信息学(计算机)奥林匹克

竞赛用书

青少年程序设计的数学基础

方文祺　顾锦娴　编著

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

信息学(计算机)奥林匹克竞赛用书

青少年程序设计的数学基础

方文祺 顾锦娴 编著

北京大学出版社
北京

内容简介

信息学(计算机)奥林匹克竞赛是广大青少年所喜欢的,并且积极参与的一项竞赛。编程需要扎实的数学基础。

本书是信息(计算机)奥林匹克竞赛辅导用书之一。本书较系统地、由浅入深地向青少年朋友介绍在学习编程的过程中需要的数学知识与理论基础。全书分为十章,分别介绍了数论、方程、函数、数理逻辑、概率统计、组合数学、图论以及算法的基础知识。本书配有大量的例题和练习题,对典型题还给出了程序。在附录里还给出了练习题的参考答案。

本书内容丰富,条理清楚,不仅适合青少年中爱好计算机的同学们在学习基础知识时阅读,而且特别是适合在程序设计中遇到有关的数学问题时作为实用工具书阅读。

图书在版编目(CIP)数据

青少年程序设计的数学基础/方文祺,顾锦娴编著. —北京:北京大学出版社,1997.12
ISBN 7-301-03600-0

Ⅰ. 青… Ⅱ. ①方… ②顾… Ⅲ. 电子计算机-程序设计-应用数学-青年读物
Ⅳ. TP301.6

书　　名:**青少年程序设计的数学基础**
著作责任者:方文祺　顾锦娴
责 任 编 辑:沈承凤
标 准 书 号:ISBN 7-301-03600-0/TP・380
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 7　62752015　发行部 62559712　编辑部 62752023
排　印　者:中国科学院印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16 开本　15.25 印张　380 千字
1997 年 12 月第一版　1997 年 12 月第一次印刷
定　　价:22.00 元

数学是计算机科学与技术最重要的基础。获得国际计算机界最高奖——图灵奖的三十多位杰出专家，无一例外均有很高的数学修养，就是一个很好的证明。本书的出版将促进我国青少年在学习电脑知识，提高动手能力的同时，打好扎实的数学基础。

北京大学 王选

一九九七年六月十六日

序

计算机科学与数学的关系极大。参加信息学奥林匹克活动的孩子，必须具备良好的数学基础。数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学。大家知道计算机能够处理的信息都是经过数字化了的，处理过程中要用到各种数学工具。从求解历年信息学奥林匹克国内外试题的情况看，都是一个将具体问题抽象为数学模型的思维过程。有了数学模型才有被计算机来求解的基础。这种将具体问题抽象为数学问题的建模过程，是一种创造性的思维过程，除了可以训练想象力、判断力、洞察力和逻辑思维能力之外，对于激发创造意识与欲望，培养创造能力也是大有裨益的。从大的方面讲"一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步。"从具体学科讲信息学要用到大量的数学知识。方文祺老师写的这本书是介绍信息学奥林匹克活动中要用到的基本的数学知识。属于打基础的书。正是因为这一点，也就是显得更为重要。特别是这本书把数学公式和数学原理与具体的计算机编程联系起来讲解，这会对参加信息学奥林匹克活动的同学的思维有所启发。

清华大学计算机系教授
中国计算机学会普及委员主任
全国高校计算机基础教育研究会副理事长
国际信息学奥林匹克中国队总教练

吴文虎

1997.11.25

前　言

我国在中小学普及计算机知识已有十余年。计算机教育的根本目的在于提高青少年的素质，使他们能够适应社会的飞速发展。国外一位著名的科学家说过，计算机科学将是继自然语言、数学之后，而成为第三位的对人的一生都有大的用途的“通用智力工具”。

计算机教育既要重视知识的传授，又要重视能力素质的培养。程序设计是计算机教育的重要内容之一，因为它更能培养青少年的能力素质。程序设计就是教计算机解决一个指定的问题或一系列问题。在你把一部分知识教给别人以前，你决不可能真正地掌握它。如果你能教计算机去解决一个问题，那么说明你对这个问题和解决这个问题的办法有了深刻的理解。现代认知心理学家R·M·加涅把问题的解决放在人类学习之最。国外有人主张，在数学课中增加程序设计的内容，以培养学生的问题求解能力。可见，程序设计可以全面培养学生的思维能力和利用计算机解决问题的能力。很可能学生在学校所学的程序设计知识，在进入社会以后，没有机会应用，也可能不到几年就忘掉了。然而不管他们从事什么事业，那种铭刻头脑中的思想方法(算法)却会长期在他们的生活和工作中发挥着重要作用。

