图灵数学·统计学丛书

An Introduction to Probability Theory and Its Applications

概率论及其应用

（第3版）

[美] 威廉·费勒 著
胡迪鹤 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 统计学丛书

An Introduction to Probability Theory and Its Applications

概率论及其应用

（第3版）

[美] 威廉·费勒 著
胡迪鹤 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目（CIP）数据

概率论及其应用：第 3 版 / （美）费勒著；胡迪鹤译．—北京：人民邮电出版社，2006.5
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 7-115-14729-9

Ⅰ．概… Ⅱ．①费…②胡… Ⅲ．概率论 Ⅳ．0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 036002 号

内 容 提 要

本书涉及面极广，不仅讨论了概率论在离散空间中的诸多课题，也涉及了概率论在物理学、化学、生物学（特别是遗传学）、博弈论及经济学等方面的应用．主要内容有：样本空间及其上的概率计算，独立随机变量之和的随机起伏，事件的组合及条件概率，离散随机变量及其数字特征，大数定律，离散的马尔可夫过程及其各种重要特征，更新理论等．除正文外，本书还附有六七百道习题和大量的附录．

本书既可作概率论及相关学科的教学参考书，亦可作为科学研究的引导书．特别是此书中有关随机性和概率思想的论述，极具启发性．

图灵数学·统计学丛书

概率论及其应用（第 3 版）

◆ 著 ［美］威廉·费勒
译 胡迪鹤
责任编辑 王丽萍

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http //www ptpress com cn
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：25.5
字数：529 千字 2006 年 5 月第 1 版
印数：1 – 4 000 册 2006 年 5 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号 图字：01-2005-4376 号

ISBN 7-115-14729-9/TP • 5377

定价：59.00 元

读者服务热线：(010)88593802 印装质量热线：(010)67129223

第三版中译本译者序

威廉・费勒（William Feller）所著《概率论及其应用》（第一卷）初版出版于1950年，1957年再版．原著第二版曾出过中译本．此译本是根据原著1967年的第三版翻译的．第三版较之前两版，不仅正文、附录、习题，甚至连参考文献，都做了大量的增、删和修改．有些章节完全是新的，如第3章；有些专题增加了许多新内容，如分支过程、马尔可夫链、各种极限定理等等．

威廉・费勒对近代概率论的发展，作出过卓越的贡献，特别是他的两本专著——《概率论及其应用》(共两卷)，曾经影响了包括中国在内的世界各国几代概率论及其相关领域的学生和研究者．即使用今天的标准来衡量，该书仍是一本经典佳作．

该书涉及面极广，不仅论述了概率论的诸多课题，也包括了概率论在物理、化学、生物、遗传、博弈、经济等多方面的应用．

该书写作风格明快，深入浅出，引人入胜，作者旁征博引，面对复杂主题显得游刃有余，充分展示了过人的才智．

译本尽量忠于原著，但翻译毕竟是再创造，中文和英文毕竟是两种语言，断无数学中那种一一对应．如译文有违原作，或有不当之处，敬请指教．

译本体例，一如通例，不再赘述．

胡迪鹤

2005年10月

第二版中译本译者序

著者原意想写两卷书，著者序言里还谈到第二卷所包含的内容. 本卷只限于讨论“离散空间”.

在概率论的文献中，就内容精练而论，本书有它独特的地位. 在离散空间的框架下，著者用可能是完全现代化的、严格而又直观的理论进行叙述，而所用的工具并没有超出初等数学的范围. 书中配置了一系列重要的、具体的问题，使读者能逐步地掌握概率论的基础，作者还详细地研究了取整数值的随机变量的母函数的理论和应用（参阅第 11 章)，为一般的随机变量的特征函数理论作了良好的开端. 第 15 章到第 17 章里，专门研究了关于有限及可数情况的马尔可夫链的性质，对要继续进一步研究一般随机过程理论的读者，将会有很大帮助.

除了这些研究以外，本书的优点还在于汇集了大量的特殊问题，并且对许多例题作了完全而又具体的计算. 在研究问题时，著者先用特殊的方法推出“直接”的解答，然后逐步进行在概率意义下的分析化处理. 这也是本书可贵的地方之一. 值得一提的是，为了正确而又明显地反映概率规律的现实性，著者精心地挑选了某些例题，引进了有关统计资料与概率理论相符合的问题.

