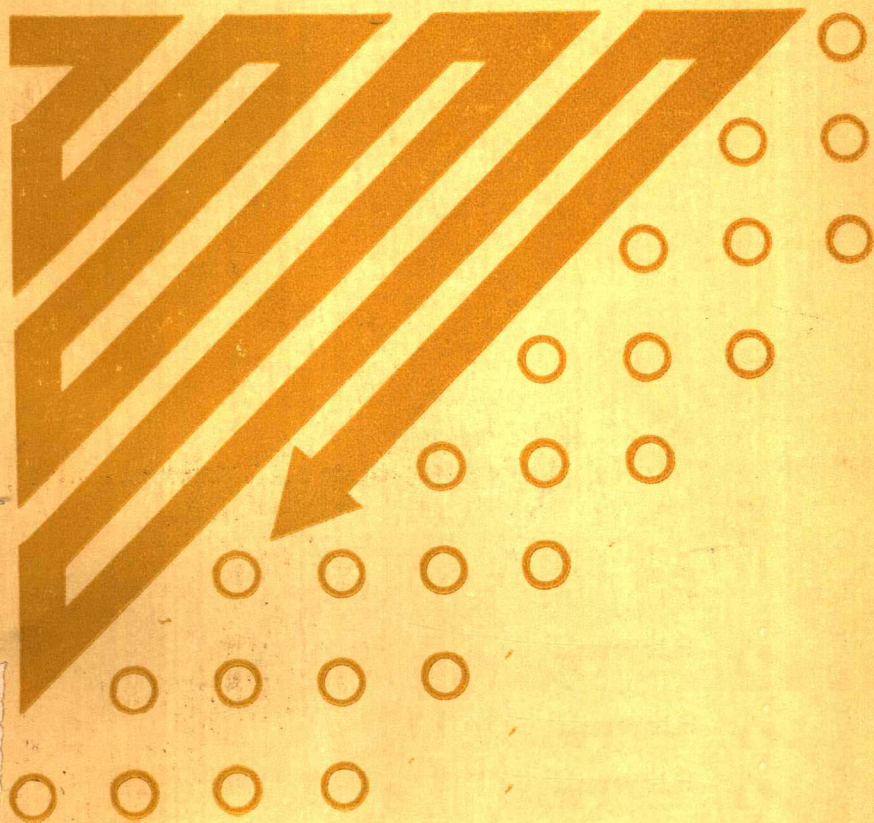


周民强 编

实变函数



621
75

北京大学出版社

实变函数

周民强 编

北京大学出版社

内 容 提 要

本书以 \mathbb{R}^n 及其上的实值函数为对象, 介绍 Lebesgue 测度与积分理论。全书共分六章: 集与点集是预备知识; 第二章至第五章的内容是测度、可测函数、积分、微分与不定积分; 第六章讲函数空间 L^p ($1 \leq p \leq \infty$)。每一章的末尾还配有相当数量的习题。本书可作为综合性大学数学系的教学参考书或教材。

实 变 函 数

周 民 强 编

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

中国科学技术情报研究所印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 9.25印张 250千字

1985年10月第一版 1985年10月第一次印刷

印数: 00001—21,000册

统一书号: 13209·114 定价: 2.20元

序

由于教学工作的需要，作者编写了《实变函数》课程的讲义。几年来在使用中作过不少更改。鉴于目前国内同类书籍为数不多，这次修订出版，可考虑作为教学参考书或试用教材。

《实变函数》是数学系三年级学生的必修课，是近代分析数学的基础，其内容似应以实分析的基本知识为主，同时注意与后继课程适当配合。因此本书试以 n 维欧氏空间及其上的实值函数为对象，介绍 Lebesgue 测度与积分理论。教学实践说明这样做是可行的。书中标有(*)的部分，在使用中可根据教学的具体情况适当取舍。

实变函数的内容虽是微积分的继续深化，但在思想方法上却有着较大的飞跃。为使学生能较好的适应这一过渡，适当加强训练是一个重要环节。因此，本书配备了相当数量的习题，并力求使这些习题与课程的基本内容有较为密切的配合。正文中列入的某些例题，也可帮助学生提高自学和解题能力，并开阔思路。

在编写本书的过程中，学习了兄弟院校的教材，也参阅了国外同类的书籍。邓东皋同志审阅了原稿，提出了许多宝贵意见。程民德先生、冷生明先生也对本书的编写给与不少帮助，在此一并表示谢意。由于编者水平有限，经验不足，书中定有错误和不妥之处，望批评指正。

周民强

1984.7

引 言

(谈谈 Riemann 积分)

实变函数的中心内容是 Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论,它是 Riemann(1826—1866)积分的推广与发展,创立于二十世纪初期,为近代分析奠定了基础.因而,在这里对 Riemann 积分理论作一简单回顾,将会有助于我们今后的学习.