青少年信息学(计算机)奥林匹克竞赛就是程序设计竞赛，是广大青少年积极参与的一项活动。在这项活动中，不但向广大青少年普及了计算机知识，而且培养出一批又一批人才。笔者多年从事中学计算机教育和青少年信息学(计算机)奥林匹克竞赛的辅导工作，深深体会到程序设计本身需要扎实的数学基础，

中国科学院院士、北京大学王选教授几年前在《计算机世界》报上撰文谈从事计算机研究的体会，特别强调：“数学基础是至关重要的”。并且指出有三个方面的原因：第一、“抽象”是数学的本质，程序设计中经常使用抽象的手法；第二、严密的逻辑思维和推理；第三、数学基础有助于构思算法。

国外有一位数学家曾经说过：“到处都用到数学，但很可能没有哪一处能比得上它在计算机科学中用得那么广……。“

在目前的中学教育中青少年程序设计中涉及到的一些数学知识，特别是和计算机科学密切相关的离散数学(或称为有限数学)的知识，或者分散在中学的各个学习阶段，或者在课堂教学中不可能介绍。因此笔者一直想写一本适合青少年使用的、介绍在学习计算机科学中需要的数学基础知识的书。

1995年在南京举行的第十二届全国青少年信息学(计算机)奥林匹克竞赛(NOI’97)期间，作者跟中国计算机学会普及委员会主任、国际信息学奥林匹克中国队总教练、清华大学计算机系教授吴文虎老师谈到我们的想法。吴文虎教授非常支持这一想法。经过两年的努力，几经易稿，本书终于和同学们见面了。

本书向青少年朋友较系统地、由浅入深介绍在学习编程的过程中需要的数学知识。全书分为十章，分别介绍了集合、方程、函数、数理逻辑、概率统计、组合数学、图论以及算法的基础知识。为了提高同学们的学习兴趣，书中还介绍了计算机绘图所需要的知识。

本书是一本数学读物，注重数学知识的系统性和逻辑推理，但尽量避免繁杂的数学证明。

本书又是一本介绍数学在程序设计中的应用的读物，所以适当地介绍基本算法。对部分例题，不但给出了解法和证明，而且给出了相应的程序从另一个角度求解或验证。

考虑到开设计算机课的学校讲授的计算机语言大多数为QBASIC，因此书中大部分程序用QBASIC写成，仅后两章的程序用PASCAL写成。本书的大部分程序由方辉同学(获NOI'96银牌奖)编写，并上机通过。同学们不妨在学习本书的过程中把程序输入到计算机内运行，验证一下，进而利用计算机来创造问题求解的环境，利用计算机来探索数学中数字、图形等的规律。

本书大部分章节配有适量的例题和练习题，附录一还给出了大部分习题的参考答案。考虑到篇幅，仅对其中带有“*”的例题和练习题给出相应的程序。

本书内容不但适合青少年中爱好计算机的同学们阅读，而且也适合爱好数学的同学们参考。大多数例题和练习题可以作为编程练习题之用。

本书这种写法是笔者一种尝试，由于水平所限，书中介绍的内容存在这样或那样的不足或问题，恳请读者批评指正。

北京大学王选教授在百忙之中为本书题词，清华大学吴文虎教授抽出宝贵的时间，为本书写序。北京大学出版社沈承凤老师为这本书的出版付出辛勤的劳动。这里特别向他们致以真挚的感谢。

最后，我们将本书献给作者大学时代的老师、原皖南大学(安徽师范大学)数学系主任张国铮教授。

方文祺　顾锦娴

1997年7月

目　　录

第一章 整 数

1.1 整数及其运算

1.1.1 整数

整数,特别是自然数,是人类最早认识的、最为人们所熟知的数.我们把1,2,3,4,…,n,…这些数叫作自然数,又叫作正整数.

1是人类认识得最早的一个数,它是最小的自然数.有了它和加法,可以得到其它一切自然数:

$$1+1=2,\quad 2+1=3,\quad 3+1=4,\cdots$$

在正整数范围内,很明显:

正整数+正整数=正整数;

正整数×正整数=正整数.