本书写得比较生动，且有研究价值. 但在重要的实际应用方面却讨论得不多，这一点不能不令人感到遗憾.

以下我们对译本作几点说明：首先，译本对原书的序言、绪论以及某些个别的问题和附注作了一些删改.

原书的参考文献都用脚注，为了改善版面，有文献附注的地方都加上方括号“[ ]”，所注文献放在本书最后部分.

人名的翻译，都按音译惯例. 书末附有人名对照表，以资查阅.

这卷书按内容分上下册出版，上册包含较初等的内容，下册包含一些专题的研究.

全书初稿承许宝騄先生病中代为校阅，译者谨致最诚挚的谢意.

译者谨识

1960 年于北京大学

第一版序

作者原来的本意是要写一本关于概率论的分析方法的书，把概率论作为纯数学的论题. 这样的写法更容易保持一致性，从美学角度看也更令人满意，更能引起搞纯粹数学的人的共鸣. 然而，由美国海军研究室提供支持的在康奈尔大学的概率论研究工作，使作者决定采取一种更具雄心的方法，试图满足多种层次的需求.

本书的目的是把概率论作为一个完整的数学主题来严格地处理，避免用非数学的概念. 同时，本书也企图描写经验背景和加强对各种实际应用的认识. 为了后一目的，我们在书的正文之中插进许多特殊问题、数值估计和大量的例子. 这些题材在排版方面都有清楚的标记，处理时多用形象的语言，少用形式的推导. 本书汇集了一些特殊的专题，这是为了显示一般方法的效力，而且使本书对各个领域的专家们更有用处. 为了阅读方便，除正文之外所穿插的章节都用星号“*”标出. 对于阅读其他章节，并不需要预先了解标有星号章节的内容.

本书注重方法上的统一，并在这一方面作了认真的努力. 概率论专家会在书中发现，许多原有的证明被简化了，出现了一些新的结果. 特别是，为了本书的目的，书中发展了再现事件的理论. 这个理论导出了一个对马尔可夫链的新的处理方法，即使对于有限情况的马尔可夫链都有简化的效果.

本书除了大量例子外，还附带着大约 340 个习题，基本都给出了完整的解答. 有些是简单的练习题，但是大多数都可以作为正文的说明和补充材料. 例题和习题的目的之一，是为了提高读者的直观能力，和提出及解决概率问题的技巧. 在前面所讨论的几个例题表明：一个显然很难的问题，一旦有了自然的提法，并且在合适的地方来讨论，就变得十分容易了.

在概率论的教学上有一种倾向：把概率问题尽快地转化为纯粹的分析问题，而忘却概率论本身的特殊性质. 这种处理方法通常一开始引进随机变量的概念时不下严格定义. 本书走向另一个极端，始终抓紧样本空间的概念. 没有样本空间的概念，随机变量就只能是一种生硬的造作.

为了使真实的背景不为可测性问题和其他纯粹分析的困难所掩饰，本卷书中只限于对离散样本空间进行讨论. 这是一个很大的限制，但是会受到非数学背景的读者的欢迎. 采用这个办法，我们能够收进一些特殊的、在一般文献中不易找到的专题. 同时，这个办法能够让我们既能从初等的方法入手，又能对于像随机徘徊和马尔可夫链那样高等的专题做出相当详尽的处理. 至于随机变量和分布的一般理论、极限定理、扩散理论等，准备放在下一卷里去讨论.

没有海军研究室的支持，本书无法写成. 这种支持带来的结果之一，是我与杜

布（J. L. Doob）先生的频繁联络．他给我的批评与鼓励是无价的．我深深地谢谢他．其次我要感谢瑞奥丹（John Riordan）先生的帮助，他先后看了我两次修改稿．我妻子看了我的手稿和校样，无数次改正其中的错误，提出改进意见．

作者感谢钟开莱、冬斯克（M. Donsker）和戈德堡（S. Goldberg），他们审阅了手稿，纠正了不少错误，戈德堡还为大部分习题准备了解答．最后，感谢霍伦巴克（Kathryn Hollenbach）小姐的耐心与专业的打字帮助，谢谢伊利亚什（E. Elyash）、霍夫曼（W. Hoffman）、金尼（J. R. Kinney）等人帮助校对．

