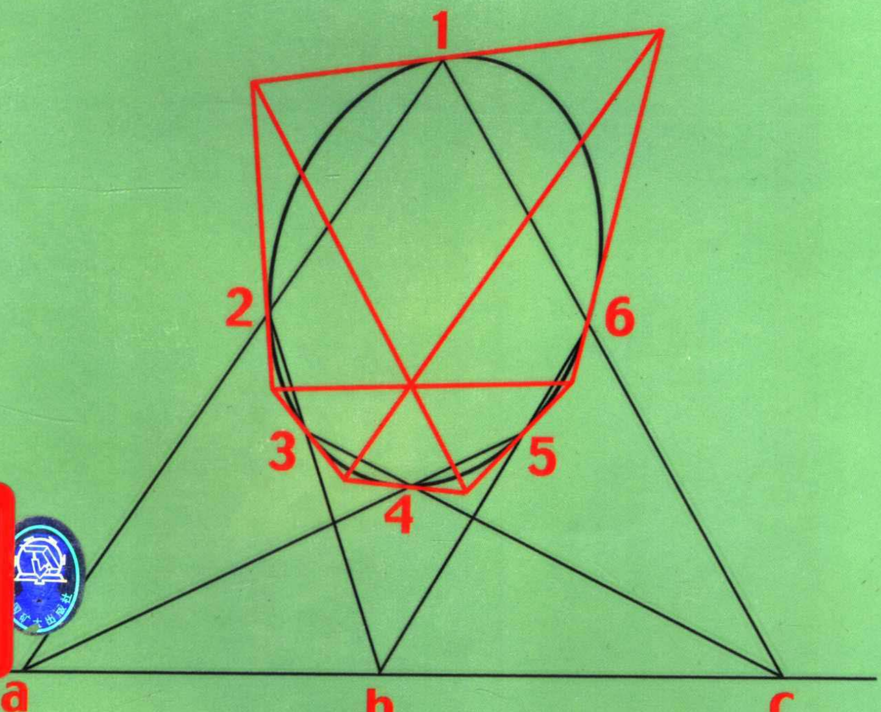
高等几何简明教程

GAODENG JIHE JIANMING JIAOCHENG

吴子汇　徐旭峰　编



中国矿业大学出版社

高等几何简明教程

（修订本）

吴子汇　徐旭峰　编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书根据原国家教委面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，从高等师范院校的特点和需要出发，把解析几何和射影几何及几何基础简介合为一体，共分九章加三个附录. 前三章（向量代数、平面与空间直线、常见曲面）属于欧氏空间解析几何；后六章（平面上的仿射变换、射影平面、射影变换、变换群与几何学、二阶曲线的射影理论、二阶曲线的仿射理论和度量理论）属于平面射影几何；附录Ⅰ是本课程所要用到的一些代数知识；附录Ⅱ属于欧氏平面解析几何的补充；附录Ⅲ（射影几何基础与非欧几何概要）属于几何基础简介；书末附有习题答案与提示.

本书可作为高等师范院校数学教育专业（本、专科）选用教材或参考书，也可供中学数学教师参考.

责任编辑　姜　华　褚建萍
责任校对　周俊平

图书在版编目（CIP）数据

高等几何简明教程/吴子汇，徐旭峰编. —徐州：中国矿业大学出版社，1999，9（2001.7 修订）

ISBN 7-81070-054-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①吴…②徐…　Ⅲ.高等几何-师范院校-教材　Ⅳ.O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 43156 号

中国矿业大学出版社出版发行
（江苏徐州　邮政编码 221008）
出版人 解京选
中国矿业大学印刷厂印刷　新华书店经销
开本 850×1168 1/32　印张 10　字数 251 千字
1999 年 9 月第 1 版　2001 年 7 月第 2 次印刷
印数 3101～4600 册　　定价 22.00 元

前　言

出席美国1998年科学年会的科学家和教育家认为,“21世纪的教育应当把几何学放在头等重要的地位.几何学具有较强的直观效果,有助于提高学生认识事物的能力,应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容.”

我国著名数学家姜伯驹曾说过:“随着科学技术的发展,数学课程要不断改革.其中以几何课程的改革问题争议最多,难度最大.中学如此,大学也如此;中国如此,外国也如此.数学本是几何、代数、分析有机地结合的整体,人们往往看重代数的、分析的方法,而容易忽略几何的观念.其实,无论在数学史上还是在当代数学中,数学思想的飞跃和突破常常是与几何学联系在一起的.”

