职工业余文化学习辅导用书

高中数学

GAOZHONG SHUXUE

（函数与三角函数）

周霖源　胡德潜

上海科学技术出版社

职工业余文化学习辅导用书

高中数学

（函数与三角函数）

周霖源　胡德潜

上海科学技术出版社

高 中 数 学

（函数与三角函数）

周霖源　胡德潜　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江苏泗阳印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 9.25　字数 204,000

1986年4月第1版　1986年4月第1次印刷

印数：1—8,500

统一书号：13119.1290　定价：1.25元

编者的话

本书根据1983年教育部颁发的职工业余中等学校高中数学教学大纲(草案)的要求编写，内容紧扣现行职工业余中等学校高中数学课本，既可以作为广大职工学习文化时的辅导材料，亦可供职工业余高中数学教师教学时参考。

本书对课本中的重点、难点作了较多的说明，对容易混淆的概念给以辨析，对某些有代表性的例题阐述了解题的思路，或加以分析说明，以使读者能掌握一定的解题技巧和方法。至于课本中定理的证明和公式的推导这里不再重复。为了便于读者学习，本书每章都列出“内容提要”，若把各章“提要”串联起来，就可以作为复习资料用。为了提高读者的解题能力，达到文化考核和进入高等学校学习的要求，本书还配备了一定数量的与课本不重复的例题、习题、复习题和自我检查题，并附有答案和提示。

本书第一章由周霖源、胡德潜编写，第二章由周霖源编写。

由于我们的水平有限，编写又比较仓促，书中不当之处恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章 函　　数

一　集　　合

集合是数学中的基本概念之一，它的思想已渗透到近代数学的各个分支．例如，中学数学所研究的数和图形，就分别是数和点的集合．用了集合的概念、术语和记号，可以把有些知识叙述得更准确、简明，使之清楚易懂．在阅读科技读物时，常会碰到有关集合的术语，因此在中学阶段学一点简单的集合知识是十分必要的．

1.1　集合

1．什么叫集合

所谓**集合**是指“具有某种共同特性的事物（对象）的全体”．例如，“某学校的全体学员”、“某商店里所有的商品”、“数轴上所有的点”、“所有大于零且小于2的实数”等，它们都构成各自的一个集合．

构成集合的事物(对象)，称为该集合的**元素**．通常用大写字母A、B、C、…表示集合，用小写字母a、b、c、…表示集合的元素．如果a是集合A的元素，就是a属于A，表示为$a\in A$，如果a不是集合A的元素，就是a不属于A，表示为$a\notin A$．

说明　(1) 集合是一个原始概念，我们不能再用更基本的概念来给它下定义．它和平面几何中的点、直线一样，只能对其作描述性的说明．

(2) 集合是指一些对象的全体，而不是指其中的个别对

象．比如，“高一(1)班的学员”这个集合，是指整个高一(1)班的全体学员，而不是指其中的某个学员．

(3) 集合的元素必须是确定的，也就是可以确切地判断一个对象是属于还是不属于这个集合．例如，“全体老人”和“与 3 接近的实数”就不能构成集合．因为一个 50 岁的人是否属于老人呢？2 是否属于与 3 接近的实数呢？都很难确切地加以判断．

(4) 如果集合 A 的所有元素都是数，则称 A 为数集．通常我们用 N 表示自然数集合，J 表示整数集合，Q 表示有理数集合，R 表示实数集合．

2．集合的表示方法

(1) 列举法　把集合的元素一一列举出来，写在大括号“{　}”内，这样表示集合的方法叫做**列举法**．例如，由字母 a、b、c、d 所构成的集合，可以表示为 $\{a, b, c, d\}$；由于它所列出的元素可以不分次序，所以也可以表示为 $\{a, c, b, d\}$，或 $\{a, d, b, c\}$、$\{b, a, c, d\}$、……等等．这就是集合的**无序性**．但是所列出的集合的元素既不能遗漏也不能重复，即表示集合时不能遗漏元素，也不能出现相同的元素．例如，$\{b, c, d\}$ 和 $\{a, a, b, c, d\}$ 都是错误的．这就是集合的**互异性**．

