大纲》(草案)，并邀请北京地区部分高校就该大纲进行了讨论。

受教育部委托，北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同承担了编写经济管理学科数学基础系列教材的任务。整套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》3个分册，由魏权龄教授任编写组顾问，范培华教授、胡显佑教授任主编。这套教材的《微积分》分册由朱来义教授主编，参加编写的有朱来义、吴岚、范培华和严守权；《线性代数》分册由卢刚副教授主编，参加编写的有卢刚、胡显佑、崔兆鸣；《概率论与数理统计》分册由龙永红副教授主编，参加编写的有龙永红、张贻兰、成世学、王明进。

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，我们在编写这套教材时，主要考虑了下述问题：

1. 为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课，特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强。
2. 考虑到目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异，这套教材应照顾到多数院校教学的实际情况，便于教师和学生使用。
3. 作为一门数学基础课的教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学

性、系统性,但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述,对个别冗长、繁琐的推理则略去,而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍。

4. 作为经济管理学科各专业的数学基础教材,我们注意了专业后继课程的需要,并考虑学生继续深造的需要,教材的各章均配备了A,B两组习题。一般,达到A组习题的水平,就已经符合本课程的基本要求。B组习题是为数学基础要求较高的专业或学生准备的。各章中打有“\*”号(或小字排版)的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的,可以作为选学内容或学生自学用。

1999年12月,由教育部高教司聘请了有关专家对教材的初稿进行了审定。参加审稿会的有:北京航空航天大学李心灿教授、清华大学胡金德教授、南开大学周概容教授、(以下以姓氏笔画为序)湖南财经学院苏醒教授、北方交通大学季文铎教授、中央财经大学单立波教授、华侨大学龚德恩教授、中南财经大学彭勇行教授。他们对教材初稿提出了许多中肯的建议和具体的修改意见,这对于完善教材是非常有益的,在此向参加审定会的各位教授表示诚挚的谢意。

在各次研讨会上,全国各高校的许多同行都对这一项目和教材提出了极有价值的建议。在此向有关院校的老师表示衷心感谢。在教材编写过程中,我们得到了教育部高教司的大力支持,得到高等教育出版社有关部门的协助,在此一并致谢。

范培华 胡显佑

2000年3月

# 目 录

<b>第 1 章 随机事件与概率</b> .....	1
§ 1.1 随机事件 .....	1
§ 1.2 随机事件的概率 .....	8
§ 1.3 古典概型与几何概型 .....	12
§ 1.4 条件概率 .....	17
§ 1.5 事件的独立性 .....	24
习题一 .....	29
<b>第 2 章 随机变量的分布与数字特征</b> .....	34
§ 2.1 随机变量及其分布 .....	34
§ 2.2 随机变量的数字特征 .....	42
§ 2.3 常用的离散型分布 .....	51
§ 2.4 常用的连续型分布 .....	57
§ 2.5 随机变量函数的分布 .....	63
习题二 .....	67
<b>第 3 章 随机向量</b> .....	72
§ 3.1 随机向量的分布 .....	72
§ 3.2 条件分布与随机变量的独立性 .....	80
§ 3.3 随机向量的函数的分布与数学期望 .....	89
§ 3.4 随机向量的数字特征 .....	97
§ 3.5 大数定律与中心极限定理 .....	106
习题三 .....	112
<b>第 4 章 数理统计的基础知识</b> .....	119
§ 4.1 总体与样本 .....	119
§ 4.2 统计量 .....	123
§ 4.3 常用的统计分布 .....	125
§ 4.4 抽样分布 .....	132
附录 4.1 三个常用统计分布密度函数的推导 .....	137
附录 4.2 正态总体抽样分布的基础性定理 .....	139
附录 4.3 一般总体枢轴量 $T_n$ 的极限分布 .....	141
习题四 .....	142
<b>第 5 章 参数估计与假设检验</b> .....	145
§ 5.1 点估计概述 .....	145
§ 5.2 参数的最大似然估计与矩估计 .....	149