在数学史上,第一个提出用分割区间、作和式的极限来严格地定义积分的要推 Cauchy(1789—1857).他考察的积分对象是在 $[a, b]$ 上的连续函数,并用连续函数的中值性质来推导积分的存在性(他还提出用极限来定义函数在无界区域上的积分以及函数具有瑕点的积分).

然而 Cauchy 关于积分存在性的证明只适用于函数至多有有限个不连续点的情形.于是,对于具有无穷多个不连续点的函数的积分存在性问题引起了许多学者的兴趣.

在对积分学发展起过推动作用的早期的工作中,应该提到 Fourier(1768—1830)关于三角级数的工作.在1807年他指出,任一定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 可表示为三角级数:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx + \dots \\ + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + b_n \cos nx + \dots,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \\ n = 0, 1, \dots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

不过,这一陈述缺乏严格的论证.1837年 Dirichlet(1805—1859)对此提出了一些条件,其中特别提到了函数的可积性.

Riemann 在研究三角级数时，注意到上述工作，并特别讨论了函数的可积性问题，他不先假定函数是连续的，而去探求一个函数可积与否是什么性态？从这样一个角度出发，他在1854年的论文“关于一个函数展开成三角级数的可能性”中，给出了积分的定义以及函数可积的充要条件，这一条件，后来由 Darboux (1842—1917) 以更加明确的形式给出。

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的有界函数。作分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

并令 $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分：

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\Delta} S_\Delta, \quad \int_a^b f(x) dx = \sup_{\Delta} s_\Delta.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的，记其公共值为

$$\int_a^b f(x) dx.$$

称它为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分。

若令 $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$ ，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的充分且必要条件是：

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 0. \quad (1)$$

Riemann 积分的重要性是不言而喻的，它对于处理诸如逐段连续的函数以及一致收敛的级数来说是足够的，并至今仍然是微积分教程的主要内容之一。然而随着 Cantor(1845—1918) 关于集合论的一系列工作的创始，出现了具有各种“奇特”性质的函

数, 对此不仅在研究函数的可积性, 而且在积分理论的处理上还发生了许多困难。下面就 Riemann 积分理论中的几个主要方面来作一些简要分析。

(一) 可积函数的连续性

上面提到, 函数的可积性是与(1)等价的, 由于(1)式涉及两个因素: 分割小区间长度 $(x_i - x_{i-1})$ 以及函数在其上的振幅 $(M_i - m_i)$ 。因此, 为使(1)成立, 粗略说来, 就是在 $|\Delta| \rightarrow 0$ 的过程中, 其振幅 $(M_i - m_i)$ 不能缩小的那些相应项的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到, 定义在 $[a, b]$ 上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值, 从而是可积的)。我们知道, 函数振幅的大小与该函数的连续性有关, 于是, 条件(1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围。这就是说, 可积函数必须是差不多连续的。Riemann 积分的理论是以“基本上”连续的函数为研究对象的。

(二) 极限与积分次序交换问题

在数学分析中, 我们经常遇到的一个重要问题是两种极限过程的交换问题, 尤其是积分与函数列的极限的交换问题。

我们知道, 在一般微积分教科书中, 都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换, 不过, 这一要求是过份强了。

例 $f_n(x) = x^n$ ($0 \leq x \leq 1$)。它是点收敛而不是一致收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

的, 但仍有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

在 Riemann 积分意义下, 存在下述有界收敛定理(见 Amer. Math. Monthly, 78, 1980)。

定理(有界收敛定理) 设

(i) $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数;

(ii) $|f_n(x)| \leq M$ ($n=1, 2, \dots, x \in [a, b]$);

(iii) $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的可积函数, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

这里, 不仅受到条件(ii)的限制, 而且还必须假定极限函数 $f(x)$ 的可积性。下例表明, 即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性。