按照习惯,高等几何与高等代数、高等微积分并称“三高”.1993年9月,徐州师范大学数学系《高等几何》课程被校课程建设委员会确定为第三批20门重点课程之一,1996年1月验收合格.根据数学系的实际情况,系领导确定《高等几何》课程包含《空间解析几何》和《平面射影几何》两门课程.为了使重点课程建设再上一个新台阶,根据原国家教委面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求,有必要进一步把《空间解析几何》和《射影几何》两门几何课程从教材上合并为《高等几何》一门课程,为此,编者在多年使用的自编教材的基础上,以“减少课程、压缩学时、精简内容、突出重点、加强基础、开阔视野”为宗旨,编写这本符合原国家教委下达的经全国44所高师本科院校讨论过的《普通高等师范学校数学教育专业(本科)教育教学基本要求》的简明新教材,定名为《高等几何

简明教程》，并于1998年10月作为徐州师范大学重点教材正式立项. 该书根据高等师范院校的特点和需要，把空间解析几何和平面射影几何及几何基础简介合为一体，共分九章及三个附录. 前三章（向量代数、平面与空间直线、常见曲面）属于欧氏空间解析几何；后六章（平面上的仿射变换、射影平面、射影变换、变换群与几何学、二阶曲线的射影理论、二阶曲线的仿射理论和度量理论）属于平面射影几何，讲授方法兼用综合法与代数法，但是侧重代数法；附录Ⅰ（线性代数有关概念和结论）是本课程所要用到的一些代数知识，只介绍方法和结论，不作证明；附录Ⅱ（二次曲线方程的化简与度量分类）作为欧氏平面解析几何的补充，但不讨论二次曲线的中心、渐近线、直径、主轴等几何性质，而是在第九章讨论. 附录Ⅲ（射影几何基础与非欧几何概要）属于几何基础简介.

本书有三个特点. 首先是体系新颖，一方面把传统的三门几何课程《解析几何》、《射影几何》、《几何基础》合为一体，另一方面采用射影平面的解析定义，用与度量无关的射影坐标定义交比（从而保持了射影几何固有的独立性），把拓广的欧氏平面作为射影平面的一个模型，并给出交比的欧氏几何解释，从而进一步揭示出射影几何与初等几何和欧氏平面解析几何之间的密切联系. 其次是简明扼要，书中区别不同情况，有些定理明确指出证明从略（只要求理解或了解，如有关向量线性相关的若干定理、达布定理、斯丹纳定理等），有些定理只给出直观解释，而某些重要定理则尽可能给出严谨而简明的证明（如向量积的分配律、两异面直线公垂线的存在性和惟一性等），本书篇幅只相当于传统教材的一半左右. 第三个特点是密切联系高等代数、欧氏平面解析几何和初等几何，叙述深入浅出、条理清晰、重点突出、例题较多（全书共有150多道），力求做到易教易学（带 * 号的内容机动性较强，有的可由教师讲授，有的可让学生自学或仅供参考），书末还附有习题答案与提示供参考。

《高等几何》这门课程对于未来的中学数学教师而言，在几何方面的基础的培养（公理法思想，坐标概念扩充，齐次坐标应用，坐标变换与点变换，对偶原理，交比与调和比，极点与极线，配极理论，二阶曲线的分类等）、眼界的开阔（扩大几何视野，了解欧氏几何在几何中的位置，理解仿射几何和欧氏几何都是射影几何的子几何，了解有关射影几何的系统表及罗氏几何的射影模型等）、观点的提高（掌握克莱因的变换群观点，明确射影、仿射、欧氏三种几何间的关系，从而提高对中学几何内容的认识，学会用射影观点解决欧氏平面解析几何问题的方法等）、思维的灵活（由高度概括的射影几何定理演化成初等几何和欧氏平面解析几何中许多命题，如从笛沙格定理出发可得到欧氏几何里的 12 条定理，仅用直尺作圆、椭圆、双曲线、抛物线的切线，在一定条件下仅用直尺可作平行线及线段的中点等）、方法的多样（利用射影几何中三大著名定理——笛沙格定理、巴普斯定理、巴斯加定理，中心射影法，透视对应，完全四点形的调和性质，配极变换等，都可以证明有关共线点和共点线的问题）将起重要的作用. 本书可供高等师范院校数学教育专业（本、专科）选作教材或参考书，也可供中学数学教师参考.

本书的编写和出版，得到了徐州师范大学教务处和数学系领导的大力支持和帮助. 特别要感谢校长周明儒教授、系主任王戈平教授、党总支书记王慈副教授、副主任张福保博士和朱江博士及车素兵副教授，还要感谢几何教研室的吴报强教授、施宝锠副教授、张玉知副教授、张运涛老师、薛芳老师，没有他们的支持，本书就不可能顺利出版.