(2) 描述法　把集合中元素的共同特性描述出来，写在大括号“{　}”内，这样表示集合的方法叫做**描述法**．例如，所有大于零而小于 2 的实数，组成一个集合可表示为：$\{0<x<2\}$ 或 $\{x|0<x<2\}$．它的含意是指这个集合由满足条件 $0<x<2$ 的一切 x 所组成．我们把条件写在括号内右方，把 x 写在括号内左方，当中用一竖线把它们分开(也可以用“:”把它们分开，写为 $\{x:0<x<2\}$)．

一般说来，设集合 $A=\{x|\cdots\cdots\}$，这表示 A 是由满足条

件“…”的那些 x 所组成。我们称这种 x 是集合 A 的元素。

说明 列举法的好处是可以具体看清楚集合的元素，描述法则可刻划出集合中元素的共同特性，究竟用哪一种表示法比较好，要根据具体问题而定。有些集合两种表示法都可以，例如“小于 5 的正整数”构成的集合，可以用列举法表示，就是 $\{1、2、3、4\}$；也可以用描述法表示，就是{小于 5 的正整数}。但是有些集合的表示方法只能选用一种，例如集合 $\{-5, 0, 1, 4\}$ 就很难用描述法来表示，而集合{大于 5 的实数}就无法用列举法来表示。一般说来，列举法适用于元素的个数是有限个的集合。

例 1 在直线 $x+y=0$ 上的所有点组成的集合，可以表示为：$\{(x, y)\,|\,x+y=0\}$。

说明 它是由直线 $x+y=0$ 上的点 (x, y) 所组成的集合，通常叫做点集，这些点必须满足方程 $x+y=0$。由于这条直线上的任一点都是这个集合的元素，而点的坐标是一对有序实数，所以集合中的元素也是一对有序实数。

例 2 用另一种方法，表示下面的集合：

(1) {大于 3 小于 11 的偶数}；

(2) $\{x\,|\,x^2-5x+4=0\}$；

(3) {自然数的集合}。

解 (1) $\{4, 6, 8, 10\}$；

(2) $\{1, 4\}$；

(3) $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$。

说明 在(3)中，不能表示为 $\{3, 1, 4, 2, \cdots\}$，因为省略号所代表的那些元素的规律，是由 1，2，3，4 的排列顺序所体现。可见这种排列顺序是数列所要求的，而不是集合所要求的，所以它与集合的无序性不矛盾。

3．集合的种类

观察下面三个集合：

$A=\{0$ 与 5 之间的整数$\}=\{1, 2, 3, 4\}$；

$B=\{x|2<x<10\}$；

$C=\{s|s=3k+1, k\in J\}$。

可以看出，集合A中的元素只有4个。我们把由有限个元素组成的集合，叫做**有限集合**。例2中的(1)、(2)也都是有限集合，而集合B和集合C中的元素是无限的。我们把无限多个元素组成的集合，叫做**无限集合**。