例 设 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中全体有理数列, 作函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \dots, r_n, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots.$$

显然有 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots \leq 1$, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

这里, 每个 $f_n(x)$ 皆是 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数且积分值为零, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

但极限函数 $f(x)$ 不是 Riemann 可积的, 这是因为

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_{-0}^1 f(x) dx = 0.$$

从而也就谈不上积分号下取极限的问题。

有界收敛定理看起来也有点使人惊异, 因为我们不难证明, 若有定义在 $[a, b]$ 上的可积函数列 $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ 满足 $|f_n(x)| \leq M, |g_n(x)| \leq M$ ($n=1, 2, \dots$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x),$$

则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx.$$

但 $f(x)$ 之积分仍然可以不存在。然而，上述积分之极限值并不依赖于 $\{f_n(x)\}$ 本身，而依赖于 $f(x)$ 。既然如此，不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了。

(三) 关于微积分基本定理

我们知道，积分和微分之间的联系乃是微积分学的中樞：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可微函数且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a), \quad x \in [a, b].$$

这就是说，从 $f'(x)$ 通过积分又获得了 $f(x)$ 。显然，为使这一微积分基本定理成立， $f'(x)$ 必须是可积的。早在 1881 年，Volterra (1860—1940) 就作出了一个可微函数，其导函数是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的。这就大大限制了微积分基本定理的应用范围。

(四) 可积函数空间的完备性

Riemann 积分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性上。我们知道，在积分理论中，函数类用距离

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

(或

$$d(f, g) = \left\{ \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

等) 作成距离空间是完备的这一事实具有重要意义。近代泛函分

析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性。

例如，记 $R([0, 1])$ 为 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积函数的全体。引进距离

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad f, g \in R([0, 1])$$

(其中认定当 $d(f, g) = 0$ 时， f 与 g 是同一元)。我们说 $R([0, 1])$ 不是完备的意思，是指当 $f_n \in R([0, 1])$ ($n = 1, 2, \dots$) 且满足

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(f_n, f_m) = 0$$

时，并不一定存在 $f \in R([0, 1])$ ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0.$$

例如，令 $\{r_n\}$ 是 $(0, 1)$ 中有理数的全体，设 I_n 是 $[0, 1]$ 中的开区间， $r_n \in I_n$ ， $|I_n| < 1/2^n$ ($n = 1, 2, \dots$)，并作函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \\ 0, & [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 在 $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 上是不连续的，它不是 Riemann 可积的，且不存在 Riemann 可积函数 $g(x)$ ，使得 $d(f, g) = 0$ 。但若作函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \bigcup_{k=1}^n I_k, \\ 0, & [0, 1] - \bigcup_{k=1}^n I_k, \end{cases}$$

则 $f_n(x) \in R([0, 1])$ ，且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n - f_m) = 0,$$

以及 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$)，故 $R([a, b])$ 按上述距离 d 是不完备的。

随着人们对数学分析各种课题的深入探讨，积分理论的研究工作也进一步展开。特别是通过 Jordan(1838—1922), Borel(1871—1956) 等人关于点集测度理论的成果，揭示出测度与积分的联系。现代应用最广泛的测度与积分系统是 Lebesgue(1875—1941)完成的。1902年他在《积分、长度与面积》的论文中所阐明的思想成为古典分析过渡到近代分析的转折点。Lebesgue积分理论不仅蕴涵了 Riemann 积分所达到的成果，而且还在较大程度上克服了后者的局限性。在 Lebesgue 以后，还有许多数学家如 Riesz(1880—1956), Denjoy(1884—不详), Radon(1887—1956)都对积分理论的进一步发展作出了重要贡献。当然，今天我们来介绍 Lebesgue 测度与积分时，不一定拘泥于原有的体系。