威廉·费勒

1950 年 1 月于康奈尔大学

第三版序

25 年前，当我开始构思此书时，苏联以外的数学家只有少数人承认概率论是数学的一个正统的分支. 其应用范围有限，而且个别问题的处理往往是难以置信地复杂. 在这种情况下，本书不可能为现成的读者或满足当时的现实需求而写. 当时只希望能引起人们对概率论的一点点关注；将各个部分联系起来；发展统一的方法及指出其潜在的应用. 后来由于人们对概率论兴趣的增长，该书出乎意料地拥有了许多非数学专业的读者. 在当时本书的观点显得较新，有关内容其他书不多，它被广泛采用就可以理解了. 然而时至今日，本书大部分内容都可在各种面向特别应用的专著中找到，而其受欢迎程度并未衰减. 为此，在新版中，本书的特色仍保持不变. 希望该书能继续为各种需求服务. 特别希望它仍拥有一批仅仅为了欣赏和受启发而阅读的读者.

这些年来，我从与本书读者的联系中获益匪浅，这使本书许多方面得到了改进，许多章节改写得更易于学习. 该书的可读性也得到了改善，因为换了种更漂亮的字体，也更是因为麦克杜格尔（H. McDougal）夫人的出色编辑工作. 作为一个专业编辑，她对读者的需求相当敏感.

改变最大的是第 3 章. 这一章在第二版中才加入，事实上它是由一种意料之外的发现所促成的，那就是其迷人的材料可以用初等方法来处理. 但是这类处理仍然依赖组合分析技巧，这种技巧目前已经可以用更简单更自然的概率推导来替代. 本质上看，这新的一章，名副其实是全新的.

所有增加的内容中，最显著的是增加了一些新小节，讨论分支过程、马尔可夫链和棣莫弗-拉普拉斯（De Moivre-Laplace）定理. 第 13 章进行了重新安排. 全书的例子和习题有小量变动.

我对作者索引的误导性表示遗憾，但我认为如果一个概念或例子能够追本溯源的话，我有义务把它交待清楚. 不过这样做往往指向一个偶发的评论，而很少能指明被引用的论文的本意. 此外，许多例子与习题从非数学论文中提炼而来，这些论文中的相关情况是用不同的方法处理的.（后来的新书在引用这些非数学论文时，反而说它们包含了我书中的例子. 这一方面说明概率论发展有多快，有那么多人看了我的书，同时也表明引用的作用是多有限.）由于篇幅与能力的限制，概率论从 20 世纪初萌芽阶段的研究到今天欣欣向荣的发展历史，在本书中没有充分论述和揭示.

多年来，我有幸与许多学生和年青的同事一起工作，并得到他们的帮助与启发. 我要深深感谢美国陆军研究室，它支持了我在普林斯顿大学的概率论研究工作. 古德曼（Jay Goldman）提供了富有思想深度的教学经验小结，皮特（Loren Pitt）全力

帮助我做证明，我要在此对他们表示特别的感谢.

威廉·费勒

1967 年 7 月

修订版序

与第 1 版相比，第 3 版命运多舛，反复出现多次恼人的勘误. 现在这个修订版印次已经把所有已发现的错误改正了. 而且在改动不需要动版的地方，我们改进了有些表述，添加了习题提示. 感谢我的出版商允许进行这些要花不少钱的更动，它们应当会极大地改善可读性.

几乎所有的改动建议都是来自伊利诺依州芝加哥市共事的马卓尔（R. E. Machol）教授和克罗夫特（J. Croft）博士，以及丹麦皇家空军的库尔（Preben Kühl）上尉（现已退役）. 他们以超乎寻常的认真态度研读本书，我从他们那些令人愉快的信件中获益匪浅.

威廉·费勒

1970 年 6 月

于新泽西州普林斯顿市

关于使用此书的提示

本书中的讲解包含了许多内容，顺序并不总是由易到难的. 本书的开始也有相对技术性较强的小节，而第 15 章和第 17 章有一些简单的小节. 经验不足的读者在初读时不要试图从多个方面介入，以免只见树木不见森林. 每一章的引导性的附注和某些节标题前的星号，能帮助读者决定方向和内容取舍，没有标星号“*”的节自成体系，其中标有星号“*”的内容可以先略去不读.