限于编者的水平，本书一定还存在不少缺点甚至错误，欢迎使用本书的老师和同学批评指正.

吴子汇　徐旭峰

1999 年 7 月

目　录

第一章 向量代数

向量是数学基本概念之一,它在力学、物理学和工程技术中也是解决问题的有力工具.本章介绍向量的概念、向量的代数运算及其规律,并强调直接用向量解几何问题,以便进一步了解向量的几何意义.

§1 向量及其线性运算

1.1 向量的概念

在力学、物理学中碰到的一些量,往往属于两种类型:第一种(如时间、温度、长度等)是由一个实数可完全确定的量,叫做数量(或标量);第二种(如力、速度、位移等)是既有大小又有方向的量,叫做向量(或矢量).在数学中常用有向线段表示向量,于是称有向线段为向量.起点是 A、终点是 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$,有时也用 $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\cdots$ 或用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\cdots$ 来记向量(图 1-1).

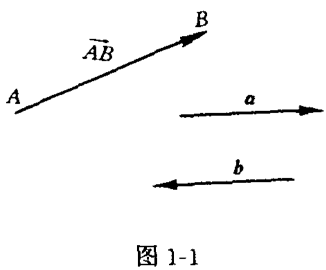


图 1-1

有向线段的长度和方向分别叫做向量的长度和方向.向量的长度通常也称为模,$\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$.

模相等且方向相同的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 叫做相等向量,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.模相等但方向相反的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 叫做互为反向量,记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.例如,$OACB$ 是一个平行四边形,且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=$

$\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=-\boldsymbol{b}$(图 1-2).显然

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB},-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA} \quad (1\text{-}1)$$

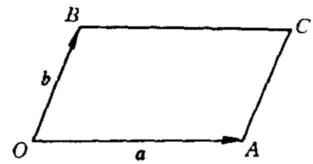


图 1-2

模等于零的向量叫做零向量(或零矢),记作 $\mathbf{0}$,它是起点和终点重合的零线段.零向量没有确定方向.规定:所有零向量都相等.

模等于 1 的向量叫做单位向量(或幺矢).与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$.

如果只考虑向量的模和方向,而起点可以任意选取,这样的向量通常叫做自由向量.由于自由向量起点的任意性,可以选取某一点作为一些向量的公共起点,称为把那些向量归结到共同的起点,从而给研究带来方便.

如果把一组向量归结到共同的起点时,它们是共线的(或共面的),则称这组向量共线(或共面).共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 也叫做平行的向量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

附注 向量只有相等与不相等之分,没有大小关系之别,即“大于”或“小于”的概念对向量不适用.记号 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}=3$ 没有意义;但$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}|=3$ 有意义.

1.2 向量的加法

在物理学中,如果有方向不同的两个力$\boldsymbol{f}_1$和 $\boldsymbol{f}_2$ 作用于同一个质点 A,那么它们产生一个合力 $\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{f}$ 的大小和方向正好由以 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 为邻边向量的平行四边形的对角线向量(起点为 A)来表示(图 1-3),这就是所谓的“平行四边形法则”.对于位移的合成,则有所谓的“三角形法则”,即点 A 位移到点 B,再从点 B 位移到点 C,合起来就是点 A 到点 C 的位移(图 1-4).关于力的合成,也可以应用三角形法则,只要把一个力的起点移到另一个力的终点即可.

根据以上讨论,可以这样定义两向量的和:

由一点 A 接连作出两个向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,从起点 A 到终

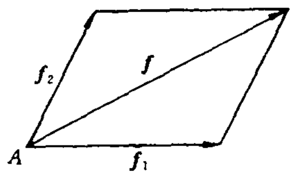


图 1-3

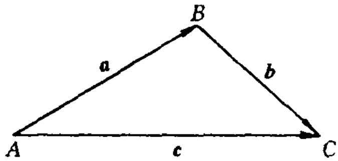


图 1-4

点 C 的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 叫做两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 于是，有如下的求和法则：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad \text{（向量加法的三角形法则）}$$

求两向量的和的运算，叫做向量的加法.

根据向量加法的三角形法则，可得关于向量长度的三角形不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{1-2}$$

向量的加法满足如下运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （向量加法交换律）

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （向量加法结合律）

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ （零向量性质）

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ （反向量性质）

(1)式和(2)式的证明可参见图 1-5 和图 1-6；(3)式和(4)式根据零向量、反向量的定义是显然成立的.