§ 5.3 置信区间 .....	155
§ 5.4 假设检验概述 .....	163
§ 5.5 单正态总体的参数假设检验 .....	169
§ 5.6 双正态总体的参数假设检验 .....	173
§ 5.7 一般总体的参数假设检验 .....	177
§ 5.8 拟合优度 $\chi^2$ 检验与独立性检验 .....	182
附录 5.1 正态总体参数的置信区间一览表 .....	187
附录 5.2 单正态总体参数假设检验一览表 .....	188
附录 5.3 双正态总体参数假设检验一览表 .....	189
习题五 .....	192
<b>第 6 章 方差分析</b> .....	<b>196</b>
§ 6.1 方差分析概述 .....	196
§ 6.2 单因素方差分析 .....	198
§ 6.3 双因素方差分析 .....	203
习题六 .....	211
<b>第 7 章 回归分析</b> .....	<b>215</b>
§ 7.1 一元线性回归模型及其参数估计 .....	215
§ 7.2 一元线性回归模型的检验 .....	222
§ 7.3 一元线性回归的残差分析 .....	229
§ 7.4 一元线性回归的预测和控制 .....	231
§ 7.5 一元非线性问题的线性化 .....	236
§ 7.6 多元线性回归分析 .....	241
附录 7.1 命题 7.1 的证明 .....	248
习题七 .....	249
<b>习题参考答案</b> .....	<b>252</b>
<b>常用统计分布表</b> .....	<b>267</b>
附表 1 泊松分布概率值表 .....	267
附表 2 标准正态分布函数值表 .....	270
附表 3 $\chi^2$ 分布上侧分位数表 .....	273
附表 4 $F$ 分布上侧分位数表 .....	276
附表 5 $t$ 分布上侧分位数表 .....	286
<b>主要参考文献</b> .....	<b>287</b>

# 第 1 章

## 随机事件与概率

概率论是研究随机现象的规律性的数学学科. 为了对随机现象的有关问题作出明确的数学阐述, 像其他数学学科一样, 概率论具有自己的严格的概念体系和严密的逻辑结构. 本章重点介绍概率论的两个最基本的概念: 随机事件及其概率. 主要内容包括: 随机事件和随机事件的概率的定义、古典概型与几何概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式以及事件的独立性等. 这些内容是进一步学习概率论的基础.

### § 1.1 随机事件

#### 一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象, 一类是在一定条件下必然出现的现象, 称为**确定性现象**. 例如, 一物体从高度为  $h$  (米) 处垂直下落, 则必然在  $\sqrt{\frac{2h}{g}}$  秒后落到地面, 其中  $g = 9.8$  (米/秒<sup>2</sup>) 为重力加速度. 我们已学过的数学学科均以确定性现象为研究对象, 并为研究其量的规律性提供工具和方法. 另一类则是我们事先无法准确预知其结果的现象, 称为**随机现象**. 例如, 投掷一枚硬币, 我们不能事先预知将出现正面还是反面. 在实际中, 我们经常要面对和处理随机现象, 比如, 明天是否会下雨? 某种股票明天价格是多少? 电视机价格是否会在近期下调? 这些问题往往事先不能得到明确的答案, 却与我们的切身利益密切相关. 概率论以随机现象为研究对象.

#### 二、随机现象的统计规律性

由于随机现象的结果事先不能预知, 初看起来, 随机现象毫无规律可言. 然而人们发现同一随机现象在大量重复出现时, 其每种可能的结果出现的频率却具有稳定性, 从而表明随机现象也有其固有的量的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性称为**随机现象的统计规律性**.

为了对随机现象的统计规律性进行研究,人们往往要对随机现象进行观察,我们把对随机现象的观察称为**随机试验**,简称为**试验**.例如,某射手对固定目标进行射击,观察其是否射中;观察某地区夏季暴雨次数;观察某电话交换台每日收到的呼叫次数等均为随机试验.一般地,一个随机试验要求满足下列特点:

- (1) 可重复性 试验原则上可在相同条件下重复进行;
- (2) 可观察性 试验结果是可观察的,所有可能的结果是明确的;
- (3) 随机性 每次试验将要出现的结果是不确定的,事先无法准确预知.

历史上,研究随机现象统计规律性的最著名的试验是投掷硬币的试验.我们知道,投掷一枚均匀硬币时,事先无法准确预知将出现正面还是反面.但是,当人们重复投掷上千次时,却发现出现正面和反面的次数大致相等,即各自占总试验次数的比例(即频率)大致等于 0.5,而且随着试验次数的增加,这一比例会更加稳定地靠近 0.5,表 1.1 列出了历史上一些试验的记录.