目 录

序	(1)
引言(谈谈 Riemann 积分)	(2)
第一章 集合, 点集	(1)
§ 1.1 集合与子集合	(1)
§ 1.2 集合的运算	(3)
§ 1.3 映射, 基数	(11)
§ 1.4 n 维欧氏空间 R^n	(25)
§ 1.5 闭集, 开集, Borel 集	(30)
§ 1.6 点集间的距离	(48)
习题	(52)
第二章 Lebesgue 测度	(60)
§ 2.1 点集的 Lebesgue 外测度	(61)
§ 2.2 可测集, 测度	(67)
§ 2.3 可测集与 Borel 集	(74)
§ 2.4 不可测集	(79)
§ 2.5* 连续变换与可测集	(81)
习题	(88)
第三章 可测函数	(94)
§ 3.1 可测函数的定义及其性质	(94)
§ 3.2 可测函数列的收敛	(103)
§ 3.3 可测函数与连续函数	(110)
习题	(117)
第四章 Lebesgue 积分	(121)
§ 4.1 非负可测函数的积分	(121)
§ 4.2 一般可测函数的积分	(130)
§ 4.3 可积函数与连续函数	(139)

§ 4.4	Lebesgue 积分与 Riemann 积分	(143)
§ 4.5	重积分与累次积分	(148)
	习题	(161)
第五章	微分与不定积分	(170)
§ 5.1	单调函数的可微性	(171)
§ 5.2	有界变差函数	(178)
§ 5.3	不定积分的微分	(183)
§ 5.4	绝对连续函数与微积分基本定理	(186)
§ 5.5*	积分换元公式	(195)
§ 5.6*	\mathbb{R}^n 上积分的微分定理与积分换元公式	(202)
	习题	(218)
第六章	L^p ($p \geq 1$) 空间	(224)
§ 6.1	L^p 空间的定义与不等式	(224)
§ 6.2	L^p 空间的性质 (I)	(230)
§ 6.3	L^2 空间	(236)
§ 6.4*	L^p 空间的性质 (II)	(245)
	习题	(254)
附录 (I)	Stieltjes 积分简介	(261)
附录 (II)	参考练习	(278)
	参考书目	(282)

第一章 集合·点集

集合论自十九世纪八十年代由德国数学家Cantor创立以来，已发展成为一个独立的数学分支，其基本概念与方法已渗入到二十世纪的各个数学领域。集合论是研究集合的各种性质的，它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关，现在它是实变函数理论的预备知识。本章仅对一般集合与 R^n 中的点集知识作一必要的介绍。

§ 1.1 集合与子集合

集合是一个不给定义的概念。就我们的实际应用范围来说，通过朴素的描述方法来进入这一领域已是足够的了。例如：自然数全体构成一个集合，记为 N ；有理数全体构成一个集合，记为 Q ；实数全体构成一个集合，记为 R^1 。总之，我们所指的集合是按照某种规定而能够识别的一些具体对象或事物的总体。构成集合的这些对象或事物称为集合的元素。

一般地说，集合的符号用大写字母 A, B, C, \dots, X, Y, Z 等来表示，集合的元素用小写字母 a, b, \dots, x, y, z 等来表示。设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$ （叫做 a 属于 A ）； $a \notin A$ （叫做 a 不属于 A ）表示 a 不是 A 的元素。例如 $2/3 \in Q, \sqrt{2} \notin Q$ 等等。

通常采用的集合表示法有两种：其一是列举，例如由数 $1, 2, 3, 4, 5$ 构成的集合记为 A 时，就用符号

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

来表示。也就是说，在花括号 $\{ \}$ 内将其元素一一列举出来；其二是用元素所满足的一定条件来描述它，如上述之 A 也可写成

$$A = \{x: x < 6, x \in N\}.$$

在这里, $\{ \}$ 号内分为两部分来写, 且用符号“:”隔开, 前一部分是集合中元素的代表符号, 后一部分表示元素所满足的条件或属于本集合的元素所特有的规定性质. 有时也把 A 写成 $\{x \in N: x < 6\}$.

例 集合 $\{x \in R^1: 0 < \sin x \leq 1/2\}$ 表示由满足

$$0 < \sin x \leq \frac{1}{2}$$

的实数 x 所构成. 有时也简写成 $\{x: 0 < \sin x \leq 1/2\}$.

例 集合 $\{x \in R^1: |x - x_0| < \delta, x_0 \in R^1\}$ 就是开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

定义1.1 对于两个集合 A 与 B , 若 $x \in A$ 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 简称 A 是 B 的子集, 记为

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

$A \subset B$ 也称为 A 含于 B 或 B 包含 A . 若 $A \subset B$ 且存在 B 中元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集.

例 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则集合 $\{1\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$ 均是 A 的子集.