但是,做减法运算,得到的结果可能是正整数,也可能不是正整数.例如

$$-1,-2,-3,-4,-5,\cdots,-n,\cdots$$

这些数叫作负整数.

0(零)这个数可以表示数量的没有和位置的空白.在不同的场合,可以起不同的作用,扮演不同的角色.

正整数和负整数再加上零,统一叫作整数.

1.1.2 整数的运算和性质

整数有下列基本性质:

① 整数可按从小到大的顺序排列(叫作整数的有序性).

② 整数中没有最大的,也没有最小的(叫作整数的无限性).

③ 任意两个整数相加、相减或相乘,其结果仍是整数(叫作整数的封闭性).任意两个整数也可以做除法(零不以做余数),其结果不一定是整数.

以后我们将用字母a,b,c,d……表示整数.几个字母连写时,表示相乘.例如:$ab=a\times b,abc=a\times b\times c$.几个相同的整数相乘,叫作乘方.例如:$a^2=a\times a,a^3=a\times a\times a$.

④ 相邻两个整数相差1.相邻两个整数可以表示为:

$$n-1,n\text{ 或 }n,n+1.\qquad(n\text{ 为任意整数})$$

1.1.3 趣味的整数例题

1. *在算式中填运算符及括号*

【例1.1.1】 在下式中填入+,-,×,÷或( ),使等式成立.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5=10$$

分析：从结果 10 想起. 算式中第 5 个数是 5，它前面填不同的运算符时，作为前几步运算的结果也随之不同. 如果 5 前填“＋”，则前面几步运算的结果就要求是 5；如果 5 前填“－”，则前面几步运算的结果就要求是 15；如果 5 前填“×”，则前面几步运算的结果就要求是 2. 按上面的推理方法，一步一步往前推（称为倒推法），可得：

$$(1+2)\div 3+4+5=10$$
$$(1+2)\times 3-4+5=10$$
$$(1+2+3-4)\times 5=10$$
$$\cdots$$

2. 填数字

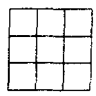
*【例 1.1.2】 在下列算式中的○内填入适当的数字，使算式成立.

$$\begin{array}{r} 2\bigcirc \\ \bigcirc\bigcirc\,\overline{)7\bigcirc 2} \\ \underline{6\bigcirc} \\ 1\bigcirc 2 \\ \underline{1\bigcirc 2} \\ 0 \end{array}$$

分析：由商 2○及 6○知道，除数的十位数字只能为 3；再由 1○2 以及能整除得知，除数和商的个位数字只能为 3 和 4，或 4 和 3，它们相乘积的个位数字是 2.（其它两数之积的个位数字是 2 的有 4×8，6×2，6×7，但是试填的结果都不符合要求）结果如下：

$$\begin{array}{r} 2\textcircled{4} \\ \textcircled{3}\textcircled{3}\,\overline{)7\textcircled{9}2} \\ \underline{6\textcircled{6}} \\ 1\textcircled{3}2 \\ \underline{1\textcircled{3}2} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\textcircled{3} \\ \textcircled{3}\textcircled{4}\,\overline{)7\textcircled{8}2} \\ \underline{6\textcircled{8}} \\ 1\textcircled{0}2 \\ \underline{1\textcircled{0}2} \\ 0 \end{array}$$

【例 1.1.3】 把 1，2，3，4，5，6，7，8，9 九个数填入右图各个方格中，使每一行、每一列以及两条对角线上数字之和都相等.



分析：右上图称为九宫图，又称纵横图. 我国古代数学家杨辉研究得出的方法如下：

① 把 1，2，3，4，5，6，7，8，9 按次序三三斜排；

② 把上下两数 1，9 对调，左右两数 7，3 对调；

③ 再将剩下 4 个数 4，2，8，6 各向外挺出为四角.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 4 & & 2 & \\ 7 & & 5 & & 3 \\ & 8 & & 6 & \\ & & 9 & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & & 9 & & \\ & 4 & & 2 & \\ 3 & & 5 & & 7 \\ & 8 & & 6 & \\ & & 1 & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{array}$$

练习 1.1

(1) 在等号左边各数字之间添加四则运算符及括号，使等式成立.

$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3=1$$

$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3=2$$

$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3=3$$

$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3=4$$

$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3=5$$

(2) 在等号左边适当的位置填入＋，－号，使等式成立.