表 1.1 历史上投掷硬币试验的记录

试验者	投掷次数( $n$ )	正面次数( $r_n$ )	正面频率( $\frac{r_n}{n}$ )
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson K	12 000	6 019	0.501 6
Pearson K	24 000	12 012	0.500 5

### 三、样本空间

正如前面指出的,一个随机试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的.我们把随机试验的每一个可能结果称为一个**样本点**,因而一个随机试验的所有样本点也是明确的,它们的全体,称为**样本空间**,通常用  $\Omega$  表示. $\Omega$  中的点,即样本点,用  $\omega$  表示.

**例 1.1** 在投掷一枚硬币观察其出现正面还是反面的试验中,有两个样本点:正面、反面.样本空间为

$$\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\},$$

记  $\omega_1 = \text{“正面”}$ ,  $\omega_2 = \text{“反面”}$ ,则样本空间可表示为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

**例 1.2** 在投掷一枚骰子,观察其出现的点数的试验中,有 6 个样本点:1 点,2 点, $\dots$ ,6 点.样本空间为

$$\Omega = \{1 \text{ 点}, 2 \text{ 点}, \dots, 6 \text{ 点}\},$$

或干脆将样本点分别简记为 1,2, $\dots$ ,6,相应地,样本空间记为

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}.$$

**例 1.3** 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数,其样本点有可数无穷多个: $i$  次,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , 样本空间为

$$\Omega = \{0 \text{ 次}, 1 \text{ 次}, 2 \text{ 次}, \dots\},$$

或简记为  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**例 1.4** 观察一个新灯泡的寿命,其样本点也有无穷多个(且不可数!): $t$  小时,  $0 \leq t < +\infty$ , 样本空间为

$$\Omega = \{t \text{ 小时} \mid 0 \leq t < +\infty\},$$

或简记为

$$\Omega = \{t \mid 0 \leq t < +\infty\} = [0, +\infty).$$

#### 四、随机事件

在随机试验中,人们除了关心试验的结果本身外,往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征,概率论中将这一可观察的特征称为一个**事件**.例如,投掷一枚骰子,我们也许会关心出现的点数是否为偶数,“点数为偶数”就是一个事件.同样,“点数小于 7”也是一个事件.但这两个事件有着根本的区别,前者在随机试验中可能发生也可能不发生,这样的事件称为**随机事件**.后者在试验中是必然发生的,这样的事件称为**必然事件**.与必然事件完全对立的是,在试验中一定不发生的事件,称为**不可能事件**.比如在上述试验中“点数不小于 7”是不可能事件.虽然必然事件与不可能事件是完全对立的,但它们有一个共同的特点,那就是在试验之前我们能够准确预知其是否发生,因而均不是随机事件,通常称之为**确定性事件**.概率论研究的是随机事件,但为方便起见常常将必然事件和不可能事件视为随机事件的极端情形,并将随机事件简称为**事件**,通常记作  $A, B, \dots$ .

**例 1.5** 在投掷一枚骰子的试验中,分别记

“点数是 6”为  $A$ ,

“点数小于 5”为  $B$ ,

“点数小于 5 的偶数”为  $C$ ,

则  $A, B, C$  均为事件,但事件  $A$  的结构最为简单,它对应于一个惟一的可能结果,即样本点,这样的事件称为**基本事件**<sup>①</sup>.在本例中,共有 6 个基本事件(对应于 6 个样本点):“点数为 1”,“点数为 2”, $\dots$ ,“点数为 6”.基本事件的称谓缘于相对其他事件而言,它们是最基本的,其他事件均可由它们复合而成,而它们自身又不能再分解成其他事件.事件  $B$  和  $C$  均不是基本事件,它们分别可以由一些基本事件复合而成.比如事件  $C$  可由“点数为 2”和“点数为 4”两个基本事件复合而成.