注意, 上例中 $\{1\}$ 表示由单个元素“1”所构成的集合, 它是 A 的子集而不是 A 的元素. 从而可知 $\{1, \{2, 3\}\}$ 不是 A 的子集.

为了论述与运算的方便, 我们还指定一种所谓空集, 它是不包含任何元素的集合, 记为 \emptyset . 空集 \emptyset 是任一集合的子集.

定义1.2 设 A, B 是两个集合. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. A 与 B 相等就是 A 与 B 的元素完全相同, 即 A 与 B 是同一个集合.

例 $\{x \in R^1: x^2 > 1\} = \{x \in R^1: |x| > 1\}$.

集合 $\{x: p(x)\}$ 与集合 $\{x: q(x)\}$ 是否相等, 就是看条件 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是否等价.

定义1.3 设 I 是任意给定的一个集合, 对于每一个 $a \in I$,

我们指定一个集合 A_0 。这样我们就得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_a : a \in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 。这里的 I 常称为指标集。当 $I = N$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 或 $\{A_k\}$ 等等。

例 设 r, s, t 是三个互不相同的数，且 $A = \{r, s, t\}$, $B = \{r^2, s^2, t^2\}$, $C = \{rs, st, rt\}$ 。若 $A = B = C$ ，则 $\{r, s, t\} = \{1, w, w^2\}$ ，其中

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad i \text{ 是虚数单位。}$$

证明 因为集合相等就是其元素相同，所以将每个集合中的全部元素作数值和，所得到的三个数应该相等，若令其和为 K ，则有

$$r + s + t = r^2 + s^2 + t^2 = rs + st + rt = K.$$

从而得到

$$K^2 = (r + s + t)^2 = (r^2 + s^2 + t^2) + 2(rs + st + rt) = 3K,$$

即 $K = 3$ 或 0 。又从数值的乘积看，同理有

$$rst = r^2s^2t^2,$$

故知 $rst = 1$ 。于是在 $K = 3$ 时，可知 r, s, t 为方程

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

的根，亦即 $(x - 1)^3 = 0$ 之根。但此时有 $r = s = t = 1$ ，不合题意。

这说明 $K = 0$ ，此时 r, s, t 为方程

$$x^3 - 1 = 0$$

的根，即 $x = 1$ 以及 $x = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ 。

§ 1.2 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段，从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用。这种分解与合成可以通过各种集合间的运算来表达，现

将其概念与主要性质作一简单介绍。

(一) 并与交

定义1.4 设 A, B 是两个集合,称集合 $\{x:x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集,记为 $A \cup B$ 。即由 A 与 B 的全部元素构成的集合。

为直观起见,现用图形来示意集合运算构成的新集合,称为Venn图。 $A \cup B$ 见图1.1。

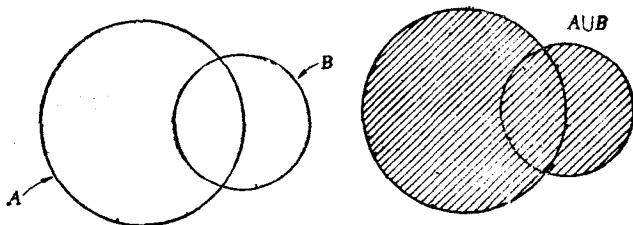


图 1.1

定义1.5 设 A, B 是两个集合,称集合 $\{x:x \in A, x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集,记为 $A \cap B$ 。即由 A 与 B 的公共元素构成的集合(见图1.2)。若 $A \cap B = \emptyset$,则称 A 与 B 互不相交。

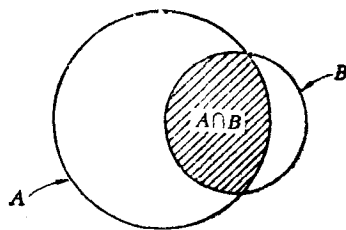


图 1.2

例 若 $f(x)$ 是 R^1 上的实值函数,则

$$\{x:l \leq f(x) \leq k\} = \{x:f(x) \geq l\} \cap \{x:f(x) \leq k\}.$$

关于作交与并及其联合运算,有下述重要规律。

定理1.1 设有集合 A, B 与 C ,我们有

(i) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A,$ (1.1)

(ii) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$ (1.2)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$$