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9=100$$

(3) 在下列算式中的○内填入适当的数字，使算式成立.

①

$$\begin{array}{r} \bigcirc\,3\,\bigcirc\,\bigcirc \\ +5\,\bigcirc\,0\,7 \\ \hline 7\,0\,9\,2 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} \bigcirc\,0\,\bigcirc\,\bigcirc \\ -2\,\bigcirc\,0\,5 \\ \hline 3\,6\,4\,7 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{r} 6\,\bigcirc \\ \times)\;3\,5 \\ \hline 3\,3\,\bigcirc \\ 1\,\bigcirc\,8 \\ \hline \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \end{array}$$

1.2 整除与整数的奇偶性

1.2.1 整除

整数除整数不一定得整数. 究竟什么样的整数除什么样的整数才能得到整数呢?这就要研究整数的整除性.

【定义】 设 a,b 是整数，$b\neq 0$. 如果有一个整数 c，它使得 $a=bc$，则 a 叫作 b 的倍数，b 叫作 a 的因数(或约数). 我们说 b 能整除 a 或 a 能被 b 整除. 记作 $b|a$.

例如，$6=2\times 3$，所以 6 是 2 的倍数(当然也是 3 的倍数)，且 $2|6$.

整除有许多性质，经常可以用到. 这里举出容易验证的、常用的一些结论：

① 设 a,b,c 是整数，b 不小于 c，且 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b\pm c)$.

② 设 a,b,c 是整数，且 $a|b$，则 $a|bc$.

③ 设 a,b,c 是整数，且 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$.

1.2.2 奇数和偶数

【定义】 能被 2 整除的数叫作偶数. 如 0，2，4，6，8，…. 不能被 2 整除的数叫作奇数. 如 1，3，5，7，9，….

任何一个整数，或者是奇数，或者是偶数. 二者必居其一. 这就是整数的奇偶性.

下面直接给出有关法则：

奇数＋奇数＝偶数；　　奇数＋偶数＝奇数；
偶数＋偶数＝偶数；　　奇数×奇数＝奇数；
奇数×偶数＝偶数；　　偶数×偶数＝偶数.

【例 1.2.1】 $1+2+3+\cdots+1996$ 是奇数还是偶数？

解：∵ $1+3+5+\cdots+1995$ 是奇数，
$2+4+6+\cdots+1996$ 是偶数，
∴ 相加后为奇数. ▌

【例 1.2.2】 有一列数：1,1,2,3,5,8,13,21,…. 从第三个数开始，每个数都是前两个数的和. 问在前 100 个数中有几个是偶数？

解：因为这列数的奇偶性为：

奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶，……

所以在前 100 个数中，有 33 个偶数. ▌

【例 1.2.3】 某班 25 个同学坐成 5 行 5 列，每个同学的前后左右的位子叫作邻座. 让这 25 个同学中每一个人都坐到他的邻座上去. 能否办到？

○△○△○
△○△○△
○△○△○
△○△○△
○△○△○

解：粗看好像能办到，其实办不到. 如右图：

可以看出，座位○为 12 个（偶数），座位△为 13 个（奇数）. 所以不能互换座位. ▌

1.2.3 能被一个整数整除的整数的特征

一个整数如果能被某个整数整除，那么这个整数就具有一定特征. 这些特征在判断整除时，经常要用到. 这里举出容易验证的、常用的一些结论：

① 末位数字是偶数 0,2,4,6,8 的整数能被 2 整除.

② 末位数字是 0,5 的整数能被 5 整除.

③ 末两位数若能被 4 或 25 整除，那么这个整数就能被 4 或 25 整除.

④ 末三位数若能被 8 或 125 整除，那么这个整数就能被 8 或 125 整除.

⑤ 一个整数的各数位上的数的和若能被 3 或 9 整除，那么这个整数就能被 3 或 9 整除.

例如，因为 $9\mid(1+2+3+4+5+6+7+8+9)$，所以 $9\mid 123456789$.

⑥ 一个整数的奇数位上的数之和与偶数位上的数之和的差以大减小，若能被 11 整除，那么这个整数就能被 11 整除. 这里我们把自然数的个位叫作第 1 位，十位叫作第 2 位，百位叫作第 3 位，这样依次编号，则第 1,3,5,…位叫奇数位，第 2,4,6,…位叫偶数位.