<sup>①</sup> 在一般的讨论中,基本事件并不一定是事件,在本书的讨论中,我们均假设基本事件是事件

## 五、事件的集合表示

根据定义,样本空间  $\Omega$  是随机试验的所有可能结果——即样本点  $\omega$  的全体,因而样本空间实际上是所有样本点构成的集合,相应的每一样本点是该集合中的元素. 而一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成,所以一个事件对应于  $\Omega$  中具有相应特征的样本点(元素)构成的集合,它是  $\Omega$  的一个子集. 于是任何一个事件,可以用  $\Omega$  的某一子集来表示,通常用符号  $A, B, \dots$  来记. 某事件发生,就是属于该集合的某一样本点在试验中出现. 如果记  $\omega$  为试验中出现的样本点,那么事件  $A$  当且仅当  $\omega \in A$  时发生.

**例 1.6** 在例 1.5 中,样本空间为  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 事件  $B$  和  $C$  则可分别表示为

$$B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$C = \{2, 4\}.$$

由于样本空间  $\Omega$  包含所有可能结果,试验结果必是其中之一,所以样本空间作为一个事件是必然发生的,即为必然事件,今后用  $\Omega$  表示必然事件. 空集  $\emptyset$  作为  $\Omega$  的子集不含有任何样本点,不管试验的结果是什么,  $\emptyset$  作为一个事件总不会发生,因而是不可能事件. 今后用  $\emptyset$  来表示不可能事件.

## 六、事件间的关系与运算

在一个随机试验中,一般有很多随机事件,为了通过对简单事件的研究来掌握复杂事件,我们需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算. 前面引进的事件的集合表示为这一任务提供极大的便利.

### 1. 事件的包含

如果事件  $A$  发生必然导致  $B$  发生,即属于  $A$  的每一个样本点一定也属于  $B$ , 则称事件  $B$  包含事件  $A$ , 或称事件  $A$  包含于事件  $B$ , 或称  $A$  是  $B$  的子事件, 记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B.$$

显然,事件  $A \subset B$  的含义与集合论中的含义是一致的. 对任意事件  $A$ , 易知

$$\emptyset \subset A \subset \Omega.$$

### 2. 事件的相等

如果事件  $A$  包含事件  $B$ , 事件  $B$  也包含事件  $A$ , 则称事件  $A$  与  $B$  相等(或等价), 记作  $A = B$ . 易见,相等的两个事件总是同时发生或同时不发生. 更直接的表述是:  $A = B$  是指  $A$  与  $B$  所含的样本点完全相同,这等同于集合的相等.

### 3. 事件的并(或和)

“事件  $A$  与  $B$  至少有一个发生”这一事件称作事件  $A$  与  $B$  的并(或和), 记

作  $A \cup B$  或  $A + B$ . 显然, 事件  $A \cup B$  是由  $A$  和  $B$  的样本点共同构成的事件, 这与集合的并集的含义是一致的.

例 1.7 在投掷一枚骰子的试验中, 记

$A =$  “点数为奇数”,

$B =$  “点数小于 5”,

则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

#### 4. 事件的交(或积)

“事件  $A$  和  $B$  都发生”这一事件称为事件  $A$  与  $B$  的交(或积), 记作  $A \cap B$  (或  $AB$ ). 显然,  $A \cap B$  实际上是由  $A$  和  $B$  的公共样本点所构成, 这与集合的交的含义一致.

在例 1.7 中, 事件  $A$  与  $B$  的交为

$$A \cap B = \{1, 3\}.$$

#### 5. 事件的差

“事件  $A$  发生而  $B$  不发生”这一事件称为事件  $A$  与  $B$  的差, 记作  $A - B$ .

在例 1.7 中, 事件  $A$  与  $B$  的差为

$$A - B = \{5\}.$$

#### 6. 互不相容事件

若事件  $A$  与  $B$  不可能同时发生, 也就是说,  $AB$  是不可能事件, 即  $AB = \emptyset$ , 则称事件  $A$  与  $B$  是互不相容事件.

比如, 在投掷一枚骰子的试验中, “点数小于 3”和“点数大于 4”这两个事件是互不相容事件.

#### 7. 对立事件

“事件  $A$  不发生”, 这一事件称为事件  $A$  的对立事件, 记作  $\bar{A}$ , 易见,  $\bar{\bar{A}} = A$ , 且  $\bar{A} = \Omega - A$ . 根据定义, 在一次试验中, 如果  $A$  发生, 则  $\bar{A}$  一定不发生, 如果  $A$  不发生, 则  $\bar{A}$  一定发生, 也就是说  $A$  与  $\bar{A}$  一定也只能发生其中之一, 因而有

$$A\bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega$$

例如, 在投掷一枚骰子的试验中记  $A$  为事件“点数为偶数”, 则  $\bar{A}$  为事件“点数为奇数”.

