经贸高校统编教材

概率论

对外贸易教育出版社

概　率　论

對外贸易教育出版社

概 率 论

部人教局教材编写组编

责任编辑　刘　坚

*

对外贸易教育出版社出版

北京密云华都印刷厂印装

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本850×1168　1/32・印张8・125字数210千字

1989年9月第一版　1989年9月第一次印刷

印数：1—2,000册・定价：2.00元

ISBN 7-81000-397-6/G・123

前　　言

《经贸应用数学基础》教材，是由对外经济贸易部教育局组织编写的。参加编写的院校有对外经济贸易大学、上海外贸学院、广州外贸学院、天津外贸学院。

数学在经贸活动中有着广泛的应用，在经贸的理论研究中占有很重要的位置。随着我国对外开放、深化改革形势的发展，从事经贸工作的同志对数学的需求愈来愈迫切。为培养经贸人材具备必要的经贸应用数学基础知识，特编写此教材。

本教材共分四册：（一）高等数学、（二）线性代数、（三）概率论、（四）运筹学。

本册为第三册《概率论》。主要内容有：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、随机向量、大数定律与中心极限定理。

本书由刘金贵（第一至七章）徐世贤、王鹏起、徐庆炎、文超强、罗文弘、赵弘编写。

本教材除作为经贸部普通高等院校的试用教材外，还可作为财经院校的试用教材和经贸工作者的参考用书。

书中带 * 号和小字体的内容，可灵活掌握。

限于编者的水平，缺点和错误在所难免，欢迎批评指正。

部教育局

1990.1

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1-1　随机事件

随机现象

在现实世界中，存在着两类不同的现象。一类是确定性现象，即在一定条件下必然出现（或必然不出现）某一种结果的现象。例如，向上丢掷一枚硬币必然下落，在标准大气压下20°C的纯水必不沸腾，等等。过去我们学过的微积分和线性代数等就是研究这类确定性现象的数学工具。另一类现象是随机现象，即在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先肯定出现哪种结果的现象。下面，我们结合对外经济贸易，举几个随机现象的例子。

例1-1　某进出口公司，与外商谈判，可能成功也可能失败，每一次谈判的结果，在谈判前是不能完全肯定的。

例1-2　一个港口，每天进港的集装箱货轮的数量为0至5艘不等。在一天内，究竟进港几艘，事先也不能完全肯定。

例1-3　对一批进口商品进行质量检查，任意抽取n件，其中次品件数可能是0，1，2，…，n。在抽取前，次品出现的件数也是不能完全肯定的。

例1-4　为增强某种出口产品的竞争能力，需试制一种新产品。为此，要进行科学实验，直到实验成功为止。实验次数可能是1，2，3，…，在实验成功以前，实验次数也不能完全肯定。

例1-5　在国际市场上，每年对我国某种出口商品的需求量为2000吨到4000吨。一年究竟销售多少吨，事前也是不能准确预

言的。

这类随机现象广泛存在于自然界和人类社会中，诸如一个车间同时工作着的机床数、农作物的单产、某商店一天接待的顾客数、打靶时的弹着点、英文书一页上某字母出现的次数，等等。因此，对这类随机现象的研究便具有重大意义。概率论就是研究随机现象数量规律性的一个数学分支，它的任务是从随机现象的偶然性中，揭露出内在的必然性来。概率论不论在自然科学领域还是在社会科学领域，都有着广泛的应用，它是从事经贸工作的必不可少的工具之一。

随机试验

为了叙述方便，通常把在一定条件下的科学实验或对某一事物的观察，统称为**试验**。如果一个试验具有如下特点：

〈1〉 试验的所有可能结果是明确的、已知的，并且不止一个；

〈2〉 每次试验必然出现这些可能结果中的一个，并且只出现一个；

〈3〉 在一次试验以前，不能完全肯定试验会出现哪一个结果。

那么，称这样的试验为**随机试验**。今后，我们所讨论的试验都是随机试验 为了方便，随机试验也简称为**试验**。随机试验实际上是对随机现象的试验（观察）；随机现象实际上是相应随机试验中出现的现象。今后，对随机现象的研究，总归结为对随机试验的研究。

样本空间

由于随机试验所有可能结果是正确的、已知的。因而，它们的全体可以构成一个集合，我们称这个集合为**样本空间**，记作Ω。样本空间中的元素，即试验的可能结果，称为**样本点**，记作ω。

对于例1-1，取样本点

ω_1 = （与外商谈判成功），ω_2 = （与外商谈判失败）

则样本空间Ω = $\{\omega_1, \omega_2\}$。

对于例1-2，取样本点

$$\omega_i = \text{（进港的集装箱货轮为}i\text{艘）}$$

则样本空间Ω＝｛ω_0，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5｝。这时，如果简记ω_i为i，则样本空间Ω＝｛0，1，2，3，4，5｝。