例如，132759 的奇数位上的数的和为 $9+7+3=19$，偶数位上的数的和为 $5+2+1=8$，$19-8=11$ 能被 11 整除. 所以 132759 能被 11 整除.

利用上述一些数字特征，可以较容易解决一些问题.

*__【例 1.2.4】__ 五位数 54□7□中的方框填入什么数字才能被 3 整除、且含有约数 5？

解：个位上只能填 0 或 5. 当个位上填 0 时，百位上可以填 2,5 或 8；当个位上填 5 时，百位上可以填 0,3,6 或 9. 所以这些数共 7 个：

54270，54570，54870，54075，54375，54675，54975. ▌

【例 1.2.5】 从 2,3,5,7 四个数中任取 3 个数，组成能被 3 和 25 整除的三位数. 这样的三

位数有多少个？

解：能被 25 整除的数，末两位只能是 25 或 75. 末两位是 25 时，组成的三位数有 325，725，其数字之和都不是 3 的倍数；末两位是 75 时，组成的三位数有 275，375，其中只有 375 是 3 的倍数；所以所求的数是 375. ▌

*【例 1.2.6】 六位数$\overline{3ababa}$是 6 的倍数，这样的数有多少个？

解：一个数是 6 的倍数，则它必定能被 2 或 3 整除. 所求的六位数能被 2 整除，所以 a 可以取 0，2，4，6，8 五个数；又所求的六位数的各个数字的和是 $3+a+b+a+b+a=3(a+1)+2b$，如果所求的六位数能被 3 整除，则 b 只能取 0，3，6，9 四个数；所以共有 $5\times4=20$ 个数. ▌

练习 1.2

*(1) 1000 以内是 5 的倍数或有 7 的约数的数有多少个？

(2)把 1，2，3，4，5，6，7，8，9 九个数字分成三组，分别组成能被 3 整除、且和尽可能大的三位数. 求这三个三位数.

(3)将小玻璃球放进两种盒子里，每个大盒装 12 个球，每个小盒装 5 个球，恰好装完. 如果有 99 个球，盒子数大于 10，问大盒、小盒各多少？

(4) 把 1 到 9 的九个数字填入算式的九个方框内，使等式成立.

$$\square\square\square\times\square\square=\square\square\times\square\square=5568$$

1.3 最大公约数与辗转相除法

1.3.1 带余除法

设有 16 本练习本，分给三位同学，每人得几本？

这个问题大家都会做：

$$16\div3=5\cdots1$$

结果表示每位同学 5 本，多余 1 本. 这种除法称为带余除法. 更进一步，可以写为：

$$16=3\times5+1.$$

【定义】 一般地，如果 a,b 是整数，$b\neq0$，则一定有且只有两个整数 q,r，使下式成立：

$$a=bq+r,\qquad(0\leqslant r<|b|)$$

我们称 q 为 a 除以 b 的商，r 称为 a 除以 b 的余数.

1.3.2 最大公约数

【定义】 设整数 $n\geqslant2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 d 是整数，如果 $d|a_1,d|a_2,\cdots,d|a_n$，则称 d 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公约数，公约数中最大者称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数. 记作：

$$d=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

特例，若$(a,b)=1$，则称 a,b 互质.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，则称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互质.

关于最大公约数，有如下定理，(证明略去)：

【定理】 假设 a 和 b 都是正整数，且 $a>b$，$a=bq+r$，$(0<r<b)$，其中 q，r 都是正整数，则 a 和 b 的最大公约数等于 b 和 r 的最大公约数，即

$$(a,b)=(b,r).$$

1.3.3 辗转相除法

假设 a 和 b 都是正整数，且 $a>b$，求 a 和 b 的最大公约数. 方法如下：

步骤 1：用 b 除 a，得到

$$a=bq_1+r_1,$$

其中，q_1 和 r_1 都是非负整数，且 $0\leqslant r_1<b$.

如果 $r_1=0$，则 $a=bq_1$，所以 a 和 b 的最大公约数就是 b.

如果 $r_1\neq 0$，则有 $0<r_1<b$.

步骤 2：再用 r_1 除 b，得到

$$b=r_1q_2+r_2,$$

其中，q_2 和 r_2 都是非负整数，且 $0\leqslant r_2<r_1$.