#### 8. 有限个或可数个事件的并与交

设有  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 则称“ $A_1, A_2, \dots, A_n$  至少有一个发生”这一事件为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的并, 记作  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  或  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ . 称“ $A_1, A_2, \dots, A_n$  都发生”这一事件为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交, 记作  $A_1 A_2 \dots A_n$  或  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ .

设有可数个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , 则称“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  至少有一个发

生”这一事件为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的并, 记作  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , 称“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

都发生”这一事件为事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的交, 记作  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .

### 9. 完备事件组

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是有限或可数个事件, 如果其满足:

$$(1) A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots;$$

$$(2) \bigcup_i A_i = \Omega,$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是一个完备事件组.

显然,  $A$  与  $\bar{A}$  构成一个完备事件组.

### 10. 事件的关系与运算的文氏图

上述关于事件的各种关系与运算可直观地用图形(文氏图)来表示(见图 1.1).

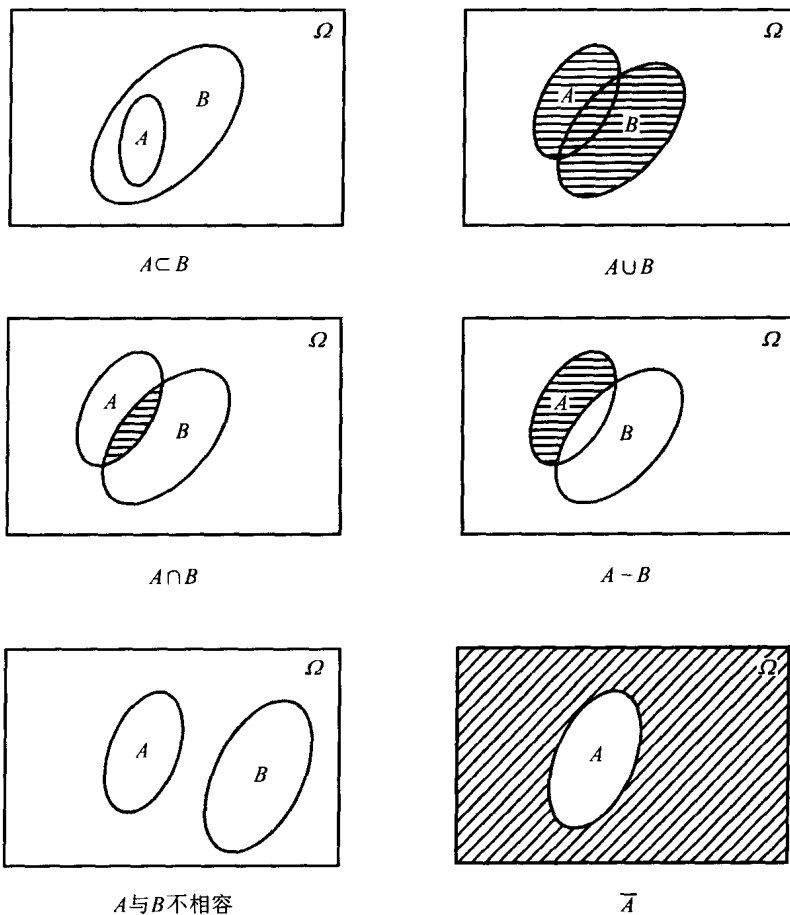


图 1.1 事件的关系与运算的文氏图

**例 1.8** 考察某一位同学在一次数学考试中的成绩,分别用  $A, B, C, D, P, F$  表示下列各事件(括号中表示成绩所处的范围):

$A$ ——优秀( $[90, 100]$ ),  $D$ ——及格( $[60, 70]$ ),  
 $B$ ——良好( $[80, 90]$ ),  $P$ ——通过( $[60, 100]$ ),  
 $C$ ——中等( $[70, 80]$ ),  $F$ ——未通过( $[0, 60]$ ),

则  $A, B, C, D, F$  是两两不相容事件; $P$  与  $F$  是互为对立的事件,即有  $\bar{P} = F$ ;  
 $A, B, C, D$  均为  $P$  的子事件,且有  $P = A \cup B \cup C \cup D$ .