例3 指出下面集合的元素：

(1) $A=\{x|x^3-8=0, x\in N\}$；

(2) $B=\{x|x^2-2x+1=0\}$；

(3) $C=\{x|x^2+1=0, x\in R\}$。

解 (1) 因为在自然数范围内，$x^3-8=0$ 只有一个解

$$x=2。$$

于是 $A=\{x|x^3-8=0, x\in N\}=\{2\}$。

我们看到，在这个集合A里，只含有一个元素2。我们把只含有一个元素的集合，叫做**单元素集合**。

(2) 这个方程有两个相同的实根：$x_1=x_2=1$。由于集合的元素不能重复，所以它的解集只有一个元素1。

于是 $B=\{x|x^2-2x+1=0\}=\{1\}$。

(3) 因为在实数范围内 $x^2+1=0$ 没有解，也就是说集合C不含有任何元素。我们把不含有任何元素的集合，叫做**空集**，用符号ϕ表示。

于是 $C=\{x|x^2+1=0, x\in R\}=\phi$。

说明 除空集之外的集合，统称**非空集合**。

注意 (1) ϕ与$\{0\}$是不同的，$\{0\}$是由一个元素0组成

的集合，而 ϕ 中一个元素也没有。

(2) 0 与 $\{0\}$ 也是不同的，前者不是集合，表示 0 是一个元素；后者表示以 0 为唯一元素的单元素集合。

(3) 不要把 $x\in N$，$x\in R$ 写成 $x\in\{N\}$，$x\in\{R\}$。

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集、真子集

在初中时，学习了数与数之间的不等和相等的概念。类似地，在集合中，也有包含和相等的概念。

若 $a\in A\Rightarrow a\in B$（如果 $a\in A$ 可以推得 $a\in B$），也就是说集合 A 中的每一元素都是集合 B 的元素，那么称 B 包含 A，集合 A 叫做集合 B 的一个**子集**。记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A.$$

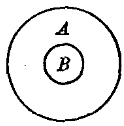


图 1.1

若 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，我们把集合 A 叫做集合 B 的**真子集**。记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

例如 $A=\{$非负整数$\}$，$B=\{$正整数$\}$。因为 A 中有一个元素 $0\notin B$，所以集合 B 是集合 A 的真子集。集合 A 和它的真子集可以用图 1.1 来表示。

再看下面两个集合：

$A=\{x\,|\,x$ 为大于 1 小于 4 的整数$\}$，

$B=\{x\,|\,x$ 为小于 5 的质数$\}$。

很明显，集合 B 中的每一元素都是集合 A 中的元素，所以 B 是 A 的子集，记作 $A\supseteq B$；反之，集合 A 中的每一元素都是集合 B 中的元素，所以 A 也是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$。

对于两个集合 A 和 B，如果 $A\supseteq B$，同时 $A\subseteq B$，也就是

说，集合 A 与集合 B 的元素完全相同，那么集合 A 和集合 B 叫做相等。记作 $A=B$。

说明 (1) 我们规定空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。

(2) 应用子集（真子集）概念可以清楚地看出一些概念之内的联系。例如 $N\subset J\subset Q\subset R$，又如{正方形}$\subset${矩形}$\subset${平行四边形}$\subset${四边形}。

注意 (1) 集合 A 是它本身的子集，即 $A\subseteq A$。

(2) 符号"$\subseteq(\subset)$"是用来表示集合与集合之间的关系，即包含（或真包含）的关系；"$\in$ 和 $\notin$"是用来表示元素与集合之间的关系。两者不能混淆。

(3) 记号"$A\subseteq B$"包括两种情况：$A=B$，$A\subset B$，两者只居其一。反之，$A=B$ 或 $A\subset B$ 皆可表示为 $A\subseteq B$。

例 1 判断下列各组中的两个集合，哪一个是另一个的子集？是真子集还是相等？分别用符号"$\subset$""$\supset$""$=$"表示之。

(1) $A=${某纺织厂所有男工人}，

$B=${某纺织厂的全体工人}；

(2) $S=${大于 1 而小于 4 的整数}，

$T=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$；

(3) $M=${某厂的全部产品}，

$N=${某厂的全部次品}。

解 (1) $A\subset B$； (2) $S=T$； (3) $M\supset N$。

例 2 填空（在横线上填上适当的符号：$\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$）

(1) ϕ__$\{a\}$， (2) a__$\{a\}$， (3) $\{a\}$__$\{a\}$，

(4) $\{a, b\}$__$\{a\}$， (5) b__$\{a\}$。

解 (1) $\subset$， (2) $\in$， (3) $=$， (4) $\supset$， (5) $\notin$。

2. 交集与并集

如果有两个集合A和B，设$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{c, d, e, f\}$。容易看出c、d是集合A和B的公共元素，它们也可以组成一个集合$\{c, d\}$。我们把这个集合，叫做集合A和B的交集。表示为$A\cap B=\{c, d\}$。