对于例1-3，取样本点

$$i = \text{（次品数为}i\text{件）}$$

则样本空间Ω＝｛0，1，2，…，n｝。

以上的几个样本空间，只有有限个样本点。

对于例1-4，取样本点

$$i = \text{（实验到第}i\text{次才成功）}$$

则样本空间Ω＝｛1，2，3，…｝。其中的样本点数有无穷多个，它们可以按照一定顺序排列出来。这种可列无穷多个，以后我们简称**可列个**。

对于例1-5，取样本点

$$\omega_Q = \text{（销售量为}Q\text{吨）}$$

则本空间Ω＝｛ω_Q：$2000 \leqslant Q \leqslant 4000$｝。这时，如果简记$\omega_Q$为$Q$，则样本空间$\Omega$＝〔2000，4000〕。其中的样本点也有无穷多个，它们充满一个区间，可以证明它们是不可列的。

随机事件

在一次随机试验中，可能出现也可能不出现的事情，称为**随机事件**，简称**事件**，用大写字母A，B，C，…，表示。

例1-6 在例1-2中，考虑一天内进港的集装箱货轮数量：

A＝{不超过3艘}，　　B＝{不超过4艘}

C＝{不少于4艘}，　　D＝{4艘}

它们都是随机事件。在一次试验（一天）中，它们是否出现由试验结果（样本点）确定，其中事件D含有一个样本点，而事件A、B和C含有不止一个样本点。它们都是样本空间Ω＝｛0，1，2，3，4，5｝的子集：

A＝{0，1，2，3}，　　B＝{0，1，2，3，4}

C＝{4，5}，　　D＝{4}

随机事件与它包含的样本点的关系，以事件A为例来说明如下：如果事件A＝｛不超过3艘｝出现，则｛0，1，2，3｝中必有一个样本点出现；反之，如果｛0，1，2，3｝中的某一个样本点出现，则事件A＝｛不超过3艘｝必出现。简单地说，**某事件出现当且仅当它所包含的某一个样本点出现。**

我们已经知道，样本空间Ω是包含了全体样本点的集合，而随机事件不过是由某些样本点组成的集合。因此，从集合论的观点来看，实际上**随机事件就是样本空间Ω的某个子集。**

根据随机试验的特点〈2〉，每次试验必有样本空间Ω中的一个样本点出现，所以在任一次试验中，Ω必然出现，在随机试验中，必然出现的事件称**必然事件**，也记作Ω。如例1-3，在抽取的n件商品中｛次品数不超过n件｝和｛次品数大于等于0件｝都是必然事件。相反地，空集ϕ不包含任何样本点，它在任一次试验中都不可能出现。在随机试验中，不可能出现的事件称**不可能事件**，也记作ϕ。如上例，｛次品数超过n件｝和｛次品数小于0件｝都是不可能事件。

概率论研究的事件总是随机事件，尽管必然事件与不可能事件不是随机的，失去了偶然性，但是，由于Ω与ϕ都是Ω的子集，为了讨论方便，也把它们作为随机事件来处理，看作是随机事件的两个极端情况。

由样本空间的单个样本点构成的事件也称为**基本事件**，记作｛ω｝，它是最简单的随机事件。从而，样本空间也称**基本事件空间**或简称**基本空间**。

§ 1-2　事件间的关系和运算

一个样本空间Ω，对应于一个随机试验，可以有许多随机事件。概率论的重要任务之一是从简单事件的规律去推算出复杂事件的规律。为此，需要研究事件间的关系和运算。

假设样本空间Ω已经给定，并且给定Ω中的一件事些、如A BC、A_i（$i=1, 2, \cdots$）等等。因为这些事件都是Ω的子集，所以它们都是由样本点组成的某一个集合。既然事件是集合，那么事件间的关系和算运就应该全部对应着集合论中集合间的关系和运算。只不过要注意用件事的语言来叙述和解释这些关系和运算。下面的表1-1列出了这种对应关系。

表 1-1

符　号	概率论		集合论
	事　件	定　义	
Ω	必然事件	必然出现	空间（全集）
ϕ	不可能事件	不可能出现	空　集
$A, B, \cdots$	随机事件	可能出现也可能不出现	Ω的子集
(ω)	基本事件	由单个样本点构成的随机事件	单点集
$A\subset B$（$B\supset A$）	A是B的子事件	A出现必导致B出现	A是B的子集
$A=B$	等价事件	$A\subset B$且$B\subset A$	集合$A=B$
$A\cup B$	和事件	A、B至少有一个出现即“A或B”	A与B的并集
$A\cap B$（AB）	积事件	A、B同时出现即“A且B”	A与B的交集
$B-A$	差事件	B出现但A不出现	B与A的差集
$\overline{A}$	对立事件	A不出现即“非A”	A的余集
$AB=\phi$	互斥事件	A、B不能同时出现	A、B没有公共元素

另外，同集合论中一样，也可以用图形直观示意事件间的关系和运算。一般用矩形表示Ω，用矩形内的一些区域(Ω的子集)表示事件，这种图示法称为文氏（Venn）图，如图1-1至图1-6所示。