**例 1.9** 甲、乙、丙三人各射一次靶,记  $A$ ——“甲中靶”, $B$ ——“乙中靶”,  
 $C$ ——“丙中靶”,则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

- (1) “甲未中靶”—— $\bar{A}$ ;
- (2) “甲中靶而乙未中靶”—— $A\bar{B}$ ;
- (3) “三人中只有丙未中靶”—— $AB\bar{C}$ ;
- (4) “三人中恰好有一人中靶”—— $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$ ;
- (5) “三人中至少有一人中靶”—— $A + B + C$ ;
- (6) “三人中至少有一人未中靶”—— $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ ;
- (7) “三人中恰有两人中靶”—— $AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$ ;
- (8) “三人中至少两人中靶”—— $AB + AC + BC$ ;
- (9) “三人均未中靶”—— $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ;
- (10) “三人中至多一人中靶”—— $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ;
- (11) “三人中至多两人中靶”—— $\overline{ABC}$ ;

用其他事件的运算来表示一个事件,方法往往不惟一(比如例 1.9 中的(6)和(11)实际上是同一事件)读者应学会用不同方法表达同一事件,在解决具体问题,特别是进行概率计算时,往往要根据需要选择其中的一种方法.例 1.9 中许多事件不止一种表达方法,读者可对此进行讨论.

## 七、随机事件的运算律

我们学过集合的运算律,事件也有相应的运算律,归纳于下:

### 1. 关于求和运算

- (1)  $A \cup B = B \cup A$ . (交换律)
- (2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ . (结合律)

### 2. 关于求交运算

- (1)  $A \cap B = B \cap A$ . (交换律)
- (2)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ . (结合律)

### 3. 关于求和与求交运算的混合

- (1)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . (第一分配律)



$$(2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \text{(第二分配律)}$$

4. 关于求对立事件的运算

$$\overline{\overline{A}} = A. \text{(自反律)}$$

5. 关于和及交事件的对立事件

$$(1) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \text{(第一对偶律)}$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \text{(第二对偶律)}$$

上述各运算律可以推广到有限个和可数个事件的情形,读者可通过复习集合论的知识自行给出.

## § 1.2 随机事件的概率

### 一、概率和频率解释

我们知道,在一次随机试验中,一个随机事件是否会发生,事先不能确定.但是,我们可以问,在一次试验中,事件  $A$  发生的可能性有多大?比如,投掷一枚均匀硬币,我们不能肯定是否会出现正面.但由于硬币是均匀的,我们有理由认为,出现正面和出现反面的可能性相同,均为  $\frac{1}{2}$ .但可能性大小究竟意味着什么呢?简单地说,它反映了一次试验中事件  $A$  出现的机会.然而这种机会在一次试验的实际结果中无法体现.可以想像,如果  $A$  发生的机会越大,那么在大量重复试验它将出现得越频繁,也就是说出现的频率会越大.在投掷一枚均匀硬币的试验中,如果果真出现正面和反面的机会均等,即可能性均为  $\frac{1}{2}$ ,那么在大量重复试验中,出现正面和反面的频率会接近.事实正是如此,正如前一节指出的,大量重复投掷一枚均匀硬币,出现正面和反面的频率会接近一个稳定值  $\frac{1}{2}$ .可见频率的稳定值与事件发生的可能性大小存在内在必然的联系.一方面频率的稳定值说明事件发生的可能性大小确实是一种客观存在,另一方面,频率的稳定值对事件发生的可能性大小提供了经验解释.为此,引入下列定义:

**定义 1.1** 随机事件  $A$  发生的可能性大小的度量(数值),称为事件  $A$  发生的**概率**,记作  $P(A)$ .

正如前面指出的,一个事件  $A$  发生的可能性的**大小**——**概率**,在经验上表现为大量重复试验中事件  $A$  发生的**频率的稳定值**.因而频率的稳定值为概率的含义提供了一种经验上的直观.但频率的稳定值本身并不是概率的本质,不能作为概率的定义.一个事件的**概率**是由事件本身特征所决定的客观存在,就好比一