概率的基本概念的引入在第 1、第 5、第 6 和第 9 章. 如果可能的话，初学者应该先尽可能专心把这些基本概念弄清. 第 2 章是为提高学生的技巧和形成概率直观概念而安排的. 这章中的某些经验是值得掌握的，但并不需要系统掌握全章内容. 在后面出现适当场合时，再回到初等直观想像更加有益. 为了初步引进连续分布的初等理论，要求有一个补充来说明. (第二卷中较初等的几章提供了合适的内容.)

若把母函数视为较一般算子的特例，第 9 章可以直接过渡到第 11 章. 第 11 章应该接着讨论第 13 章（常返事件）或第 12 章（链反应，无穷可分分布）的某些应用的后续. 学习下述方向之一可以不需要学习母函数：极限定理和起伏理论（第 8 章、第 10 章和第 3 章）、随机过程（第 17 章）、随机徘徊（第 3 章和第 14 章的主要部分）. 这些章几乎是彼此独立的. 第 15 章中的马尔可夫链在概念上依赖于常返事件，但是，如果读者能接受不证明的基本遍历定理，亦可独立学习.

第 3 章是独立的. 它的内容本身极富吸引力. 而且这一章因其新见地和新方法在概率论中有极富说明性. 其中关于扔硬币的起伏问题的结果表明：在过广的层面上相信大数定律会招致错误，它们是如此地奇怪和如此地与一般直觉不同，以致于使老练的同事都怀疑硬币实际上是按理论预测的结果来弄假的. 第 6 节中有一个模拟实验的记录. 这一章虽然仅仅处理了一类简单的扔钱币的博弈，但其结果对一般的公平博弈是有代表性的.

符号“▶”表示一个证明或一族例子的结束.

最后，希望书后丰富的索引能有助于加强本书各部分之间的联系.

目　录

第 0 章　绪论　概率论的性质

0.1　背　　景

概率论是一门数学学科，它与几何学或分析力学等学科有很相似的目标. 对每一门学科我们都必须仔细地去区分理论的三个方面：(a)形式逻辑的内容；(b)直观的背景；(c)应用. 不按这三方面之间的固有关系去考虑这三方面，就不能正确估计其全部结构的特性和优点.

1. 形式逻辑的内容

公理化的数学只论及某些无定义的事物之间的关系. 这一点可以用下国际象棋来作很好的说明. 要想描述国际象棋，除了陈述一组下棋规则外，不可能给象棋下一个“定义”. 尽管对棋子的通常的形式可以作某种程度的描写，但仅凭对棋子本身的形状的描述不一定能清楚地说明哪个棋子是王. 棋盘和棋子是有用的，但没有它们仍然可以下棋. 重要的事情在于了解棋子的走法与作用，也就是要了解一组棋规. 要问国际象棋中的一个“卒”或“王”的“定义”或“精确的本性”是什么，这是没有意义的. 与此类似，在几何学中我们也不去过问点和直线到底是什么. 点和直线是无定义的概念，而几何公理规定它们之间的一些关系，例如，两点确定一条直线等等. 这些就是规则，没人提出异议. 我们可以改变公理系统而去研究不同形式的几何，而且各种非欧几何的逻辑结构不依赖它们与现实的关系. 物理学家曾研究，在不同于牛顿的万有引力定律时物体如何运动. 即使牛顿的万有引力定律是正确的，这种研究也是有意义的.

2. 直观的背景

与国际象棋不同，几何学和力学的公理反映了客观存在着的直观背景. 事实上，几何的直观性是如此之强，以致它常常会跑在逻辑推理的前面. 逻辑、直观与实际经验三者之间的相互依赖性达到怎样的高度，这个问题我们不需要去讨论. 当然，人们的直观能力是可以锻炼和发展的. 例如，下棋时，初学者总是小心翼翼，走棋时还要想一想的下棋规则；但是有经验的棋手在一瞥之间就能掌握复杂的情况，对他的直观往往不能用理由来解释. 同样，数学直观随着经验增加而增加，人们有可能对于一些概念例如 4 维空间发展一种自然感觉.