由 $a=bq_1+r_1$，$0\leqslant r_1<b$ 和上述定理可得

$$(a,b)=(b,r_1).$$

如果 $r_2=0$，则 b 和 r_1 的最大公约数就是 r_1，即 $(b,r_1)=r_1$. 所以 $(a,b)=(b,r_1)=r_1$，即 a 和 b 的最大公约数就是 r_1.

如果 $r_2\neq 0$，则有 $0<r_2<r_1$.

步骤 3：再用 r_2 除 r_1，得到

$$r_1=r_2q_3+r_3,$$

其中，q_3 和 r_3 都是非负整数，且 $0\leqslant r_3<r_2$.

由 $b=r_1q_2+r_2$，$0\leqslant r_2<r_1$ 和上述定理可得

$$(b,r_1)=(r_2,r_1).$$

由 $(a,b)=(b,r_1)$，得到 $(a,b)=(r_2,r_1)$.

如果 $r_3=0$，则 r_1 和 r_2 的最大公约数就是 r_2，即 $(r_1,r_2)=r_2$. 所以 $(a,b)=r_2$，即 a 和 b 的最大公约数就是 r_2.

如果 $r_3\neq 0$，则有 $0<r_3<r_2$.

步骤 4：再用 r_3 除 r_2，

……

这样继续进行下去. 由于 $b>r_1>r_2>r_3>\cdots$，并且所有的 $r_i(i=1,2,3,\cdots)$ 都是非负整数，所以一定存在有一个正整数 n，使得经过 $n+1$ 次辗转相除后有 $r_{n+1}=0$，但是 $r_n\neq 0$，这时 r_n 就是 a 和 b 的最大公约数，即

$$(a,b)=r_n.$$

上面所述的方法就是“辗转相除法”. 关于这一方法，我国古代数学家秦九韶早在《数书九章》(1247 年)就有记载. 西方称之为欧几里德算法.

【例 1.3.1】 求 42897 与 18644 的最大公约数.

解：$42897=2\times 18644+5609$

$18644=3\times 5609+1817$

$5609=3\times 1817+158$

$1817=11\times 158+79$

$158=2\times 79$

所以 42897 与 18644 的最大公约数是 79.

1.3.4 最小公倍数

【定义】 设整数 $n\geqslant 2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 m 是整数，如果 $a_1|m,a_2|m,\cdots,a_n|m$，则称 m 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数，公倍数中最小者称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数. 记作：

$$m=[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

例如，12 和 24 既能被 6 整除，又能被 4 整除. 所以 12 和 24 都是 4 与 6 的公倍数. 但是不存在小于 12 的正整数既能被 6 整除，又能被 4 整除. 所以 12 是 4 和 6 的最小公倍数. 即$[6,4]=12$.

【定理】 假设 a 和 b 都是正整数，且 d 是 a 和 b 的最大公约数，m 是 a 和 b 的最小公倍数，则我们有

$$ab=dm.$$

例如，2 是 4 和 6 的最大公约数，12 是 4 和 6 的最小公倍数. 显然有

$$4\times 6=12\times 2.$$

练习 1.3

*(1) 一个两位数被 4,5,6 除余 1，求这个数.

(2) 有两个容器，一个容量为 27 升，另一个容量为 15 升. 怎样利用它们从一桶油中倒出 6 升油来.

1.4 质　　数

1.4.1 什么是质数

"1"这个数是人类认识得最早的一个数. 1 只有一个正因数，就是它本身. 任何大于 1 的正整数 a 都至少有两个正因数，即 1 和 a.

2 只能被 1 和 2 整除，3 只能被 1 和 3 整除.

【定义】 一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，不能被其他正整数整除. 这样的正整数叫作质数(或素数)，否则叫作合数.

例如：2,3,5,7,11,13,17,19 都是质数. 4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,…都是合数. 2 是最小的质数.

全体正整数可以分为三类：1，质数，合数. 以后我们常用 p 或 $p_1,p_2,p_3,p_4,\cdots$ 表示质数.

【定义】 如果一个正整数 a 有一个因数 b，而 b 又是质数，则 b 就叫作 a 的质因数.

例如：$12=3\times 4$，3 和 4 都是 12 的因数，但 3 是质因数，4 不是质因数.

每一个合数都可以表示为质因数的积的形式. 而把一个合数用质因数的积的形式表示出来，叫作分解质因数.