一般地把同时属于集合A和集合B的一切元素（就是A和B的所有公共元素）所组成的集合，叫做集合A和B的**交集**。表示为

$$A\cap B, \text{即}$$

$$A\cap B=\{x|x\in A, \text{并且 } x\in B\}.$$

这就是说，这个交集中的一切元素x，既属于集合A，又同时属于集合B。集合A与集合B的交集可用图1.2中的阴影部分来表示。一般分三种情况：

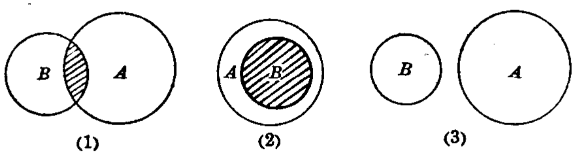


图 1.2

说明　(1) $A\cap B=B\cap A$。

(2) 表示集合与集合之间关系的图形，称为**文氏图**。文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合内的元素以区域内的点表示。

我们再来看，如果把集合$A=\{a, b, c, d\}$和集合$B=\{c, d, e, f\}$的所有元素都合并起来，也可以组成一个集合（当然相同的元素不能重复），这个集合为$\{a, b, c, d, e, f\}$。我们把这个集合叫做集合A和B的并集，表示为

$$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}.$$

一般地，把属于集合A或者属于集合B的一切元素所组成的集合，叫做集合A和B的**并集**．表示为

$$A\cup B，即$$

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A或x\in B\}.$$

这就是说，这个集合中的一切元素x，只要属于两个集合A和B中的任何一个即可．我们可用文氏图中的阴影部分来表示集合A与集合B的并集，一般分三种情况，如图1.3：

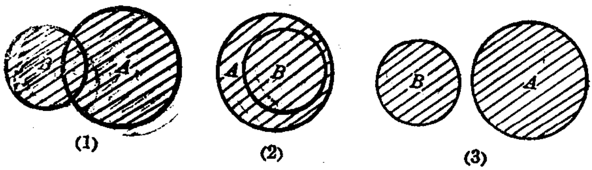
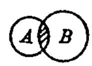


图 1.3

说明　(1) $A\cup B=B\cup A$；

(2) 并集是两个集合运算的结果，这种运算是不同于实数运算，不能把两个集合的并集完全看作两个集合的元素相加的结果．

两个集合的交集与并集对比如下：

名称	元　　素	符号	性　　质	示 意 图
交集	两集合的公共元素	$A\cap B$	$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$	
并集	两集合的所有元素	$A\cup B$	$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$	

想一想　已知两集合A和B如图1.4所示．

(1) A 与 $A\cup B$ 的关系怎样?B 与 $A\cup B$ 呢?

$(A\subseteq A\cup B,\ B\subseteq A\cup B)$

(2) A 与 $A\cap B$ 的关系怎样?B 与 $A\cap B$ 呢?

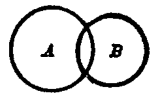


图 1.4

$(A\supseteq A\cap B,\ B\supseteq A\cap B)$

(3) $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 的关系又怎样?

$(A\cap B\subseteq A\cup B)$

例 3 如果 A 表示某单位会英语的人的集合,B 表示会日语人的集合,那么 $A\cap B$、$A\cup B$ 各表示什么样人的集合?

解 $A\cap B$ 表示既会英语又会日语人的集合;

$A\cup B$ 表示会英语或会日语人的集合.

例 4 设 $A=\{$有理数$\}$,$B=\{$无理数$\}$,$R=\{$实数$\}$.

求 $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap R$, $A\cup R$.

解 $A\cap B=\{$有理数$\}\cap\{$无理数$\}=\phi$;

$A\cup B=\{$有理数$\}\cup\{$无理数$\}=\{$实数$\}=R$;

$A\cap R=\{$有理数$\}\cap\{$实数$\}=\{$有理数$\}=A$;

$A\cup R=\{$有理数$\}\cup\{$实数$\}=\{$实数$\}=R$.

例 5 设 $A=\{$矩形$\}$,$B=\{$菱形$\}$,求 $A\cap B$.