甚至人类的集体直观能力也在进步着. 牛顿的力场概念、超距作用的概念、麦

克斯韦（Maxwell）关于电磁波的概念，起初都被认为是“不能想像的”和“违反直观的”. 现代技术和媒体、通迅的普及，使得这些概念成为一些通常的语汇. 同样，现在的学生不会体会到，当概率论还在萌芽的时候，它与某些思维方式、偏见及其他困难的斗争情形. 现在，报纸报导着民意测验的样本，统计的影响已经渗透到生活的各个方面，年青的女孩们也会从统计数字中查看自己结婚的可能性. 于是对于像这样的陈述：“这个事件的机会是 5 分之 3”，人人都有了直观的感觉. 这虽然是很模糊的，但此直观感觉足够作为概率论入门的指南和背景. 随着理论的发展，以及接触到一些更为微妙的应用，这个直观能力还要得到发展.

3. 应用

应用几何学和力学的概念时，要把它们与某些物理对象等同起来，但是这个结合过程非常灵活，且变化无常，不能给出普遍的法则来. 刚体这个概念是基本但有用的概念，虽然没有一个物理对象真正具备它的条件. 哪些物体能当作刚体来处理，要视所处环境和所需要的近似度来决定. 橡胶当然不是刚体，但是在讨论汽车在冰上运动的时候，许多教科书是把橡胶轮胎当作刚体来处理的. 按照理论的目的，我们不管物质的原子结构，而有时把太阳当作一个连续物质的大球来处理，有时又把它当作一个质点来处理.

在应用中，抽象的数学模型只是当作工具来使用，而对同一实际场合可以采用不同的模型来描述. *数学理论的应用方式不依赖于事先形成的意见，它是一个有目的的技术，依赖于经验，而且随着经验改变.* 这些技术的哲学分析是值得研究的，但它不属于数学、物理学或统计学范围以内. 因此，必须把关于概率基础的哲学从数学和统计学中分离出去，犹如关于直观空间概念的讨论，现在已经从几何学中分离出去一样.

0.2　方法和步骤

概率论的历史（一般数学史亦然）呈现出理论和应用的相互促进的现象：理论的进展开辟了应用的新领域，反过来每一个新的应用又产生出新的理论问题和有成果的研究. 目前概率论已应用到很多不同的领域，而我们所要求的是一个普遍性理论所具有的那种灵活性，以便对广泛的种种需求提供恰当的工具. 因此我们必须反对下述企图（与趋向）：把其理论、术语及其思想库建立得过分接近于某一特殊兴趣范围. 我们所要做的绝非如此，而是按照在几何学和力学中已经证明为十分成功的方式来发展出一种数学理论.

我们先从扔硬币和掷骰子等最简单的实验出发，在这些场合，所有的陈述都有着明显的直观意义. 我们把这个直观性翻译成一个抽象的模型，然后把这模型加以推广，使它能够适用于更复杂的场合. 书中的实例是用来阐明几种模型的经验背景和启发读

者的直观能力的，但理论本身还是数学性质的．我们不拟力求解释概率的“真正意义”，正如近代物理学家不致力于阐明质量和能的“实在意义”．几何学家不致力于解释点的性质那样．我们将要做的，就是证明一些定理，并指出这些定理怎样应用．

最初，概率论的目的是描述有关机会游戏的经验这一狭窄的领域，这时，主要目标只是要把某些概率计算出来．在开始的几章里，我们也计算一些典型的概率，但是要记住数值的概率不是理论的主要对象．其目的在于发现一般的规律并构造出满意的理论模型．

概率对我们所起的作用正如质量在力学中所起的作用．在力学上，即使不知道个别行星的质量，不去思考实际上测量这些质量的方法，也照样可以讨论行星体系的运动．甚至虚构的行星体系也可以作为一个有益的、有启发的研究对象．类似地，一些实际的且有用的概率模型涉及一些不能观察到的世事．例如几十亿元已用于投资自动电话交换．这些都是因为从简单的概率论模型来考虑时，对其中各种可能的系统都需作比较．理论上的最优系统被建立起来了，而其余的系统也就不存在了．在保险业中，概率论用来计算毁灭概率，就是用这理论来避免某些不期望发生的情形．因此，它应用到一些实际上观察不到的情形．即使连一个数值都不能得到时，概率论仍然是有效的和有用的．