由表1-1及图1-1至图1-6用集合论的观点，不难看出例1-6中的事件A、B、C、D有如下关系：

$$A\subset B,\ B=A\cup D,\ D=BC,$$

$$D=B-A,\ C=\overline{A},\ AD=\phi。$$

一般地，A是B的子事件，也称A是B的特款或B包含了A，由于$\Omega\supset A\supset\phi$，以后称任一事件A是必然事件Ω的子事件，不可能事件是任一事件A的子事件，它们之间具有性质：

$$\phi\cup A=A,\ \phi\cap A=\phi$$

$$\Omega\cup A=\Omega,\ \Omega\cap A=A$$

等价事件也称事件相等，它与子事件都具有传递性：

如果$A\subset B$且$B\subset C$，那么$A\subset C$。

如果$A=B$且$B=C$，那么$A=C$。

差事件具有性质：

$$A-A=\phi,\ A-\phi=A$$

$$A-\Omega=\phi,\ B-A=B\overline{A}$$

对立事件也称余事件或补事件，对立事件具有性质：

$$A\overline{A}=\phi,\quad A\cup\overline{A}=\Omega$$

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad \overline{A}=\Omega-A$$

互斥事件也称事件互不相容。由$A\overline{A}=\phi$知，对立事件$\overline{A}$与A也是互斥事件。但要注意，与A互斥的事件不一定是$\overline{A}$。例如在例1-6中，事件D与A互斥，而$\overline{A}=C$并不等于D。因为，进港货轮超过3艘，并不意味着一定是4艘，还可以是5艘。互斥事件的和事件可用加号“+”表示。如例1-6中A、D互斥，它们的和事件B可以写作$B=A+D$。

和事件也称事件的并，积事件也称事件的交。它们的运算满

足下列规律：

（1） 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2） 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

（3） 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

$A\subset B$

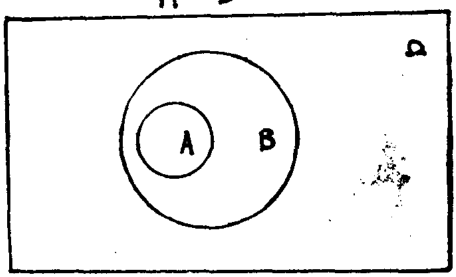

图 1-1

$A\cup B$

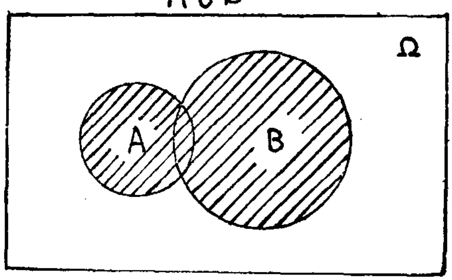

图 1-2

$A\cap B$

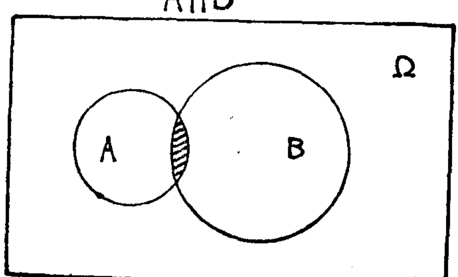

图 1-3

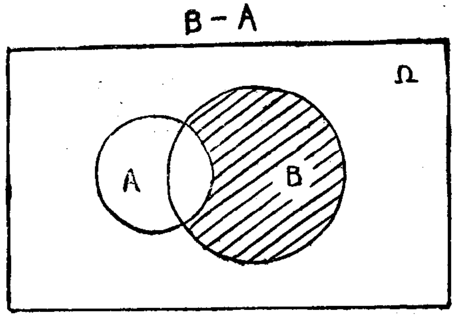

图 1-4

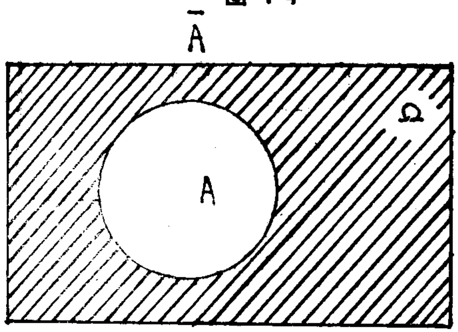

图 1-5

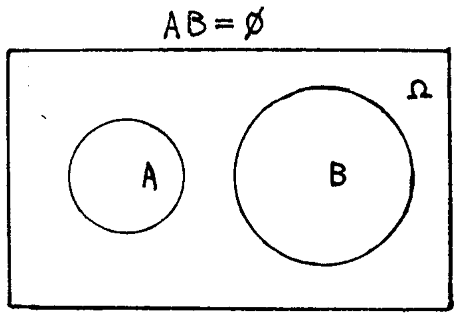

图 1-6

〈4〉 对偶律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;