解 A 表示所有矩形组成的集合,这个集合中的每一个图形都具有矩形的特性;B 表示所有菱形组成的集合,这个集合中的每一个图形,都具有菱形的特性,那么它们交集中的图形是同时具有矩形和菱形的特性的图形,即所有正方形所组成的集合。所以

$$A\cap B=\{\text{正方形}\}.$$

例 6 设 $A=\{(x,y)\,|\,x+2y=3\}$, $B=\{(x,y)\,|\,4x+y=5\}$,求 $A\cap B$.

解 A 表示直线 $x+2y=3$ 上的点所组成的集合,B 表示

直线 $4x+y=5$ 上的点所组成的集合，所以 $A\cap B$ 就是求两条直线交点的坐标。

$$解方程组\begin{cases}x+2y=3,\\4x+y=5;\end{cases}可得\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

$$\therefore\quad A\cap B=\{(1,1)\}.$$

注意 不要把 $\{(1,1)\}$ 写成 $\{1,1\}$，因为 $\{(1,1)\}$ 表示坐标为 $(1,1)$ 的一个点所组成的集合。

例 7 设 $A=\{正奇数\}$，$B=\{正偶数\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A\cup B=N$， $A\cap B=\phi$。

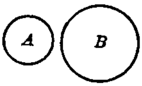


图 1.5

注意 如果 $A\cap B=\phi$，则 A 和 B 不相交，也就是这两个集合没有公共元素（如图 1.5）。

例 8 设 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$。

解 $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x\mid x>0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$，

$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x>0\}=\{x\mid x\geqslant -1\}$。

例 9 设 $A=\{锐角三角形\}$，$B=\{钝角三角形\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$。

解 $A\cap B=\{锐角三角形\}\cap\{钝角三角形\}=\phi$，

$A\cup B=\{锐角三角形\}\cup\{钝角三角形\}$

$=\{锐角三角形或钝角三角形\}$

$=\{斜三角形\}$。

3．补集

当我们研究一个问题时，总要考虑它的范围，例如解方程，就要考虑在什么范围内进行。从集合的角度来说，所研究问题的范围叫做全集。一般来说，把所有研究对象为元素的集合，叫做**全集**，用符号 I 表示。

在全集中给定一个子集 A，有时我们需要研究全集中除去子集 A 余下的一切元素所组成的集合。例如一个单位的全体职工为全集，A 表示这个单位具有大专程度的职工所组成的集合，我们有时要研究不具有大专程度的职工所组成的集合，象这样的集合叫做集合的补集。一般来说，在全集中给定一个子集 A，从全集中除去集合 A 的全部元素后，所余下的一切元素所组成的集合，叫做 A 的**补集**（或称**余集**），记作 $\overline{A}$。

根据补集的定义，任何集合 A 都有 $A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$。

例如，设参加考试的学员为全集 I，如果 A 表示及格学员的集合，则 $\overline{A}$ 表示不及格学员的集合。

如果将考分分为优秀、良好、及格和不及格四类，以 A 表示优秀或良好的学员集合，则 $\overline{A}$ 表示考分为及格或不及格的学员集合。

例 10 已知 $A=\{a, c, d\}$，设全集 $I=\{a, b, c, d, e, f\}$，

求 $\overline{A}$，$A\cap\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$。

解 $\overline{A}=\{b, e, f\}$，

$A\cap\overline{A}=\{a, c, d\}\cap\{b, e, f\}=\phi$，

$A\cup\overline{A}=\{a, c, d\}\cup\{b, e, f\}=\{a, b, c, d, e, f\}=I$。

例 11 设全集 $I=\{$实数$\}$，$A=\{$正数$\}$，$B=\{$有理数$\}$，

求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A\cap B}$。

解 $\overline{A}=\{$负数与零$\}$，$\overline{B}=\{$无理数$\}$，

$A\cap B=\{$正有理数$\}$，

$\overline{A\cap B}=\{$负有理数与无理数及零$\}$。

例 12 设全集 $I=$ 实数集 R，$A=\{x\,|\,x+1>0\}$，求 $\overline{A}$。