0.3 “统计”概率

近代概率的数学理论的成就是有代价的，那就是把理论局限在“机会”的某一个特殊方面．概率的直观概念联系到归纳推理，以及像下面的一些判断：“保尔大概是一个幸运的人”，“这本书大概是一部失败之作”，“费马（Fermat）的猜测大概是不正确的”．这类判断是哲学家和逻辑学家感兴趣的，也是数学理论[1]研究的对象．然而必须这样了解，我们所关心的不是归纳推理的形态，而是一种可以叫作是物理概率或者统计概率的事物．粗略地来解释一下这句话的意思，可以这样说：我们所说的概率不是关于这些判断，而是关于一个理想实验的可能结果．在我们谈到概率之前，大家必须先承认一个特殊理想实验的想像模型，譬如说扔硬币，甚至抽样观察月球上的袋鼠观察扩散物中一个质点，记录打来电话的次数．一开始就需承认什么是这个理想实验所有的可能结果（即“样本空间”）以及它们的概率．这种构想可以在力学里找到类似情况：在力学里引进了包含着 2 个、3 个或 17 个质点的臆想模型，其中质点并没有任何特性．同样，如果我们来分析扔硬币的实验，我们理论的对象只是像“正面，正面，反面，正面，……”这些记号的序列，而不关心实际实验的偶然情况．在这个体系里，像什么“明天太阳将升起的概率是多少”是不在考察之列的．假使我们要讨论这个概率，我们势必先来确定一个实验的（理想）模型，而这个实验不免要说成“从无穷多个存在中随机地选取一个……”．构造这样一个模型其实也不需要多大的想像力，但是这样做是无聊而且毫无意义的．

天文学家谈论测量太阳中心的温度和到天狼星上的旅行．这些似乎是不能办到的，但是作这种思考并不是没有意义的．同理，我们也不去关心理想的实验能否实现．我们将要从事于分析抽象的模型．在我们的思想深处，保持着概率的一个直观解释，这种解释在某些应用中获得实施的意义．我们想像把实验重复做很多次．概率为0.6的事件终究可以期望在100次里出现60次．这句话是有意地含糊其辞的，但是，对于较为初等的应用来说，它提供了一个足够形象的直观背景．随着理论更精深地发展，实用意义和直观图像就变得更具体了．

0.4 摘　要

我们将要考虑一些理论模型．在这些模型中，概率像力学中的质量一样，是作为一些自由参数而出现的．可以用各种各样不同的方法来应用它们，应用的技巧和直观能力随着理论的发展而发展．

这是其他数学学科中所采用的富有成效的标准手法．没有其他的手法可以满足正在发展着的概率论及其应用的各个分支的各种各样的需要．

令我们惋惜的是，直观的概率不能充分满足科学的需要，但是它的存在确是一个历史事实．在第1.6节例（b）中，我们将要讨论多个质点在多个盒里随机分布的问题．适当的或者“自然”的概率分布对每个人来说似乎是完全清楚的，并且可以被物理学家毫不犹豫地接受．然而，事情是这样，物理质点的概念在人们意识中是没有经过训练的，而“自然”（或玻耳兹曼（Boltzmann））分布有时必须代以爱因斯坦-波司（Einstein-Bose）分布，有时又必须代以费米-狄拉克（Fermi-Dirac）分布．直观论证不能说明为什么光子不同于质子，为什么它们不遵从一个“预先给定”的规律．如果现在能找到一种论证，那也只能说明直观概念和理论一起发展罢了．无论如何，即使对应用来说，自由和灵活都是重要的，而且把理论局限在一个固定的范畴里是不利的．

有人叫嚷现代概率论是如此抽象和如此普遍化，以至难于应用．这类似于实用的人们当初曾经反对麦克斯韦场论的挑战口吻．这个论点可以被下列事实所驳倒：抽象的随机过程理论提供了一些新的未曾想像过的应用，现代的起伏理论所提供的新的知识又一次地与直观想法相违背，并且使人们去修正对实际的态度．然而，这种辩论是没有什么用处的，在昨天还认为是不合实际的东西今天就是实际的东西了，而明天将要成为理论的又被今天的实用的人们认为是毫无价值的游戏．

0.5 历史小记

对概率的统计或经验观点主要是由冯·米泽斯（R. von Mises）和费希尔（R. A. Fisher）发展的．样本空间[2]的概念是由冯·米泽斯引进的．这个概念使得有可能把概