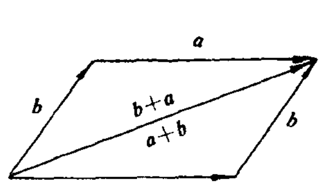


图 1-5

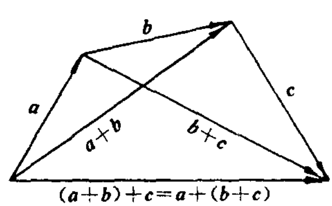


图 1-6

附注 向量加法的运算规律说明：向量的加法可以像实数的

加法那样进行运算. 例如:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \qquad \text{(多项相加可以不加括号)}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3}+\cdots+\overrightarrow{M_{n-1}M_n}=\overrightarrow{M_1M_n} \quad \text{(向量加法的多边形法则)}$$

向量的减法是加法的逆运算. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$ 时,把 $\boldsymbol{c}$ 叫做两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 即

$$\text{若} \quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}, \quad \text{则} \quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

求两向量的差的运算,叫做向量的减法.

如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有共同的起点,那么其差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是从减向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量(图 1-7). 这就是有共同起点的两向量的差的几何作图法.

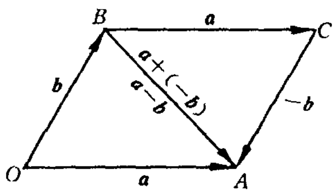


图 1-7

关于向量的减法,有如下法则(图 1-7):

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \tag{1-3}$$

即减去一个向量相当于加上这个向量的反向量. 有了这个向量减法法则,向量减法就可以转化为向量加法,因而对向量的减法就没必要再另外讨论了.

附注 1 图 1-7 是向量减法法则的直观解释(当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时). 向量减法法则可证明如下:

根据向量差的定义,只须证 $\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{a}$. 事实上

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]&=[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b} && \text{(向量加法交换律)}\\
&=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}] && \text{(向量加法结合律)}\\
&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} && \text{(反向量性质)}\\
&=\boldsymbol{a} && \text{(零向量性质)}
\end{aligned}$$

附注 2 由向量差的定义还可导出向量等式的移项法则及去括号法则,即

$$\text{若} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}, \quad \text{则} \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}\mp\boldsymbol{c}$$

$$a+(b-c) = a+b-c$$
$$a-(b-c) = a-b+c.$$

1.3 数乘向量

在物理学中，匀速直线运动的运动方程为 $s=vt$；若用向量表示，则可写成 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$. 又如牛顿第二运动定律为 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$. 由此引出数乘向量的积的概念：

实数 λ 乘向量 $\boldsymbol{a}$ 得到一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}\lambda$）. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反（图 1-8）. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 就叫做数 λ 乘向量 $\boldsymbol{a}$ 的积.

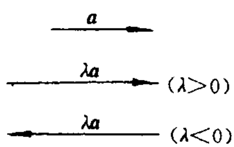


图 1-8

求数乘向量的积的运算，叫做数乘向量，简称数乘.

根据数乘向量的积的定义，不难证明：$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，即 $(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即利用单位向量可将一个非零向量明确地分解为它的模和方向.

数乘向量满足如下运算规律：

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　　（数乘关于数因子的结合律）

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　　（数乘分配向量因子）

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　　（数乘分配数因子）

(1)式是显然成立的；(2)式只须证明等号两端的向量模相等且方向相同；(3)式和(4)式的直观解释分别见图 1-9（当 $\lambda,\mu>0$ 时）和图 1-10（当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时）.

显然，由向量的加法和数乘的定义可知，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是共面的（其中 λ、μ 为任意实数）. 关于两向量共线，有以下重要结论：

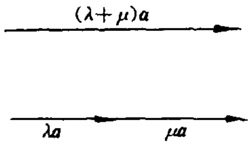


图 1-9

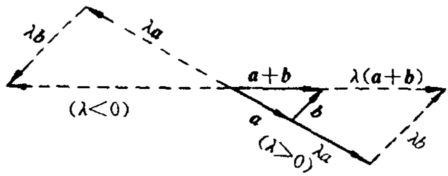


图 1-10

若 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$(其中 λ 为实数)，即

$$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\qquad\text{(两向量共线条件)}$$

证 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，由数乘的定义可知，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 必共线，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$；反之，若 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，总可以找到惟一的实数 λ，使 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，而 λ 的正负号依 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向而定，于是有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

向量的加法和数乘向量统称为向量的线性运算. 向量的线性运算可以像多项式那样进行. 例如：

$$\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b})=(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)\boldsymbol{a}+(\mu_1\nu_1-\mu_2\nu_2)\boldsymbol{b}.$$

附注 1 对于数乘向量而言，交换律是定义中规定的；结合律必须假定三个因子中有两个数因子和一个向量因子；分配律由于因子的性质不同而有两个.

附注 2 向量除以数有意义：$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}(\lambda\neq 0)$；数除以向量 $\dfrac{\lambda}{\boldsymbol{a}}$ 没有意义；向量除以向量一般没有意义，只有在非常特殊的情况下才有意义，即当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线，且 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时，有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，记作 $\lambda=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$，$\lambda$ 称为共线向量的比值.

［**例 1**］ 已知点 M 是把有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 分成定比 λ 的分点(即 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$)，$O$ 是空间任一点(图 1-11). 试证

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}.$$

证 已知 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，

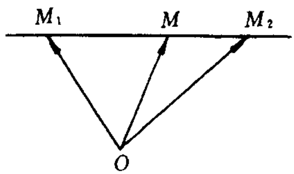


图 1-11

而 $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$,

$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}$

故 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM})$

所以 $$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}. \qquad (1\text{-}4)$$

附注 式(1-4)称为线段的定比分点向径公式,当 $\lambda=1$ 时即得线段的中点向径公式 $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}}{2}$.

*[**例 2**] 用向量方法证明梅耐劳斯(Menelans)定理:设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 或其延长线上的点(图 1-12),则 A', B', C' 三点共线的充要条件是

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=-1.$$

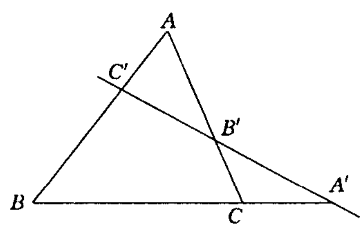


图 1-12

证 在 $\triangle ABC$ 所在平面外任选一点 O,以 O 为共同起点、以 A,B,C,A',B',C' 为终点的向量分别记作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'$. 由线段的定比分点向径公式得

$$\boldsymbol{a}'=\frac{\boldsymbol{b}+\lambda_1\boldsymbol{c}}{1+\lambda_1},\quad \boldsymbol{b}'=\frac{\boldsymbol{c}+\lambda_2\boldsymbol{a}}{1+\lambda_2},\quad \boldsymbol{c}'=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_3\boldsymbol{b}}{1+\lambda_3}$$

$$\left(\lambda_1=\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}},\quad \lambda_2=\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}},\quad \lambda_3=\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\right)$$

必要性:设 A', B', C' 三点共线,则必有

$$\boldsymbol{c}'=\frac{\boldsymbol{a}'+\lambda\boldsymbol{b}'}{1+\lambda}\qquad\left(\lambda=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}\right)$$

于是 $$\frac{\boldsymbol{b}+\lambda_1\boldsymbol{c}}{1+\lambda_1}+\lambda\cdot\frac{\boldsymbol{c}+\lambda_2\boldsymbol{a}}{1+\lambda_2}=(1+\lambda)\cdot\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_3\boldsymbol{b}}{1+\lambda_3}$$

因 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，故比较等号两边 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的系数可得

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda\lambda_2}{1+\lambda_2}=\dfrac{1+\lambda}{1+\lambda_3} & ①\\ \dfrac{1}{1+\lambda_1}=\dfrac{\lambda_3(1+\lambda)}{1+\lambda_3} & ②\\ \dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda_2}=0 & ③\end{cases}$$

由①,②,③可得

$\lambda=-\lambda_1\cdot\dfrac{1+\lambda_2}{1+\lambda_1}$, 且 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$, 即 $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=-1$.

充分性：设 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，若令 $\lambda=-\lambda_1\cdot\dfrac{1+\lambda_2}{1+\lambda_1}$，则

$$\boldsymbol{c}'=\frac{\boldsymbol{a}'+\lambda\boldsymbol{b}'}{1+\lambda}，故 A',B',C' 三点共线.$$

［**例 3**］ 用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形；反之，平行四边形的对角线互相平分.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 互相平分于点 P（图 1-13），则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{DC}$$

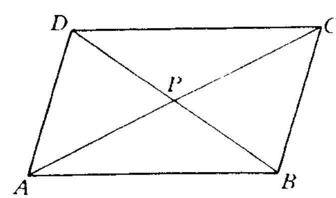


图 1-13

故 $\overrightarrow{AB}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，所以 $ABCD$ 为平行四边形.

反之，设▱$ABCD$ 的对角线 AC 的中点为 P，则根据线段的中点向径公式得

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

即 P 为 BD 的中点.